

SECRETARIA DE
EDUCAÇÃO



GOVERNO DO
PARÁ

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA

Ensino Médio

Pinturas Rupestres de Alenquer


**Acelere
o Saber**



Acelere o Saber

MATEMÁTICA

Ensino Médio

Coleção Acelere o Saber – Ensino Médio

Matemática - Livro do Aluno

Uma produção



Direção Editorial

Tiago Braga

Organização

Antonio Nicolau Youssef

Colaboradores

Angel Honorato

Ângela Silvano

Camila Suckow

Cristina Tavares

Diego Vogt

Eduardo Araújo

Heloisa Takazaki

Ivyan Karoline M. Correa

Katherine Scott

Luciane Baía

Rosane Rudnik

Thiago Gusmão

Revisão

Ana Christina M. Perfetti

Miriam de Carvalho Aboes

Victor Truccolo

Equipe Editora Órbita

Ilustrações

Danilo Neves Pereira

Fernando José Ferreira

Guilherme José Ferreira

Kauan Henrique

Tiago Bento

Imagens

Adobe Stock

Shutterstock

Projeto Gráfico

Amplitude.PP

Diagramação

Fórmula Produções

Artes e Letras

Amplitude.PP

A173 Acelere o saber : Matemática : livro do aluno - Ensino Médio / Antônio Nicolau Youssef (org.) ; Tiago Braga (coord.) - 1ª ed. - São Paulo : Órbita, 2023.
280 p. : il. color.

ISBN 978-65-6038-018-9

1. Matemática. 2. Sistemas. 3. Geometria analítica. 4. Geometria espacial.
5. Polinômios. I. Youssef, Antônio Nicolau (org.). II. Braga, Tiago (coord.).

CDD 510

CDU 51

Dados de Catalogação AACR2 2ª. ed.

Tatiane Thielke dos Santos Cruz – Bibliotecária - CRB-8/121/2023.

1ª edição

São Paulo – 2023

Todos os direitos reservados



EDITORA AFILIADA

APRESENTAÇÃO



Caro estudante,

Bem-vindo à Coleção Acelere o Saber.

Nossa maior preocupação ao desenvolver esta coleção foi a de ajudá-lo a seguir adiante em seus estudos, recompondo sua aprendizagem no Ensino Fundamental e pavimentando sua caminhada em direção ao Ensino Médio.

Ao longo deste livro você será convidado a pensar, explorar, resolver problemas, discutir e argumentar sobre os mais variados temas, para que, com a ajuda dos professores e educadores que estarão ao seu lado, possa desenvolver as habilidades e competências fundamentais para sua progressão de estudos.

Mantenha-se concentrado em seus objetivos de aprendizagem para, assim, usufruir desta importante oportunidade que se apresenta em um momento decisivo de sua vida escolar.

Esperamos que você participe ativamente das propostas constantes neste material e lembre-se sempre de contar com nossa colaboração.

Vamos começar?

Um abraço.

Sumário

Matemática 9

Capítulo 1 – Matemática financeira 11

Porcentagem	12
Cálculos com porcentagem	12
Juros simples	16
Cálculo de juros simples	16
Cálculo do montante no sistema de juros simples	17
Desconto comercial simples	18
Juros compostos	21
Cálculo do montante no sistema de juros compostos	22
Resumo	26
Avalie o que aprendeu	27

Capítulo 2 – Sistemas lineares, matrizes e determinantes 33

Equações lineares	34
Sistema de equações lineares	36
Sistema escalonado	39
Resolução de um sistema escalonado	39
Escalonamento e resolução de um sistema linear	41
Discussão sobre um sistema linear	43
Matrizes	47
Tipos de matrizes	51
Operações com matrizes	54
Adição e subtração de matrizes	57
Multiplicação de número real por matriz	58
Multiplicação de matrizes	61
Matriz inversa	64
Determinantes	65
Determinantes de matrizes de ordens 1, 2 e 3	66
Determinante de matrizes de ordem n	70
Propriedades dos determinantes	72
Regra de Cramer	75
Resumo	78
Avalie o que aprendeu	84

Capítulo 3 – Contagem e probabilidade 91

Princípio fundamental da contagem.....	92
Fatorial.....	97
Permutação simples.....	99
Permutação com elementos repetidos.....	102
Práticas interdisciplinares.....	104
Combinações simples.....	106
Números binomiais.....	109
Triângulo de Pascal.....	110
Binômio de Newton.....	114
Termo geral.....	114
Noção de probabilidade.....	118
Experimentos aleatórios.....	118
Espaço amostral e evento.....	118
Probabilidade de um evento.....	119
Regra da soma.....	122
Regra do produto.....	124
Eventos independentes.....	125
Resumo.....	127
Avalie o que aprendeu.....	129

Capítulo 4 – Geometria espacial 135

Geometria de posição.....	136
Conceitos primitivos, postulados e teoremas.....	136
Posições relativas de duas retas.....	141
Determinação de planos.....	145
Posições relativas de reta e plano.....	148
Teorema do paralelismo entre reta e plano.....	149
Posições relativas de dois planos.....	152
Teorema do paralelismo entre dois planos.....	153
Perpendicularismo.....	156
Teorema do perpendicularismo entre reta e plano.....	157
Geometria métrica.....	160
Áreas e volume do prisma.....	163
Pirâmides	168

Área e volume da pirâmide	170
Cilindros	174
Áreas e volume do cilindro reto	176
Cones	178
Áreas e volume do cone reto	180
Esfera	183
Área da superfície esférica e volume da esfera	184
Poliedros	186
Relação de Euler	187
Resumo	190
Avalie o que aprendeu	193
Capítulo 5 – Geometria analítica	197
Estudo do ponto	198
Distância entre dois pontos	201
Ponto médio	204
Alinhamento de três pontos	206
Estudo da reta	208
Coeficiente angular	209
Equação fundamental da reta	212
Equação geral da reta	215
Casos particulares da equação geral da reta	217
Equação reduzida da reta	220
Equação segmentária da reta	221
Posições relativas de duas retas	223
Retas perpendiculares.....	226
Ângulo entre duas retas	228
Distância de ponto a reta	230
Estudo da circunferência	233
Equação reduzida da circunferência	233
Equação geral da circunferência	236
Posição de um ponto em relação a uma circunferência	237
Posição de uma reta em relação a uma circunferência	240
Posições relativas de duas circunferências	243
Resumo	247
Avalie o que aprendeu	250

Capítulo 6 – Polinômios e equações polinomiais253

Funções polinomiais	254
Igualdade de polinômios	254
Adição e subtração de polinômios	258
Multiplicação de polinômios	259
Divisão de polinômios	261
Teorema do resto	264
Teorema de d'Alembert	264
Algoritmo de Briot-Ruffini	267
Equações polinomiais	270
Teorema fundamental da Álgebra	270
Multiplicidade de uma raiz	272
Resumo	274
Avalie o que aprendeu	277
Referências	280



Acelere o Saber

MATEMÁTICA

A woman with long dark hair and glasses, wearing a grey blazer over a red scarf, is seated at a desk. She is looking down at a large calculator, with her right hand on the keypad. In her left hand, she holds a large sheet of paper. On the desk, there is also a laptop, a pen, and a notebook. The background is a blurred view of a city through a window, with warm, golden light suggesting late afternoon or early morning.

O mundo das finanças exige que sejam consultados diariamente os indicadores econômicos.

Capítulo 1

Matemática financeira

O estudo da Matemática Financeira consiste na aplicação do conhecimento matemático na resolução de problemas relativos a transações comerciais e financeiras, como, por exemplo, investimentos, financiamentos, impostos e operações em mercados de capitais. O domínio dos conceitos básicos de Matemática Financeira é fundamental para o exercício das mais diversas profissões no mundo moderno, assim como para o nosso dia a dia.

Saber dimensionar formas de comprar, avaliar as variações dos preços dos produtos que compramos para nossa subsistência, compreender os significados básicos dos movimentos da economia nacional e mundial e suas implicações em nossas vidas, controlar uma conta bancária e operar os aspectos financeiros de nosso trabalho ou de nossa vida familiar são exemplos de ações que exigem o domínio de conceitos de Matemática Financeira.

Porcentagem

Inicialmente, vamos recordar o conceito de porcentagem, essencial devido ao seu emprego em praticamente todos os problemas e cálculos financeiros.

Chamamos de porcentagem toda razão $\frac{a}{b}$, na qual $b = 100$. Essas razões centesimais são representadas pelo símbolo %. Veja os exemplos:

$$\frac{5}{100} = 0,05 = 5\%$$

$$\frac{137}{100} = 1,37 = 137\%$$

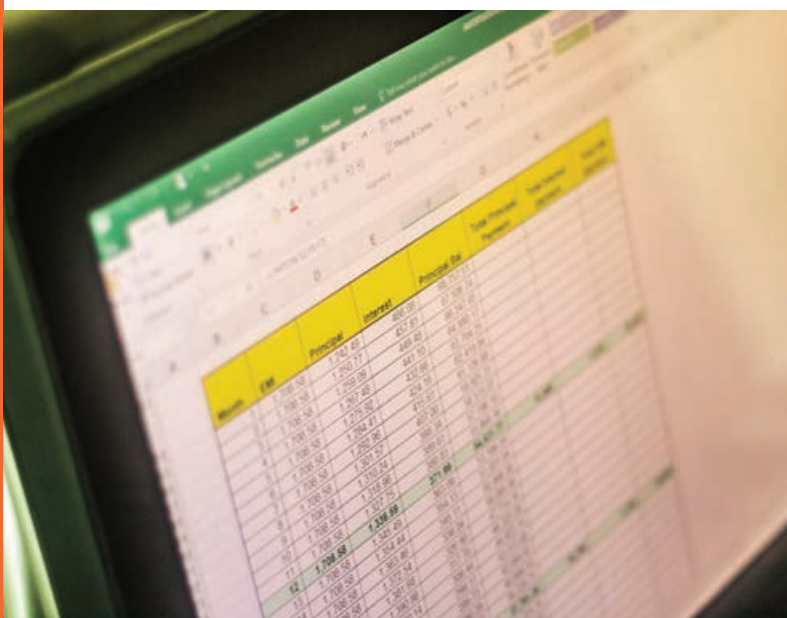
$$\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 0,16 = 16\%$$

$$\frac{155}{1.000} = \frac{15,5}{100} = 0,155 = 15,5\%$$

Cálculos com porcentagem

Os problemas que envolvem porcentagem podem ser resolvidos com o uso de uma calculadora simples, manipulando-se apenas as quatro operações fundamentais ou a tecla específica para a operação (%) disponível para esses cálculos. No entanto, é importante que se domine os conceitos de frações, razões e regra de três envolvidos na maioria das situações em que cálculos de porcentagens são necessários. Vamos verificar, nas atividades a seguir, algumas dessas situações.

Sempre que necessário, com o auxílio do professor, você poderá utilizar calculadora ou aplicativos de celular e computador para auxiliar nos cálculos.



AdobeStock

As ferramentas digitais podem ser grandes apoios nas situações de acompanhamento financeiro e auxílio nos cálculos relacionados.

Atividades resolvidas

R1. Um aluno acertou em um exame 12 das 15 questões apresentadas. Qual foi sua porcentagem de acerto?

Resolução

A razão entre o número de questões acertadas e o número total de questões apresentadas é:

$$\frac{12}{15} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{80}{100}$$

Logo, 80% foi a porcentagem de acerto. Isso significa que se a prova tivesse 100 questões, o aluno teria acertado 80 questões.

R2. Um vendedor tem 9% de comissão nos negócios que realiza. Qual foi a sua comissão em uma venda de R\$ 36.000?

Resolução

A comissão do vendedor é 9% da venda, ou seja:

$$\text{comissão} = 9\% \text{ de } 36.000 = 3\% \times 36.000 = \frac{9}{100} \cdot 36.000 = 3.240$$

A comissão do vendedor foi de R\$ 3.240,00.

R3. Uma loja está oferecendo 8% de desconto para pagamento à vista na compra de um automóvel que custa R\$ 74.700. Quanto uma pessoa pagará por esse carro à vista?



AdobeStock

Resolução

Vamos resolver esse problema de dois modos: utilizando regra de três e, depois, com fração do total.

1º modo – regra de três:

preço porcentagem

74.700 100

x 8

$$\frac{74.700}{x} = \frac{100}{8} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 74.700}{100} = 5.976$$

Logo, o preço do carro à vista será: R\$ 74.700 – R\$ 5.976 = R\$ 68.724

2º modo – fração do total:

Aqui, calculamos o desconto a partir da porcentagem oferecida:

$$8\% \text{ de } 74.700 = \frac{8}{100} \cdot 74.700 = 5.976$$

Portanto, o preço à vista será:

$$\text{R\$ } 74.700 - \text{R\$ } 5.976 = \text{R\$ } 68.724$$

Atividades

1. Em um treino de basquete, Bruno fez 360 arremessos e errou 198. Qual foi sua porcentagem de acerto?



AdobeStock

2. Minha classe tem 30 alunos: 18 com 15 anos, 9 com 16 e os outros com 17. Calcule a porcentagem dos alunos da classe que têm:

a) 15 anos

c) 17 anos

b) 16 anos

d) 18 anos

3. Uma vendedora recebe 9% de comissão nas vendas realizadas. Qual foi a sua comissão em uma venda de R\$ 3.000?

4. Um corretor recebeu R\$ 21.800 pela venda de duas casas, tendo sido de 5% a taxa de comissão. Qual o valor de venda das propriedades?

5. Juca devia R\$ 200 a Rodrigo e pagou apenas R\$ 74. Quantos por cento da dívida foram pagos?

6. Em uma sala em que 75% dos alunos são rapazes, estudam apenas 7 moças. Quantos alunos têm a classe?

7. Em uma liquidação, uma camisa que custava R\$ 130 foi vendida com 15% de abatimento. Quanto passou a custar a camisa?



Juros simples

Quando uma pessoa pede dinheiro emprestado a outra ou a uma instituição financeira, ela paga uma espécie de aluguel pelo tempo que fica com o dinheiro. Esse aluguel é sempre uma porcentagem do valor inicialmente emprestado e, além disso, o valor do aluguel é proporcional ao tempo que a pessoa fica com o dinheiro.

O aluguel de que falamos chama-se juro (J), a porcentagem que se paga é a taxa de juro (i), o dinheiro que se pede emprestado é o capital (C) e o total que se paga no final do empréstimo é o montante (M).

De forma resumida, chama-se juro simples a compensação em dinheiro pelo empréstimo de um capital financeiro, a uma taxa combinada, por um prazo determinado, produzida exclusivamente pelo capital inicial.

Cálculo de juros simples

Quando o regime é de juro simples, a remuneração pelo capital inicial é diretamente proporcional ao seu valor e ao tempo de aplicação. O tempo de aplicação é dado pelo número de períodos em que a taxa de juros combinada é aplicada. Por sua vez, a taxa é o fator de proporcionalidade para o cálculo dos juros. Assim:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

C : capital inicial; J : juro simples;

i : taxa de juros; n : número de períodos

Atividades resolvidas

R4. Uma pessoa toma emprestado R\$ 1.000 pelo prazo de 2 meses de um familiar, prometendo devolver com a taxa de 3% ao mês. Qual será o valor a ser pago como juro?

Resolução

Vamos inicialmente calcular o juro, mês a mês.

– 1º mês: juro = 3% de 1.000 = $0,03 \times 1.000 = 30$

– 2º mês: juro = 3% de 1.000 = $0,03 \times 1.000 = 30$

Ao final de 2 meses, os juros totalizam R\$ 60.

Ou, então, podemos resolver o problema diretamente:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

$$J = 1.000 \cdot 0,03 \cdot 2$$

$$J = 60$$

Decorrido o prazo, o valor a ser pago como juro simples será de R\$ 60.

R5. Qual o valor de um capital que, aplicado à taxa de juros simples de 2% ao mês, rendeu depois de um ano R\$ 2.400 de juros?

Resolução

Como a taxa é de $i = 2\%$ ao mês, devemos considerar, para 1 ano, um número de 12 meses ou 12 períodos de aplicação desta taxa para produzir um juro de R\$ 2.400. Assim:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

$$2400 = C \cdot 0,02 \cdot 12$$

$$2400 = C \cdot 0,24 \Rightarrow C = 10.000$$

O capital aplicado inicialmente foi de R\$ 10.000.

Cálculo do montante no sistema de juros simples

Montante, ou valor acumulado de um capital inicial C , investido a uma taxa i por período e pelo prazo de n períodos, é a soma do capital inicial, também chamado de **principal**, com o juro produzido no prazo determinado.

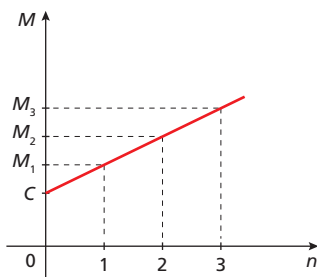
Indicando o montante por M , temos:

$$M = C + J$$

$$M = C + C \cdot i \cdot n$$

$$M = C(1 + i \cdot n)$$

Observe que fixados o capital C e a taxa i , o montante M varia linearmente em função do período n .



Atividades resolvidas

R6. Qual é o montante de um capital de R\$ 10.000 aplicado à taxa de 10% a.a (ao ano) pelo prazo de 2 anos?

Resolução

Temos:

$$C = 10.000, i = 0,10 \text{ e } n = 2 \text{ anos}$$

$$M = C(1 + i \cdot n) \Rightarrow M = 10.000 (1 + 0,10 \cdot 2)$$

$$M = 12.000$$

O montante, após 2 anos, à taxa de juro de 10% a.a., será de R\$ 12.000.

R7. Que montante receberá um aplicador que tenha investido R\$ 5.000, à taxa de juros simples de 18% a.a., durante 6 meses?

Resolução

Devemos observar que a taxa e o tempo de aplicação devem estar na mesma unidade.

Assim, 6 meses equivalem a $\frac{6}{12}$ do ano.

Aplicando a fórmula, temos:

$$M = C(1 + i \cdot n) \Rightarrow M = 5.000 \left(1 + 0,18 \times \frac{6}{12} \right)$$

$$M = 5.450$$

O aplicador receberá R\$ 5.450 ao fim de 6 meses.

Desconto comercial simples

Desconto comercial é aquele que se obtém quando saldamos um determinado compromisso antes do vencimento do prazo previamente estipulado. Seu cálculo é feito determinando-se o juro simples sobre o valor nominal N do compromisso, a uma taxa de desconto i , para os n períodos antes de seu vencimento.

$$\text{Valor do desconto: } D_c = N \cdot i \cdot n$$

$$\text{Valor descontado: } V_c = N - N \cdot i \cdot n$$

$$V_c = N(1 - i \cdot n)$$

Atividades resolvidas

R8. Uma pessoa pretende saldar um título de R\$ 5.000 três meses antes do vencimento, cuja taxa de desconto comercial é 24% a.a. Qual é o desconto comercial? E o valor descontado?

Resolução

Lembrando que a taxa é anual e deve ser convertida para meses, aplicamos a fórmula:

Desconto comercial: $D_c = N \cdot i \cdot n$

$$D_c = 5.000 \times \frac{0,24}{12} \times 3 = 300$$

Valor descontado:

$$V_c = 5.000 \times \left(1 - \frac{0,24}{12} \times 3\right) = 4.700$$

O valor descontado também poderia ser calculado subtraindo-se o desconto do valor nominal:

$$V_c = 5.000 - 300 \Rightarrow V_c = \text{R\$ } 4.700$$

R9. O valor nominal de uma nota promissória é de R\$ 10.000. Qual é o valor atual (valor aplicado) se a taxa de aplicação for de 38,4% a.a., com vencimento daqui a 10 meses?

Resolução

Considerando o valor nominal (N) da nota como o montante e o valor atual (A) como o capital inicial, temos:

$$N = A(1 + i \cdot n) \Rightarrow 10.000 = \left(1 + \frac{0,384}{12} \cdot 10\right)$$

$$10.000 = A \cdot 1,32 \Rightarrow A = 7.575,76$$

O valor atual é de R\$ 7.575,76.

Essa operação é comumente chamada de **trazer a valor presente** o valor nominal da nota promissória, como se ela fosse ser paga ou quitada antes de seu vencimento. Isso equivale a dizer que sobre os R\$ 10.000, calculamos um **desconto comercial simples** relativo aos dez meses que ainda faltam para o vencimento. Neste caso, o desconto comercial foi de:

$$D_c = 10.000 - 7.575,76 \Rightarrow D_c = \text{R\$ } 2.424,24$$

Atividades

8. Calcule o juro simples referente a um capital de R\$ 2.000 aplicado à taxa de juros de 15% a.a. durante 1 ano.

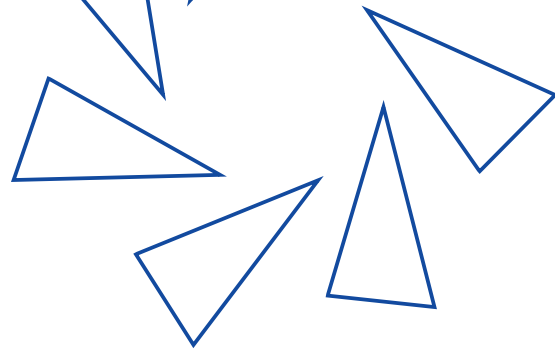
9. Um capital aplicado a juro simples rende R\$ 272 em 10 dias, a 12% a.m. Qual é esse capital?

10. Qual é o capital que, à taxa de 9% a.m., produz R\$ 108 em 2 anos?

11. Determine a taxa mensal que faz com que um capital, investido a juro simples durante 8 meses, tenha seu valor triplicado.

12. Quanto tempo deve ficar aplicado um capital de R\$ 1.600, para que produza um montante de R\$ 1.856, à taxa de 24% a.t. (ao trimestre)?

Juros compostos



Regime de juros compostos é aquele em que o juro gerado pela aplicação ou empréstimo será incorporado a ele, passando a participar da geração de juros no período seguinte. Isso significa que, ao fim de um período, o capital passa a ser o capital inicial acrescido dos juros do período e assim sucessivamente. Por essa razão, esse regime é comumente chamado de **juros sobre juros** e é o regime utilizado em operações de empréstimos bancários, cheques especiais, financiamentos e investimentos.

Suponhamos, por exemplo, que uma pessoa tome emprestada, a juro composto, a importância de R\$ 1.000 pelo prazo de 4 meses, à taxa de 6% a.m. (ao mês). Observe na tabela a seguir que, a cada mês, são acrescidos 6% de juros ao montante produzido até o final do mês anterior.

n	Saldo no início do período	Juro por período	Montante
1	1.000	$1.000 \times 0,06 = 60$	$1.000 + 60 = 1.060$
2	1.060	$1.060 \times 0,06 = 63,60$	$1.060 + 63,60 = 1.123,60$
3	1.123,60	$1.123,60 \times 0,06 = 67,41$	$1.123,60 + 67,41 = 1.194,01$
4	1.194,01	$1.194,01 \times 0,06 = 71,64$	$1.194,01 + 71,64 = 1.265,65$

Decorrido o prazo, o valor a ser pago como juro será:

$$J = 1.265,65 - 1.000 \Rightarrow J = \text{R\$ } 265,65$$

Compare o juro a ser pago no regime de juros compostos com o valor em regime de juros simples:

$$J = C \cdot i \cdot n \Rightarrow J = 1.000 \times 0,06 \times 4 \Rightarrow J = \text{R\$ } 240$$

Veja que, com juros sobre juros, o valor é R\$ 25,65 maior que o do regime de juros simples.

Cálculo do montante no sistema de juros compostos

No regime de juros compostos, a cada período acrescentamos os juros ao montante já produzido, formando um novo capital para o período seguinte. A esse processo damos o nome de **capitalização**. Vamos calcular o montante M para um capital C aplicado a uma taxa i por período, ocorrendo capitalização no final de cada período, em um prazo de n períodos.

Final do 1º período:

$$M_1 = C + Ci \Rightarrow M_1 = C(1 + i)$$

Final do 2º período:

$$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i \Rightarrow M_2 = M_1(1 + i)$$

$$M_2 = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$$

Final do 3º período:

$$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i \Rightarrow M_3 = M_2(1 + i)$$

$$M_3 = C(1 + i)(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^3$$

Final do 4º período:

$$M_4 = M_3 + M_3 \cdot i \Rightarrow M_4 = M_3(1 + i)$$

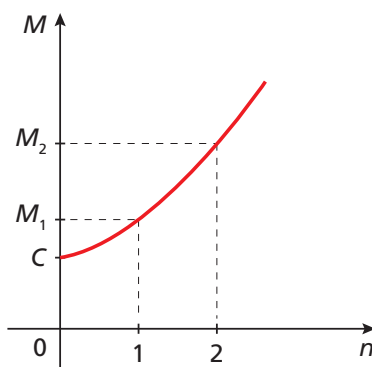
$$M_4 = C(1 + i)(1 + i)(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^4$$

E assim sucessivamente. Note que os montantes formam uma progressão geométrica de razão $(1 + i)$.

Generalizando, o montante ao final de n períodos, à taxa i de juros, é dado por:

$$M = C(1 + i)^n$$

Fixados o capital C e a taxa i , o montante M varia exponencialmente em função do período n .



Atividades resolvidas

R10. Uma pessoa toma R\$ 2.000 emprestados, a juros de 2% a.m., pelo prazo de 10 meses com capitalização composta. Qual é o montante a ser devolvido?

Resolução

– Utilizando a tecla x^y em uma calculadora científica:

Calcule inicialmente $(1 + 0,02)^{10}$

Digite 1 + 0 , 0 2 x^y 1 0 =.

A sequência de teclas pode variar dependendo da calculadora.

Depois multiplique o resultado por 2.000. Assim, teremos:

$$M = \text{R\$ } 2.437,98$$

Procuramos o valor do fator $(1 + i)^n$, para $n = 10$ e $i = 2\%$, que é 1,218994.

Logo:

$$M = 2.000 \times (1,02)^{10}$$

$$M = 2.000 \times 1,218994 = \text{R\$ } 2.437,98$$

R11. Calcule o montante produzido pelo capital de R\$ 4.000 aplicado a 10% a.t., capitalizado trimestralmente, durante 12 meses.

Resolução

Vamos transformar 12 meses em 4 trimestres e substituir na relação $M = C(1 + i)^n$. Logo:

$$M = 4.000 (1 + 0,10)^4 = 5.856,40$$

O montante produzido é de R\$ 5.856,40.

R12. Calcule a taxa efetiva de juro mensal para que o capital de R\$ 3.450, investido durante 2 anos, produza um montante de R\$ 21.877,07.

Resolução

$$M = C(1 + i)^n \Rightarrow 21.877,07 = 3.450 (1 + i)^{24}$$

$$(1 + i)^{24} = \frac{21.877,07}{3.450} \Rightarrow 1 + i = \sqrt[24]{6,3411807}$$

– Realizando o cálculo com calculadora científica, digite as seguintes teclas, mas verifique antes se a sua calculadora obedece a esta ordem:

2 4 $\sqrt[n]{}$ 6 , 3 4 1 1 8 0 7 =

Você deve encontrar como resultado o número 1,08. Logo:

$$1 + i = 1,08 \Rightarrow i = 0,08 \Rightarrow i = 8\% \text{ a.m.}$$

R13. Um investidor aplicou R\$ 25.000 em uma instituição que paga 3% a.m. Após certo período, ele recebeu R\$ 35.644,02, estando incluídos nesse valor os juros compostos creditados e o capital investido. Por quanto tempo o dinheiro ficou aplicado?

Resolução

$$M = C(1 + i)^n \Rightarrow 35.644,02 = 25.000 (1 + 0,03)^n$$

$$(1,03)^n = \frac{35.644,02}{25.000} \Rightarrow (1,03)^n = 1,4257608$$

– Inicialmente, calculamos o logaritmo decimal dos dois lados da igualdade. Com uma calculadora científica, obtemos os valores dos logaritmos e determinamos n . Acompanhe:

$$\log(1,03)^n = \log 1,4257608 \Rightarrow n \cdot \log(1,03) =$$

$$= \log 1,4257608 \Rightarrow n = \frac{\log 1,4257608}{\log 1,03}$$

log 1 , 4 2 5 7 6 0 8 ÷ log 1 , 0 3

Portanto, $n = 12$ meses.

– Assim:

$$(1,03)^n = 1,4257608$$

O fator $(1 + i)^n$, para $i = 3\%$ e $n = 12$, é 1,4257608.

Logo, o valor de n é 12.

Atividades

13. Calcule o montante de uma aplicação de R\$ 1.000 a 4% a.m., capitalizado mensalmente, durante 5 meses.

14. Um capital de R\$ 10.000 foi investido numa caderneta de poupança em regime de capitalização, que paga um juro mensal de 0,85%. Qual o valor que o investidor encontrará no extrato da caderneta ao final de 2 anos?

15. Calcule o montante de um capital de R\$ 2.500 aplicado a uma taxa de juro composto de 2% a.m. durante 9 meses.

16. Determine o capital que, investido a juro composto de 3% a.m. durante 4 meses, produziu um montante de R\$ 6.000.

17. Um cliente abriu uma caderneta de poupança, onde depositou R\$ 2.000. Nos quatro primeiros meses, essa poupança pagou 1,1%, 0,9%, 1,2% e 1,0% de juros, sucessivamente. Qual o montante produzido ao final do quarto mês?

18. Um lote é posto à venda por R\$ 50.000 de entrada e R\$ 200.000 em 10 anos. Como opção, o vendedor pede R\$ 250.000 à vista. Se a taxa de juros (compostos) de mercado é de 2% a.m., qual a melhor alternativa?

Resumo

Cálculo de juros simples

$$J = C \cdot i \cdot n$$

C : capital inicial; J : juro simples;

i : taxa de juros; n : número de períodos

Cálculo do montante no sistema de juros simples

$$M = C(1 + i \cdot n)$$

Desconto comercial simples

$$D_c = N \cdot i \cdot n$$

N : valor nominal; i : taxa de desconto;

n : períodos antes do vencimento

Valor descontado

$$V_c = N(1 - i \cdot n)$$

Cálculo do montante no sistema de juros compostos

$$M = C(1 + i)^n$$



AdobeStock

Avalie o que aprendeu

1. No primeiro dia do mês, um investidor aplica uma certa quantia. No segundo dia, o investidor aplica o dobro da quantia aplicada no primeiro dia. No terceiro dia, aplica o triplo da quantia aplicada no primeiro dia, e assim sucessivamente. Ao fim de 20 dias, a quantia total aplicada foi de R\$ 6.300. Então, a quantia aplicada no primeiro dia foi de:

- a) R\$ 15
- b) R\$ 30
- c) R\$ 20
- d) R\$ 25
- e) R\$ 35

2. Um eletrodoméstico está a venda por R\$ 1.200 em três pagamentos: R\$ 400 de entrada, R\$ 400 um mês depois e R\$ 400 dois meses depois. Para pagamento à vista, o comerciante dá um desconto de 20%. Supondo que a inflação tenha se estabilizado em 20% ao mês e que, mantendo o dinheiro no banco, o comprador ganhe correção mensal, nesse caso:

- a) O plano parcelado é mais vantajoso.
- b) O plano à vista é mais vantajoso.
- c) Nenhum dos planos tem vantagem sobre o outro.
- d) O plano parcelado só é vantajoso se forem comprados 2 produtos.
- e) O plano à vista só é vantajoso se forem comprados 2 produtos.

3. Se os preços aumentam 10% ao mês, qual a porcentagem de aumento em um trimestre?

- a) 1,1%
- b) 3,1%
- c) 11,8%
- d) 25,8%
- e) 33,1%

4. Bancos costumam fazer propagandas do tipo: "Aplique hoje R\$ 2.000 e receba R\$ 4.120 daqui a 5 meses". Qual é a taxa mensal de juros que um banco que faz essa propaganda aplica sobre o valor investido?

- a) 4,12% a. m
- b) 8,24% a. m
- c) 11,11% a. m
- d) 14,44% a. m
- e) 15,55% a. m

5. Um investidor aplicou no mercado financeiro um capital de R\$ 300.000 a juros compostos de 4,5% a.m. durante 3 meses. O montante, ele reaplicou a 6% a.m. No final da operação, ele obteve um montante de R\$ 730.000. Qual foi o período total em que o capital esteve aplicado?

- a) 8 dias
- b) 16 dias
- c) 8 meses
- d) 16 meses
- e) 32 meses

6. (Fuvest-SP) Um comerciante deu um desconto de 20% sobre o preço de venda de uma mercadoria e, mesmo assim, conseguiu um lucro de 20% sobre o preço que pagou pela mesma. Se o desconto não fosse dado, seu lucro, em porcentagem, seria:

- a) 40%
- b) 45%
- c) 50%
- d) 55%
- e) 60%

7. (Unesp-SP) Um advogado contratado por Marcos consegue receber 80% de uma causa avaliada em R\$ 200.000 e cobra 15% da quantia recebida a título de honorários. A quantia, em reais, que Marcos receberá, descontada a parte do advogado, será de:

- a) 24.000
- b) 30.000
- c) 136.000
- d) 160.000
- e) 184.000

8. (FGV-SP) Um aparelho de TV é vendido por R\$ 1.000 em dois pagamentos iguais, sem acréscimo, sendo o 1º como entrada e o 2º um mês após a compra. Se o pagamento for feito à vista, há um desconto de 4% sobre o preço de R\$ 1.000. A taxa mensal de juros simples do financiamento é aproximadamente igual a:

- a) 8,7%
- b) 7,7%
- c) 6,7%
- d) 5,7%
- e) 4,7%

9. (Unifesp-SP) Com relação à dengue, o setor de vigilância sanitária de um determinado município registrou o seguinte quadro, quanto ao número de casos positivos:

- em fevereiro, relativamente a janeiro, houve um aumento de 10% e
- em março, relativamente a fevereiro, houve uma redução de 10%.

Em todo o período considerado, a variação foi de:

- a) – 1%
- b) – 0,1%
- c) 0%
- d) 0,1%
- e) 1%

10. (Unifesp-SP) Uma empresa brasileira tem 30% de sua dívida em dólares e os restantes 70% em euros. Admitindo-se uma valorização de 10% do dólar e uma desvalorização de 2% do euro, ambas em relação ao real, pode-se afirmar que o total da dívida dessa empresa, em reais:

- a) aumenta 8%.
- b) aumenta 4,4%.
- c) aumenta 1,6%.
- d) diminui 1,4%.
- e) diminui 7,6%.

11. (UFV-MG) Uma pessoa deposita uma quantia em dinheiro na caderneta de poupança. Sabendo-se que o montante na conta, após t meses, é dado por $M(t) = c \cdot 2^{0,01t}$, em que C é uma constante positiva, o tempo mínimo para duplicar a quantia depositada é:

- a) 6 anos e 8 meses.
- b) 7 anos e 6 meses.
- c) 8 anos e 4 meses.
- d) 9 anos e 3 meses.
- e) 10 anos e 2 meses.

12. (PUC-RS) A cada balanço anual, uma firma tem apresentado um aumento de 10% de seu capital. Considerando Q_0 o seu capital inicial, a expressão que fornece esse capital C ao final de cada ano (t) em que essas condições permanecerem é:

- a) $C = Q_0 (1,1)^t$
- b) $C = C (1,1)^t$
- c) $C = Q_0 (0,1)^t$
- d) $C = C (0,1)^t$
- e) $C = Q_0 (10)^t$

13. (EEAR-SP) Para obter-se um total de R\$ 22.800,00 ao final de 1 ano e 2 meses, à taxa de 12% ao ano, a juros simples, é necessário que se aplique:

- a) R\$ 10.000,00
- b) R\$ 12.000,00
- c) R\$ 15.000,00
- d) R\$ 20.000,00

14. (CN-RJ) Se uma pessoa aplica somente $2/5$ de seu capital em letras durante 90 dias, à taxa de 2,5% ao mês (juros simples) e recebe R\$ 9.600,00 de juros, então seu capital é de:

- a) R\$ 128.000,00
- b) R\$ 240.000,00
- c) R\$ 320.000,00
- d) R\$ 400.000,00
- e) R\$ 960.000,00

15. (CEF-DF) Um capital de R\$ 15.000,00 foi aplicado a juro simples à taxa bimestral de 3%. Para que seja obtido um montante de R\$ 19.050,00, o prazo dessa aplicação deverá ser de:

- a) 1 ano e 10 meses
- b) 1 ano e 9 meses
- c) 1 ano e 8 meses
- d) 1 ano e 6 meses
- e) 1 ano e 4 meses

16. (Escreva-TAC-SP) Um capital de R\$ 23.000,00 foi aplicado durante 4 meses a uma taxa mensal de juro simples de 3%. Vencida essa aplicação, apenas os juros obtidos foram reaplicados a uma taxa de juro simples de 3,5% durante 3 meses. Nesta reaplicação, o investidor obteve de juro a quantia de:

- a) R\$ 289,80
- b) R\$ 288,90
- c) R\$ 290,00
- d) R\$ 279,80
- e) R\$ 299,80

17. (TRT-RJ) Em um boleto bancário consta o pagamento de R\$ 70,00 a ser efetuado até o vencimento. Sabendo-se que após o vencimento é cobrado 0,5 % de juros simples por dia de atraso, acrescido de multa de R\$ 5,00, se esse pagamento for efetuado com 15 dias de atraso, a quantia a ser paga deverá ser de:

- a) R\$ 80,25
- b) R\$ 127,50
- c) R\$ 75,25
- d) R\$ 75,35
- e) R\$ 82,50

18. (Enem-MEC) João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é de R\$ 21.000,00, e esse valor não será reajustado nos próximos meses. Ele tem R\$ 20.000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro.

Para ter o carro, João deverá esperar

- a) dois meses, e terá a quantia exata.
- b) três meses, e terá a quantia exata.
- c) três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R\$ 225,00.
- d) quatro meses, e terá a quantia exata.
- e) quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R\$ 430,00.





Adobestock

Os códigos de barras são sequências numéricas usadas para identificar produtos. Esses códigos são lidos por computador. Podemos presenciar isso sendo feito nas compras em um supermercado, por exemplo.

Capítulo 2

Sistemas lineares, matrizes e determinantes

Os primeiros exemplos de sistemas lineares são encontrados nos registros de antigas civilizações por volta de 2000 a.C. Ao final do século XVIII, foram desenvolvidos métodos de resolução de sistemas lineares baseados em tabelas numéricas formadas pelos coeficientes das equações que compunham esses sistemas. Essas tabelas numéricas deram origem ao que hoje denominamos de matrizes e determinantes, que, além de serem aplicadas ao estudo dos sistemas lineares, possibilitaram o desenvolvimento de novos ramos da Matemática.

Neste capítulo, vamos começar estudando os sistemas lineares, as matrizes e os determinantes.

Equações lineares

Equação linear é toda equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = k$$

em que:

- $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as incógnitas da equação;
- $a_1, a_2, \dots, a_n$ são números reais denominados coeficientes da equação;
- k é um número real chamado termo independente da equação.

É importante salientar que toda equação linear tem incógnitas de primeiro grau, isto é, os expoentes das incógnitas são iguais a 1. Observe os exemplos de equações lineares:

- $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$ tem coeficientes 2, 3 e -1 e termo independente 7;
- $4x - 3y + z - 2t = \sqrt{3}$ tem coeficientes 4, -3, 1 e -2 e termo independente $\sqrt{3}$;
- $3x + y = 0$ tem coeficientes 3 e 1 e termo independente 0.

Sempre que o termo independente de uma equação linear é zero, ela é chamada de equação linear homogênea.

Toda sequência ordenada de números reais que verifica uma equação linear é chamada de solução da equação. Assim, uma sequência $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ será solução da equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = k$ se ocorrer $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \dots + a_n\alpha_n = k$.

Observe alguns exemplos de soluções e note que uma mesma equação linear pode ter mais de uma solução:

- $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$ tem como uma de suas soluções a terna $(2, 1, 0)$, pois:

$$2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 0 = 7 \Rightarrow 7 = 7$$

Já a terna $(1, 2, 1)$ também é solução desta equação, pois:

$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 1 = 7 \Rightarrow 7 = 7$$

- $4x - 3y + z - 2t = \sqrt{3}$ tem como uma de suas soluções $(1, 0, \sqrt{3}, 2)$, pois:

$$4 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + \sqrt{3} - 2 \cdot 2 = 4 - 0 + \sqrt{3} - 4 = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

As quádruplas $(0, 0, \sqrt{3}, 0)$, $\left(0, 0, 2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0)$ também são soluções, pois satisfazem a equação linear;

Atividades resolvidas

R1. Verifique se a equação linear homogênea $x + y + z + t = 0$ admite como soluções as quádruplas $(-1, 1, -1, 1)$ e $(-2, 2, -2, 2)$, além da trivial. Depois escreva uma quádrupla genérica, em função do parâmetro $m \in \mathbb{R}$.

Resolução

As quádruplas $(-1, 1, -1, 1)$ e $(-2, 2, -2, 2)$ satisfazem a equação, pois $-1 + 1 - 1 + 1 = 0$ e $-2 + 2 - 2 + 2 = 0$.

Uma quádrupla genérica que represente parte das soluções da equação $x + y + z + t = 0$ pode ser expressa em função de $m \in \mathbb{R}$ como $(m, -m, m, -m)$. Essa quádrupla representa um subconjunto do conjunto de soluções para a equação.

R2. Dada a equação $x - 3y - z = 4$, determine p de modo que $(0, 0, p)$ seja solução da equação.

Resolução

Substituindo $0, 0$ e p em x, y e z , temos, respectivamente:

$$0 - 3 \cdot 0 - p = 4 \Rightarrow -p = 4 \Rightarrow p = -4$$

Atividades

1. Verifique quais das ternas seguintes são soluções da equação linear $x + y - 2z = 2$:

a) $(1, 2, 4)$ _____ c) $(-3, -5, 3)$ _____

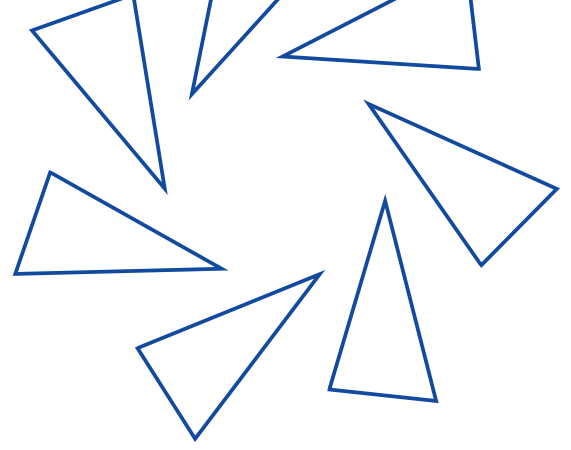
b) $\left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$ _____ d) $(0, 0, 0)$ _____

2. Dada a equação $2x - 2y - 4z = 4$, determine p de modo que cada uma das ternas seja solução da equação:

a) $(0, 0, p)$ _____ c) $(p + 1, 3, 0)$ _____

b) $(1, -2p, 1)$ _____ d) $(p, p, p + 5)$ _____

Sistema de equações lineares



Um sistema de equações lineares $m \times n$ é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

em que:

• $x_1, x_2, \dots, x_n$ são incógnitas;

$$\left. \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\} \text{ são coeficientes numéricos;}$$

• $b_1, b_2, \dots, b_m$ são termos independentes.

Observe os exemplos de sistemas lineares:

1.
$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Esse é um sistema linear 2×2 , pois é formado por duas equações lineares com incógnitas x e y .

2.
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$$

Nesse caso, temos um sistema linear 3×3 , com três equações lineares e três incógnitas x , y e z .

3.
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

Aqui temos um caso de sistema linear do tipo 2×3 , pois tem apenas duas equações e três incógnitas x , y e z .

$$4. \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$$

Já esse sistema é do tipo 3×3 , pois é formado por 3 equações lineares e 3 incógnitas e como suas equações lineares são todas homogêneas, o sistema é denominado sistema linear homogêneo.

Todo sistema linear do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

é denominado sistema linear homogêneo do tipo $m \times n$.

Denominamos solução do sistema linear toda sequência ordenada de números reais que verifica, simultaneamente, todas as equações do sistema. Dessa forma, resolver um sistema significa encontrar todas as sequências ordenadas de números reais que satisfaçam as equações do sistema.

Um sistema linear pode ser classificado de acordo com o número de soluções que admitir. Considerando esse critério, existem três classes de sistemas lineares:

- os possíveis e determinados, para os quais existe uma única solução;
- os possíveis e indeterminados, que têm infinitas soluções;
- os sistemas impossíveis, para os quais não existe solução.

Acompanhe alguns exemplos de classificações de sistemas de equações lineares:

- O par ordenado $(2, 1)$ é solução do sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$, pois $\begin{cases} 2 + 1 = 3 \\ 2 - 1 = 1 \end{cases}$

Como não existe outro par que satisfaça simultaneamente as duas equações, dizemos que esse sistema é **possível e determinado**, pois possui uma única solução.

- As ternas $(1, 1, 1)$ e $\left(0, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ são algumas das infinitas soluções do sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}, \text{ pois } \begin{cases} 1 + 1 + 1 = 3 \\ 1 - 1 + 2 = 2 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 0 + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3 \\ 0 - \frac{4}{3} + \frac{10}{3} = 2 \end{cases}.$$

Por essa razão, esse sistema é **possível e indeterminado**.

- Para o sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$, não existe um par de números reais que satisfaça simultaneamente as equações. Logo, o sistema não tem solução, portanto é impossível.

Atividades

3. Escreva em seu caderno quais sistemas são lineares:

a)
$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x \cdot y = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

4. Verifique se a terna (0, 1, 1) é solução dos sistemas:

a)
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x - y - z = -2 \\ x - y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

Sistema escalonado

Sistema linear escalonado é todo sistema no qual as incógnitas das equações lineares estão escritas em uma mesma ordem e o 1º coeficiente não nulo de cada equação está à direita do 1º coeficiente não nulo da equação anterior.

Observe os exemplos a seguir.

1. Neste exemplo, o sistema 2×2 é escalonado. Note que a primeira equação tem dois coeficientes não nulos; a segunda tem apenas um.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3y = 6 \end{cases}$$

2. Neste caso, o sistema é do tipo 3×3 e também está escalonado. A primeira equação tem três coeficientes não nulos, a segunda, dois, e a terceira, apenas um.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ y + z = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

3. Este sistema, apesar de ser do tipo 2×3 , também é escalonado.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ y - z = 3 \end{cases}$$

A partir da definição, pode-se concluir que em todo sistema escalonado, o número de equações é sempre igual ou menor que o número de incógnitas.

Resolução de um sistema escalonado

Para se resolver um sistema escalonado com m equações e n incógnitas, devemos considerar dois casos:

Número de equações (m) = Número de incógnitas (n)

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & k_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & k_2 \\ & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{nn}x_n & = & k_n \end{array} \right.$$

Para se chegar à solução desse sistema, parte-se da última equação, que fornece diretamente o valor de x_n e, por substituição nas equações anteriores, obtêm-se os valores de $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2$ e x_1 .

Número de equações (m) < número de incógnitas (n)

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & k_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & k_2 \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & a_{mj}x_j & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & k_n \end{array} \right.$$

Para se resolver esse tipo de sistema, procede-se da seguinte forma:

- 1) identificam-se as variáveis que não iniciam equações (variáveis livres);
- 2) transpõem-se as variáveis livres para o segundo membro de cada equação e atribuem-se a elas valores reais arbitrários.

Com esse procedimento, obtêm-se um sistema em que o número de equações é igual ao número de incógnitas, que pode ser resolvido por substituições sucessivas. Acompanhe os exercícios resolvidos.

Atividades resolvidas

R3. Resolva e classifique o sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 5 \text{ (I)} \\ y + z = 3 \text{ (II)} \\ z = 1 \text{ (III)} \end{array} \right.$$

Resolução

Da equação (III), temos $z = 1$. Substituindo o valor de z na equação (II), obtemos y :

$$y + 1 = 3 \Rightarrow y = 2$$

Substituindo z e y em (I), obtemos x :

$$x + 2 + 2 \cdot 1 = 5 \Rightarrow x = 1$$

A única solução do sistema é a terna $(1, 2, 1)$. Logo, esse sistema é possível e determinado.

Atividades

5. Escreva em seu caderno quais são os sistemas escalonados:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 3y + z = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

6. Indique, se houver, as variáveis livres nos sistemas:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ y + z + t = 2 \\ z - t = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z + 2t = 3 \\ y - 2z + 3t = 1 \end{cases}$$

Escalonamento e resolução de um sistema linear

Dado um sistema linear S , pode-se obter um sistema escalonado que seja equivalente a S . Dizemos que dois sistemas lineares são equivalentes quando toda solução de um for também solução do outro e vice-versa. Por exemplo, os sistemas:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

são equivalentes, pois ambos têm como única solução o par $(2, 1)$.

Podemos transformar qualquer sistema linear em um outro equivalente pelas seguintes transformações elementares, realizadas com suas equações:

- trocar as posições de duas equações do sistema;
- multiplicar uma equação do sistema por um número real não nulo;
- somar a uma equação do sistema uma outra multiplicada por um número real.

Para resolvermos sistemas lineares por escalonamento, procuramos obter sistemas equivalentes, utilizando tantas transformações lineares quantas forem necessárias, até encontrarmos um sistema escalonado.

Atividades resolvidas

R4. Resolva o sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 4y = 6 \end{cases}$.

Resolução

Inicialmente, trocamos a posição das equações, pois é conveniente ter coeficiente igual a 1 na primeira equação.

$$\begin{cases} x + 4y = 6 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Depois, eliminamos a incógnita x da segunda equação. Para tanto, multiplicamos a primeira equação por -2 e a adicionamos à segunda equação.

$$\begin{cases} x + 4y = 6 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \cdot (-2) \\ + \end{matrix}} \begin{cases} x + 4y = 6 \\ -7y = -7 \end{cases}$$

Da segunda equação, temos $y = 1$.

Substituindo $y = 1$ na primeira equação, obtemos $x = 2$.

O par $(2, 1)$ é a única solução do sistema. Portanto, o sistema é possível e determinado.

R5. Resolva, se possível, o sistema $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$.

Resolução

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} \cdot (-3) \\ + \end{matrix}} \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0y = -12 \end{cases}$$

Note que a equação $0y = -12$ não possui solução: não existe número que, multiplicado por zero, dê -12 . Quando ocorrer, durante o escalonamento, uma equação desse tipo, o sistema será impossível.

Atividades

7. Escalone os seguintes sistemas lineares:

$$a) \begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

8. Classifique os seguintes sistemas em possível determinado (SPD), possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI):

$$a) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - z = 5 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ z - t = 1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 4 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y + z = 3 \\ 0z = 4 \end{cases}$$

9. Escalone e classifique os seguintes sistemas:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 4 \\ 3x + 2y - 2z = 5 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

Discussão sobre um sistema linear

Discutir sobre sistema linear significa analisar as possibilidades de solução em função de valores que podem ser atribuídos a alguns de seus parâmetros. Assim, após o escalonamento do sistema, deve-se considerar para quais valores dos parâmetros pode-se ter um sistema possível e determinado, um sistema possível e indeterminado ou um sistema impossível.

Atividades resolvidas

R6. Discuta, em função do parâmetro a , o sistema:
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + ay = 6 \end{cases}$$

Resolução

Inicialmente, escalonamos o sistema efetuando as transformações lineares indicadas:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + ay = 6 \end{cases} \xrightarrow[\substack{\cdot (-2) \\ +}]{}$$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ (a - 2)y = -2 \end{cases}$$

1) Se $a - 2 \neq 0$, então $y = -\frac{2}{a - 2} = \frac{2}{2 - a}$. Substituindo na primeira equação, achamos x (também em função de a):

$$x + y = 4 \Rightarrow x + \frac{2}{2 - a} = 4$$

$$x = 4 - \frac{2}{2 - a} = \frac{8 - 4a - 2}{2 - a} = \frac{6 - 4a}{2 - a}$$

Então:

Para cada $a \neq 2$, o par $\left(\frac{6 - 4a}{2 - a}, \frac{2}{2 - a}\right)$ é solução da equação. Note que essa solução depende de a , mas para cada a fixado, ela é única. Portanto, para $a \neq 2$, o sistema é possível e determinado.

2) Se $a - 2 = 0$, (ou seja, $a = 2$), temos na segunda equação $(a - 2)y = -2$, ou seja, $0 \cdot y = -2$, o que é impossível. Logo, para $a = 2$, o sistema é impossível (não existem valores de x e y que satisfaçam simultaneamente as duas equações).

Resumindo, temos:

1) $a \neq 2 \Rightarrow$ **sistema possível e determinado**, com soluções $x = \frac{6 - 4a}{2 - a}$ e $y = \frac{2}{2 - a}$

2) $a = 2 \Rightarrow$ **sistema impossível**

R7. Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo a se admitir apenas a solução trivial para o sistema homogêneo:

$$\begin{cases} 3x - my = 0 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} 3x - my = 0 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases} \xrightarrow{+} \cdot (-2)$$

$$\begin{cases} 3x - my = 0 \\ (2m + 2)y = 0 \end{cases}$$

Para que o sistema admita apenas a solução trivial, ele deve ser possível e determinado. Para isso:

$$2m + 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$$

$$S = \{m \in \mathbb{R} \mid m \neq -1\}$$

Atividades

10. Discuta os sistemas nas incógnitas x e y .

$$a) \begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - 5y = a \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} ax + y = 2 \\ x - y = 1 + b \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - ay = 5 \\ 4x + 2y = a \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3x + y = b \\ (a + 1)x + 2y = -1 \end{cases}$$

11. Discuta os sistemas lineares nas incógnitas x , y e z .

$$a) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 7x + y - 3z = 10 \\ 4x + y + kz = p \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + py + z = 1 \\ 2x + 3y - z = q \\ x + y - 4z = 2 \end{cases}$$

12. Resolva e classifique os sistemas lineares homogêneos:

a)
$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

13. Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo que os sistemas homogêneos a seguir admitam apenas a solução trivial:

a)
$$\begin{cases} 4x + my = 0 \\ 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 2my = 0 \\ 2x - 6y = 0 \end{cases}$$

Matrizes

Denomina-se matriz toda tabela retangular de valores dispostos ordenadamente em linhas e colunas. As matrizes são indicadas por letras maiúsculas do alfabeto latino e representadas utilizando-se parênteses ou colchetes.

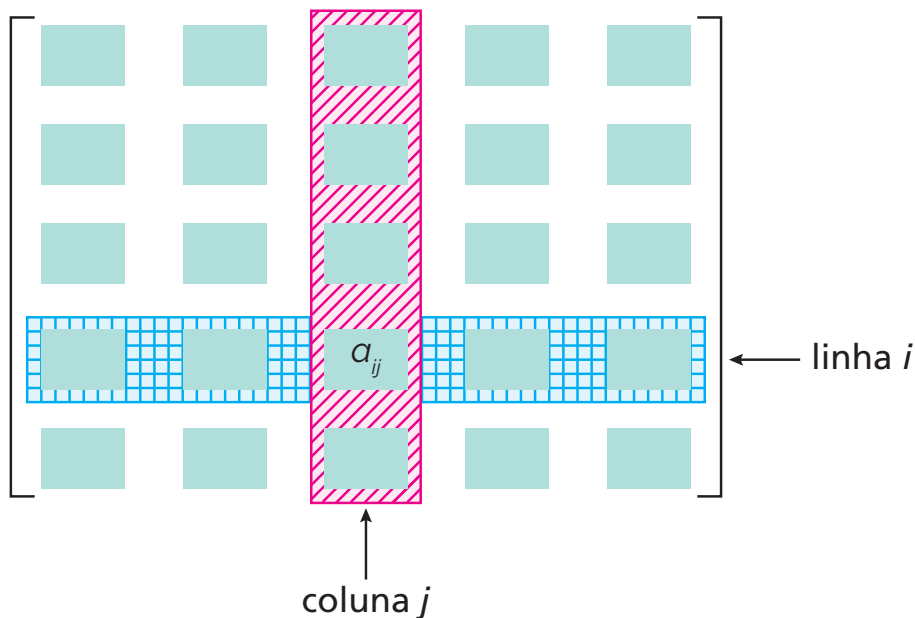
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 45 & 31 & 24 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 8,2 & 1,5 & 9,3 & 0 \\ 6,5 & 0 & 9,4 & 7,2 \end{bmatrix}$$

Um elemento genérico de uma matriz A é simbolizado por a_{ij} , em que i indica a linha, e j , a coluna a que o elemento pertence.



Na matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 5 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, temos:

$a_{11} = 6$, linha 1 e coluna 1

$a_{12} = 7$, linha 1 e coluna 2

$a_{13} = 2$, linha 1 e coluna 3

$a_{14} = 8$, linha 1 e coluna 4

$a_{21} = 1$, linha 2 e coluna 1

$a_{22} = 3$, linha 2 e coluna 2

$a_{23} = 2$, linha 2 e coluna 3

$a_{24} = 6$, linha 2 e coluna 4

$a_{31} = 5$, linha 3 e coluna 1

$a_{32} = 5$, linha 3 e coluna 2

$a_{33} = 7$, linha 3 e coluna 3

$a_{34} = 8$, linha 3 e coluna 4

A matriz A é constituída por três linhas e quatro colunas. Por essa razão, é denominada matriz do tipo 3×4 .

Uma matriz genérica do tipo $m \times n$ é representada assim:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Essa matriz $m \times n$ possui $m \cdot n$ elementos. Podemos também expressá-la de forma mais reduzida, por meio de uma lei de formação para seus elementos:

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ | lei de formação, com

$i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Atividades resolvidas

R8. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que $a_{ij} = i + j$.

Resolução

Como a matriz é do tipo 2×2 , ela possui duas linhas e duas colunas, ou seja, quatro elementos assim dispostos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Cada um de seus elementos pode ser calculado pela lei de formação:

$$a_{ij} = i + j \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 + 1 = 2 \\ a_{12} = 1 + 2 = 3 \\ a_{21} = 2 + 1 = 3 \\ a_{22} = 2 + 2 = 4 \end{cases}$$

$$\text{Logo, a matriz é: } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

R9. Determine a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Resolução

A matriz A do tipo 2×2 é: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Seus elementos obedecem à lei: $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

Assim, temos: $a_{11} = 1$, pois $i = j$.

$$a_{12} = 0, \text{ pois } i \neq j$$

$$a_{21} = 0, \text{ pois } i \neq j$$

$$a_{22} = 1, \text{ pois } i = j$$

Logo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Atividades

14. Identifique o tipo de cada uma das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) $B = (1 \ 5 \ -3)$

d) $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

15. Determine quantos elementos possui uma matriz do tipo:

a) 1×6

c) 3×3

b) 4×1

d) 3×5

16. É dada a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & -7 \\ \sqrt{2} & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

Identifique os elementos da:

a) 1ª linha

c) 4ª linha

b) 3ª coluna

d) 2ª coluna

17. Considere a matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Determine o valor dos seguintes elementos:

a) b_{11}

d) b_{23}

b) b_{21}

e) b_{32}

c) b_{12}

f) b_{22}

18. Uma matriz possui quatro elementos. Quais os tipos possíveis para essa matriz?

19. Determine a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ tal que:

a) $a_{ij} = i + 2j$

c) $a_{ij} = 2i - j$

b) $a_{ij} = i^2 + j$

d) $a_{ij} = j - 2i$

20. Determine a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que:

$$a) a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i = j \\ 1, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

$$b) a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ -1, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

21. Dada a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

determine a soma dos elementos a_{ij} , tais que:

$$a) i + j = 4$$

$$b) i + j = 3$$

Tipos de matrizes

Algumas matrizes recebem nomes especiais em função de suas características:

Matriz linha

É toda matriz do tipo $1 \times n$ ($n \in \mathbb{N}$).

$$A = [a_{11} \dots a_{12} \dots a_{13} \dots a_{1n}]$$

Observe os exemplos:

$$A = [4, -2 \ 0]_{1 \times 3}$$

$$B = [2 \ 1 \ 0 \ 9]_{1 \times 4}$$

Matriz coluna

É toda matriz do tipo $m \times 1$ ($m \in \mathbb{N}$).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

$$\text{As matrizes } M = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \text{ e } N = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ k \end{bmatrix}$$

são exemplos de matrizes coluna, respectivamente do tipo 3×1 e 4×1 .

Matriz quadrada

É toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas. Assim, chamamos matriz quadrada de ordem n toda matriz do tipo $n \times n$.

Observe, como exemplo, que as matrizes

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

são matrizes quadradas de ordem 2 e 3, respectivamente.

Toda matriz quadrada possui duas diagonais:

- a principal, composta por elementos a_{ij} , tais que $i=j$, isto é, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, \dots, a_{nn}$;
- a secundária, em que os elementos a_{ij} são tais que $i+j = n+1$, ou $a_{1n}, a_{2, n-1}, a_{3, n-2}, \dots, a_{n1}$.

Veja como são as diagonais de uma matriz quadrada do tipo 3×3 :

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \text{diagonal secundária} \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{diagonal principal} \end{array} \end{array}$$

Matriz nula

É toda matriz do tipo $m \times n$ cujos elementos são todos nulos. Para indicar uma matriz nula, utiliza-se a notação $O_{m \times n}$. Observe os exemplos de matrizes nulas de tipos 2×2 e 3×2 :

$$O_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } O_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal

É toda matriz quadrada em que os elementos não pertencentes à diagonal principal são

todos nulos. Por exemplo, $K = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ são matrizes diagonais de 2ª e 3ª ordem, respectivamente.

Matriz identidade

É toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Para indicar uma matriz identidade de ordem n , utilizamos a notação I_n .

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são exemplos de matrizes identidades de 2ª e 3ª ordem, respectivamente.

Atividades resolvidas

R10. Determine x e y para que a matriz A seja diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x - 2y \\ y - 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolução

Os elementos não pertencentes à diagonal principal devem ser nulos.

Assim, $x - 2y = 0$ e $y - 1 = 0$

$$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

Substituindo $y = 1$ em $x - 2y = 0$, temos $x = 2$.

Atividades

22. Escreva os elementos da diagonal principal e os da diagonal secundária das matrizes quadradas:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

23. Quantos elementos tem uma matriz quadrada de ordem 5?

24. Quantos elementos nulos tem a matriz identidade de ordem 4?

25. Em uma matriz quadrada de ordem n , quantos elementos não pertencem à diagonal secundária?

26. Escreva as matrizes:

a) I_3

b) $O_{2 \times 3}$

27. Determine x e y para que a matriz A seja diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3x - 2y \\ y + 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Operações com matrizes

Para que seja possível aplicar o conceito de matrizes em diversas situações de resolução de problemas práticos, é necessário que sejam definidos os processos de operações com matrizes.

Transposição de uma matriz

Dada uma matriz A do tipo $m \times n$, chama-se transposta de A e indica-se por A^t a matriz que se obtém trocando-se ordenadamente as linhas pelas colunas de A . A operação de obtenção de uma matriz transposta de A é denominada transposição da matriz A . Observe o exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Note que A é do tipo 3×2 e A^t é do tipo 2×3 e que, na matriz transposta, a primeira linha corresponde à primeira coluna da matriz original, e a segunda linha corresponde à segunda coluna, também da matriz original.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes, A e B , serão iguais se forem do mesmo tipo e se os elementos correspondentes forem iguais. Assim, se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são matrizes do tipo $m \times n$, então:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$$

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 - 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 + 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, por exemplo, são iguais, pois ambas são do tipo 2×2 e os elementos correspondentes são iguais.

Atividades resolvidas

R11. Verifique se as matrizes $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, tal que $a_{ij} = i - j$, e $B = (b_{ij})_{2 \times 2}$, tal que $b_{ij} = \frac{3(i - j)}{i + j}$, são iguais.

Resolução

Para verificarmos se $A = B$, vamos calcular os elementos das duas matrizes e, depois, compará-los.

Matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$

$$a_{11} = 1 - 1 \Rightarrow a_{11} = 0$$

$$a_{12} = 1 - 2 \Rightarrow a_{12} = -1$$

$$a_{21} = 2 - 1 \Rightarrow a_{21} = 1$$

$$a_{22} = 2 - 2 \Rightarrow a_{22} = 0$$

Matriz $B = (b_{ij})_{2 \times 2}$

$$b_{11} = \frac{3(1 - 1)}{1 + 1} \Rightarrow b_{11} = 0$$

$$b_{12} = \frac{3(1 - 2)}{1 + 2} \Rightarrow b_{12} = -1$$

$$b_{21} = \frac{3(2 - 1)}{2 + 1} \Rightarrow b_{21} = 1$$

$$b_{22} = \frac{3(2 - 2)}{2 + 2} \Rightarrow b_{22} = 0$$

Como os elementos correspondentes são iguais nas duas matrizes, podemos dizer que elas são iguais.

R12. Chama-se matriz simétrica toda matriz quadrada que é igual à sua transposta. Determine x e y para que a matriz M seja simétrica.

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & x \\ 2y & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Resolução

Sendo $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & x \\ 2y & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, temos $M_t = \begin{bmatrix} 3 & 2y & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ x & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Comparando os elementos de M com os de M^t , temos:

$$M = M^t \Rightarrow \begin{cases} 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\ x = 3 \end{cases}$$

Atividades

28. Construa a matriz transposta de:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

b) $C = [-3 \ 4 \ 0 \ 1]$

29. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, encontre:

a) A^t

b) $(A^t)^t$

c) O que se pode dizer das matrizes A e de $(A^t)^t$?

30. Escreva a matriz quadrada de ordem 2 para cada item:

a) A^t , com $A = (a_{ij}) \mid a_{ij} = i - j$

b) B^t , com $B = (b_{ij}) \mid b_{ij} = j - i$

31. Escreva a matriz $(A^t)^t$, quadrada de ordem 3, em que $A = (a_{ij})$ é dada pela lei $a_{ij} = 3j - 4i$.

32. Determine os valores de p e q , sabendo que a matriz A é simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & q \\ p & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Adição e subtração de matrizes

Dadas duas matrizes de mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, denomina-se **matriz soma** ($A + B$) a matriz obtida adicionando-se os elementos correspondentes de A e B :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}, \text{ em que } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

– Propriedades da adição:

Sendo A , B , C e O (matriz nula) matrizes de mesmo tipo e $p, q \in \mathbb{R}$, valem as propriedades:

- comutativa: $A + B = B + A$
- associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- elemento neutro: $A + O = O + A = A$

Matriz oposta

Chama-se **matriz oposta** de A a matriz $-A$, cuja soma com A resulta na matriz nula.

Tomando-se como exemplo $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, a oposta de A será $-A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$,

pois: $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Subtração de matrizes

Dadas duas matrizes de mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, denomina-se matriz diferença ($A - B$) a matriz obtida subtraindo-se os elementos correspondentes de A e B :

$$A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}, \text{ em que } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

Atividades resolvidas

R13. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, obtenha $A + B$.

Resolução

Para obter $A + B$, adicionamos os elementos de mesma posição:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 + 3 & 1 + (-2) & 3 + 1 \\ 0 + (-4) & 5 + 1 & -2 + 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 1 - 3 & 2 - 4 \\ -2 - 5 & 4 - (-3) \end{bmatrix} \Rightarrow B - A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}$$

Note que $A - B \neq B - A$ e que $A - B$ e $B - A$ são matrizes opostas.

Multiplicação de número real por matriz

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e um número real k , denomina-se produto do real k por A a matriz obtida multiplicando-se cada um dos elementos de A por k .

$$k \cdot A = (k \cdot a_{ij})_{m \times n}, \text{ em que } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n$$

Observe, como exemplo, a determinação da matriz $3A$ a partir de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$:

$$3A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 0 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

– Propriedades da multiplicação de número real por matriz:

Sendo A, B, C e O (matriz nula) matrizes de mesmo tipo, valem as propriedades:

- $1 \cdot A = A$
- $(-1) \cdot A = -A$
- $p \cdot O = O$
- $O \cdot A = O$
- $p \cdot (A + B) = p \cdot A + p \cdot B$
- $(p + q) \cdot B = p \cdot B + q \cdot B$
- $p \cdot (q \cdot A) = (p \cdot q) \cdot A$

Atividades resolvidas

R14. Dadas as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix},$$

determine a matriz X tal que $X + A = 2B - C$.

Resolução

$$X + A = 2B - C \Rightarrow X = 2B - C - A$$

Cálculo de $2B$:

$$2B = 2 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $X = 2B - C - A$:

$$X = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$X = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$$

R15. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, tal que $a_{ij} = 2i - j$, e $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, tal que $b_{ij} = 3i + 2j$, escreva a lei de formação da matriz $C = A + B$.

Resolução

$$\text{Se } C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\text{Logo: } c_{ij} = 2i - j + 3i + 2j$$

$$c_{ij} = 5i + j$$

Atividades

33. São dadas as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encontre a matriz X em cada caso:

a) $X - A - B = C$

b) $X - 2A = 3B - 4C$

c) $X + A = B - C$

34. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$.

a) Determine A^t e B^t .

c) Encontre $(A + B)^t$

b) Encontre $A^t + B^t$.

d) Compare $(A + B)^t$ e $A^t + B^t$.

35. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, tal que $a_{ij} = i - 2j$, e $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, tal que $b_{ij} = 2i + 3j$, escreva a lei de formação das matrizes:

a) $C = A + 2B$

c) $E = 2A + 3B$

b) $D = A - B$

d) $F = 2(B - A)$

36. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, determine as matrizes X e Y :

a) $\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$

b) $\begin{cases} X + Y = A + 2B \\ X - 2Y = 2A + B \end{cases}$

Multiplicação de matrizes

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{jk})$, de tipos $m \times n$ e $n \times p$, respectivamente, pode-se obter a matriz produto $C = A \cdot B$, do tipo $m \times p$. Para que o produto $A \cdot B$ seja possível, é necessário que o número de colunas de A seja igual ao número de linhas de B .

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Considere, por exemplo, as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

O produto $A \cdot B$ é possível, pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B , mas o produto $B \cdot A$ não é possível:

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 1} \quad B_{3 \times 1} \cdot A_{2 \times 3}$$

Cada elemento c_{ik} da matriz produto C é dado pela soma dos produtos de cada elemento da linha i de A pelo elemento correspondente da coluna k de B :

$$C = A \cdot B = (c_{ik})_{m \times p}$$

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$$

No produto de matrizes, multiplicamos cada elemento de uma linha pelo elemento correspondente de uma coluna e, em seguida, somamos esses produtos.

Considere, por exemplo, as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

É possível obter a matriz produto $C = A \cdot B$, pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B . A matriz produto C será então do tipo 2×3 :

$$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 10 \\ 0 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$

Atividades resolvidas

R16. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = A \cdot B$.

Resolução

O produto é possível, pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B . Como A e B são do tipo 2×2 , C será do tipo 2×2 . Vamos então calcular os elementos de C :

c_{11} : 1ª linha de $A \times 1$ ª coluna de B

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{11} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \Rightarrow C_{11} = 2$$

c_{12} : 1ª linha de $A \times 2$ ª coluna de B

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{12} = 2 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \Rightarrow C_{12} = 8$$

c_{21} : 2ª linha de $A \times 1$ ª coluna de B

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{21} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \Rightarrow C_{21} = 1$$

c_{22} : 2ª linha de $A \times 2$ ª coluna de B

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{22} = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \Rightarrow C_{22} = 7$$

Logo, a matriz produto será $C = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

R17. Determine a matriz X tal que $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Resolução

Inicialmente, determinamos o tipo da matriz X .

$$X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{matrix} (m \times n) & (1 \times 2) \\ \uparrow & \uparrow \\ \uparrow & \uparrow \\ & \uparrow \\ & (2 \times 2) \end{matrix}$$

A matriz X deve ser do tipo 2×1 para satisfazer a igualdade. Atribuindo-se os valores a e b aos elementos de X , temos:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 2a \\ b & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Logo, $a = 2$ e $b = 3$. Portanto, $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Atividades

37. Sendo $A_{2 \times 2}$, $B_{2 \times 4}$ e $C_{4 \times 1}$, determine o tipo das matrizes produto, se existirem:

a) $A \cdot B$

d) $A \cdot A$

b) $B \cdot C$

e) $C \cdot B$

c) $B \cdot A$

f) $C \cdot C$

38. Efetue cada um dos produtos, se existirem:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

39. São dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $A \cdot B$.

b) Calcule $B \cdot A$.

c) Compare $A \cdot B$ com $B \cdot A$.

40. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $A \cdot B$

c) B^2

b) A^2

d) $A^2 - B^2$

Nota: A^2 é o mesmo que $A \cdot A$.

41. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que $A^t \cdot X = B^t$.

Matriz inversa

Dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$, dizemos que A é invertível se existir uma matriz $B = (b_{ij})_{n \times n}$ tal que:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Nesse caso, dizemos que B é a matriz inversa de A e indicamos $B = A^{-1}$.

Vamos, como exemplo, determinar a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Para isso, consideramos $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e efetuamos $A^{-1} \cdot A = I_2$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3a + 5b & a + 2b \\ 3c + 5d & c + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a + 5b = 1 \\ a + 2b = 0 \times (-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 5b = 1 \\ -3a - 6b = 0 \end{cases} +$$

$$-b = 1 \Rightarrow b = -1 \text{ e } a = 2$$

$$\begin{cases} 3c + 5d = 0 \\ c + 2d = 1 \times (-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3c + 5d = 0 \\ -3c - 6d = -3 \end{cases} +$$

$$-d = -3 \Rightarrow d = 3 \text{ e } c = -5$$

$$\text{Logo, } A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Atividades

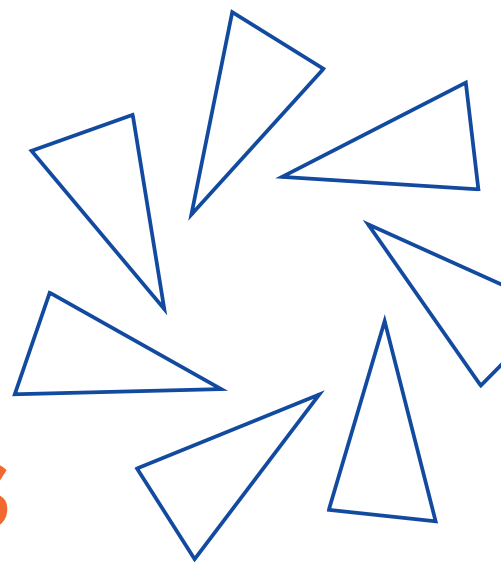
42. Determine a matriz inversa de cada uma das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

43. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que $X + A^{-1} = A^t$.

44. Calcule $(A + A^{-1})^2$, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.



Determinantes

Dada uma matriz A , quadrada de ordem n , podemos associar a ela um número real, chamado determinante da matriz A , obtido a partir de operações realizadas com seus elementos.

Para se indicar o determinante de uma matriz A , utiliza-se a abreviatura $\det A$ ou duas barras em torno dos elementos da matriz.

Notação:

$\det A$ ou $|A|$

Seja, por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Seu determinante será um número indicado por $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$.

O cálculo do determinante de uma matriz A pode ser feito por uma lei geral que estabelece as operações a serem realizadas com os elementos da matriz. Antes de estudarmos essa lei geral, vamos estabelecer regras práticas para determinantes de matrizes quadradas de ordens 1, 2 e 3.

Determinantes de matrizes de ordens 1, 2 e 3

Matriz 1×1

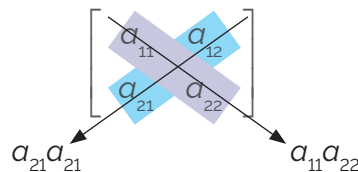
Dada a matriz $A = [a_{11}]$, o seu determinante é o próprio número a_{11} :

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}$$

Assim, para uma matriz $A = [-3]$, temos: $\det A = -3$.

Matriz 2×2

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, o seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária. Esquemáticamente:



$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

O determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, por exemplo, será:

$$\det A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 7$$

Matriz 3×3

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, o seu determinante é igual a:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Para obtermos essa soma, usamos uma regra prática denominada **regra de Sarrus**.

Acompanhe as etapas que compõem essa regra:

- Repetem-se, à direita da matriz, as duas primeiras colunas:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- Efetuam-se os produtos dos elementos indicados, conservando-se os sinais:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

- Efetuam-se os produtos dos elementos indicados, trocando-se os sinais:

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{23}a_{32} - a_{11}a_{21}a_{33}$$

- Somam-se os produtos obtidos:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Atividades resolvidas

R18. Calcule o valor do determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução

O determinante da matriz A , quadrada de terceira ordem, é calculado pela regra de Sarrus:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

-2 0 -24 4 0 3

$$\det A = 4 + 0 + 3 - 2 - 0 - 24 \Rightarrow \det A = -19$$

R19. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, vamos calcular $2 \cdot \det A$.

Resolução

$$\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{matrix}$$

30 -2 -4 -4 -5 -12

$$\det A = -4 - 5 - 12 + 30 - 2 - 4$$

$$\det A = 3 \Rightarrow 2 \det A = 6$$

R20. Determine x tal que $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8$.

Resolução

$$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow x - 6 = 8$$

Logo, $x = 14$.

Atividades

45. Calcule o determinante das matrizes:

$$a) A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$b) B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

46. Determine x tal que:

$$a) \begin{vmatrix} 2x & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 12$$

$$b) \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

47. Calcule o determinante das matrizes:

$$a) A = (a_{ij})_{2 \times 2} \mid a_{ij} = i + 2j$$

$$b) B = (b_{ij})_{2 \times 2} \mid b_{ij} = i^2 - j$$

48. Calcule o determinante das matrizes:

$$a) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$b) D = (d_{ij})_{3 \times 3} \mid d_{ij} = 3i - 2j$$

49. Determine o valor de x para que:

$$a) \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$b) \begin{vmatrix} 2 & 1+x & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3$$

$$c) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & x & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1$$

50. Resolva as inequações em $\mathbb{R}$:

$$a) \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} \geq \begin{vmatrix} \wedge & \leq & \frac{1}{2} \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & x & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & x \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

Determinante de matrizes de ordem n

O determinante de uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$, com $n \geq 2$, pode ser obtido a partir do conceito de **cofator** de um elemento da matriz A .

Cofator

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$, chama-se **cofator** do elemento a_{ij} o número $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$, em que D_{ij} é o determinante da matriz que se obtém de A eliminando-se a linha i e a coluna j .

Na matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, vamos determinar, por exemplo, o cofator do elemento

a_{22} . Inicialmente, obtemos D_{22} eliminando a linha 2 e a coluna 2 da matriz A :

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{vmatrix} \xleftarrow{\text{linha 2}} D_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$\uparrow$
coluna 2

O cofator de a_{22} é o número $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot D_{22}$.

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-28) \Rightarrow A_{22} = -28$$

A partir do conceito de cofator, podemos enunciar a lei geral para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$, conhecida como teorema de Laplace.

Teorema de Laplace

Dada uma matriz A , quadrada de ordem $n \geq 2$, o valor de $\det A$ é o número real obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) por seus respectivos cofatores.

Assim, se considerarmos os elementos de uma linha i , podemos escrever:

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}$$

Atividades resolvidas

R21. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Resolução

Vamos calcular o determinante de A a partir dos elementos da **primeira linha**:

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$$

$$\det A = 0 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 0 \cdot (6 - 1) - 1 \cdot (2 - 2) + 2 \cdot (1 - 6) = -10$$

Atividades

51. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, calcule o cofator dos elementos:

a) a_{12}

c) a_{23}

b) a_{31}

d) a_{32}

52. Calcule o determinante das matrizes:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

53. Calcule o determinante das matrizes:

$$\text{a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{b) } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Propriedades dos determinantes

Para uma matriz quadrada A de ordem n , podem ser demonstradas algumas propriedades que simplificam o cálculo de seu determinante.

• 1ª propriedade

Se A tem uma fila com todos os elementos nulos, seu determinante é nulo.

Tomemos, por exemplo, a matriz A a seguir. Utilizando o teorema de Laplace, podemos calcular seu determinante a partir dos elementos nulos da 2ª linha. Como todos os produtos desses elementos por seus cofatores serão nulos, teremos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 0$$

• 2ª propriedade

Se uma matriz A tem duas filas paralelas proporcionais, seu determinante é nulo.

Por exemplo, na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix},$$

cada elemento da 3ª linha é o dobro do correspondente na 1ª linha. Sendo assim, dizemos que a 1ª e a 3ª linhas são proporcionais e o determinante será nulo.

Já para a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

o determinante será nulo, pois a 1ª e a 3ª colunas são iguais.

• 3ª propriedade

Se trocarmos entre si a posição de duas filas paralelas de A , obtemos uma matriz A' , tal que $\det A' = -\det A$.

Na matriz A a seguir, temos um exemplo no qual, ao trocarmos as posições da 1ª e 3ª linha, acarretamos a troca do sinal do determinante na nova matriz obtida. É importante salientar que a troca de sinal ocorrerá a cada troca de posição de uma linha ou coluna da matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 24$$

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A' = -24$$

• 4ª propriedade

Se multiplicarmos os elementos de uma fila de A por um número real k , obtemos uma matriz A' , tal que $\det A' = k \det A$.

$$\text{Para } A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ temos } \det A = -27.$$

Multiplicando a 1ª linha por 2, obtemos:

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A' = 2 \det A = -54$$

Veja agora o que ocorre com o valor do determinante de A quando multiplicamos a matriz por 2, ao invés de multiplicarmos apenas a primeira linha. Vamos, portanto, calcular o determinante de $2A$:

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & 2 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det (2A) = -216 = 8(-27)$$

Observe que $\det (2A) = 2^3 \cdot \det A$, pois multiplicamos todas as filas por 2.

De uma forma mais geral, podemos dizer que, para uma matriz A , quadrada de ordem n , temos:

$$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$$

• 5ª propriedade

O determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta.

$$\det A = \det A^t$$

Ao fazer a transposição da matriz A , por exemplo, obtemos o mesmo valor para $\det A$:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 43$$

$$A^t = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A^t = 43$$

• 6ª propriedade

O determinante do produto de duas matrizes quadradas de mesma ordem é igual ao produto dos determinantes dessas matrizes.

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Considere, por exemplo, as matrizes A e B a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 5$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = 2$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A \cdot B) = 10$$

Observe que $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

• 7ª propriedade

Se somarmos a uma fila de A uma outra fila previamente multiplicada por um número real, obtemos uma matriz A' , tal que $\det A' = \det A$.

Quando fazemos uma transformação dessa natureza numa matriz, dizemos que estamos fazendo uma **combinação linear**. Essa propriedade nos garante, portanto, que ao fazermos combinações lineares entre filas de uma matriz, o valor de seu determinante não se altera. Observe, como exemplo, a combinação linear que fazemos entre linhas da matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 15$$

Multiplicando a terceira linha por 2 e adicionando-a à primeira, obtemos A' :

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \leftarrow + \\ \uparrow \\ \rightarrow \times 2 \end{array}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A' = 15$$

Atividades

54. Calcule os determinantes das matrizes a seguir sem desenvolvê-los.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

55. É dada a matriz $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$. Sabendo-se que $\det A = 12$, calcule:

a) $\begin{vmatrix} z & t \\ x & y \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} x & z \\ y & t \end{vmatrix}$

Regra de Cramer

A solução de um sistema linear com n equações e n incógnitas pode ser obtida utilizando-se o cálculo com determinantes em uma regra prática denominada regra de Cramer. Considere o sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Para obtermos sua solução por meio da regra de Cramer, procedemos da seguinte forma:

Calculamos o determinante da matriz A , formada pelos coeficientes das variáveis do sistema:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Calculamos os determinantes das matrizes obtidas a partir de A , substituindo cada coluna dos coeficientes de x_i pela coluna dos termos independentes do sistema:

$$\det X_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det X_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det X_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

Se $\det A \neq 0$, o sistema é possível e determinado e sua solução será:

$$x_1 = \frac{\det X_1}{\det A} \quad x_2 = \frac{\det X_2}{\det A} \quad \dots \quad x_n = \frac{\det X_n}{\det A}$$

Note que só é possível usar a regra de Cramer em sistemas $n \times n$ em que $\det A \neq 0$. Caso ocorra que $\det A = 0$, a discussão da solução do sistema deve ser feita por escalonamento.

Atividades resolvidas

R22. Determine a para que o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 5x + ay = 6 \end{cases}$ seja possível e determinado.

Resolução

Para que o sistema seja possível e determinado, é necessário que o determinante da matriz dos coeficientes seja diferente de zero.

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 3a - 10 \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{10}{3}$$

Atividades

56. Resolva os seguintes sistemas pela regra de Cramer:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x - 3y = 13 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$

57. Determine a para que o sistema $\begin{cases} -x + 5y = 15 \\ 3x + ay = 9 \end{cases}$ seja possível e determinado.

Para se chegar à solução desse sistema, parte-se da última equação, que fornece diretamente o valor de x_n e, por substituição nas equações anteriores, obtém-se os valores de x_{n-1} , x_{n-2} , ..., x_2 e x_1 .

Escalonamento e resolução de um sistema linear

Podemos transformar qualquer sistema linear em um outro equivalente pelas seguintes transformações elementares, realizadas com suas equações:

- trocar as posições de duas equações do sistema;
- multiplicar uma equação do sistema por um número real não nulo;
- somar a uma equação do sistema uma outra multiplicada por um número real.

Matrizes

Matriz genérica $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Representação por lei de formação dos elementos

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ | lei de formação, com $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Tipos de matrizes

- Matriz linha

$$A = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \cdots \ a_{1n}]$$

- Matriz coluna

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

- Matriz quadrada

É toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas. Assim, chamamos matriz quadrada de ordem n toda matriz do tipo $n \times n$.

$$\begin{matrix} \text{diagonal secundária} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \text{diagonal principal} \end{matrix}$$

- Matriz nula

É toda matriz do tipo $m \times n$ cujos elementos são nulos.

- Matriz diagonal

É toda matriz quadrada em que os elementos não pertencentes à diagonal principal são nulos.

- Matriz identidade

É toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

- Matriz transposta

Dada uma matriz A do tipo $m \times n$, chama-se transposta de A e indica-se por A^t a matriz que se obtém trocando-se ordenadamente as linhas pelas colunas de A .

Igualdade de matrizes

$$A = (a_{ij}) \text{ e } B = (b_{ij}) \text{ são do tipo } m \times n \mid A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \begin{cases} \text{para todo } 1 \leq i \leq m \\ \text{para todo } 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Adição e subtração de matrizes

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{ e } B = (b_{ij})_{m \times n}$$

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n} \quad (1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n)$$

Multiplicação de número real por matriz

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{ e } k \in \mathbb{R}$$

$$k \cdot A = (k \cdot a_{ij})_{m \times n} \quad (1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n)$$

Multiplicação de matrizes

Dadas $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{jk})$, de tipos $m \times n$ e $n \times p$, o produto $C = A \cdot B$ será do tipo $m \times p$ e cada elemento c_{ik} da matriz produto C é dado pela soma dos produtos de cada elemento da linha i de A pelo elemento correspondente da coluna k de B .

$$C = A \cdot B \text{ (} c_{ik} \text{)}_{m \times p} \text{ onde } c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$$

Matriz inversa

Para $A = (a_{ij})_{n \times n}$, se existir $B = (b_{ij})_{n \times n}$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n \Rightarrow B$ é a inversa de A e será representada por A^{-1} .

Determinantes

$A = (a_{ij})_{n \times n} \Rightarrow$ existe o número real $\det A$ ou $|A|$ associado à matriz.

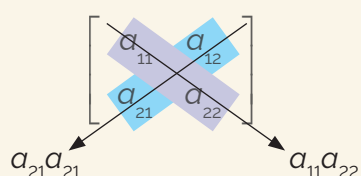
Determinantes de matrizes de ordens 1, 2 e 3

• matriz 1×1

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}$$

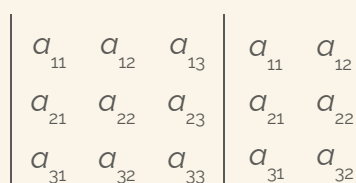
• matriz 2×2

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

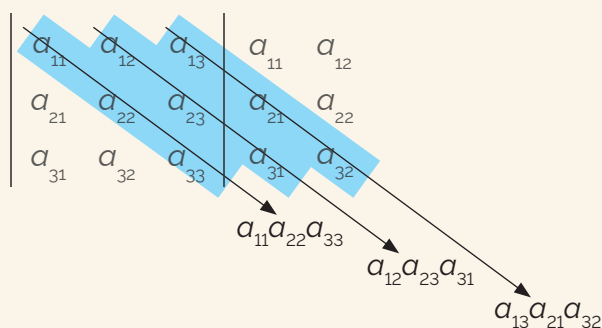


• matriz 3×3 (regra de Sarrus)

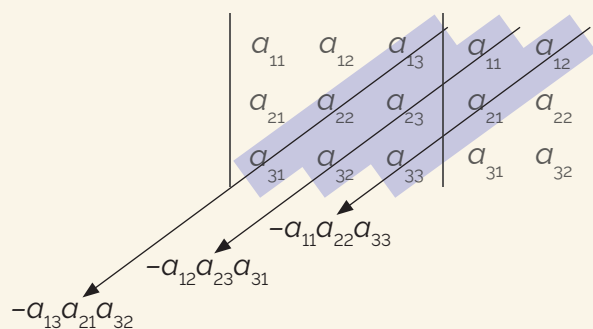
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$



Efetuem-se os produtos dos elementos indicados, conservando-se os sinais:



Efetuem-se os produtos dos elementos indicados, trocando-se os sinais:



Somam-se os produtos obtidos:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Teorema de Laplace

Para uma matriz A , quadrada de ordem $n \geq 2$:

$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}$, em que $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ são os cofatores dos elementos da linha i .

Propriedades dos determinantes

• 1ª propriedade

Se A tem uma fila com todos os elementos nulos, seu determinante é nulo.

• 2ª propriedade

Se uma matriz A tem duas filas paralelas proporcionais, seu determinante é nulo.

• 3ª propriedade

Se trocarmos entre si a posição de duas filas paralelas de A , obtemos uma matriz A' , tal que $\det A' = -\det A$.

• 4ª propriedade

Se multiplicarmos os elementos de uma fila de A por um número real k , obtemos uma matriz A' , tal que $\det A' = k \det A$.

• 5ª propriedade

O determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta.

$$\det A = \det A^t$$

• 6ª propriedade

O determinante do produto de duas matrizes quadradas de mesma ordem é igual ao produto dos determinantes dessas matrizes.

$$\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

- Se somarmos a uma fila de A uma outra fila previamente multiplicada por um número real, obtemos uma matriz A' , tal que $\det A' = \det A$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det X_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det X_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det X_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

$$\det A \neq 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\det X_1}{\det A}$$

$$x^2 = \frac{\det X_2}{\det A} \dots x_n = \frac{\det X_n}{\det A}$$

Avalie o que aprendeu

1. Calcule o valor de p para que o sistema dado admita outras soluções além da trivial.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -x + (p + 2)y = 0 \end{cases}$$

a) $p = 2$

c) $p = 0$

b) $p = 1$

d) $p = -1$

e) $p = -\frac{1}{2}$

2. Determine o valor de k para que o sistema admita uma única solução.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y - kz = -3 \end{cases}$$

a) $k = -1$

d) $k \neq -1$

b) $k = 0$

e) $k \neq -2$

c) $k \neq 0$

3. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, com $a_{ij} = \sin\left(\frac{\pi}{8}i\right)$, e $B = (b_{ij})_{2 \times 3}$, com $b_{ij} = \cos\left(\frac{\pi}{4}j\right)$, calcule $a_{21} - b_{13}$.

a) 2

c) 5

b) $\sqrt{2}$

d) $\sqrt{5}$

4. Calcule x , y , z e t , sabendo que

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & y \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ z & t \end{pmatrix}.$$

a) $x = 8$; $y = -3$; $z = -1$; $t = 1$

d) $x = y = z = t = -2$

b) $x = 4$; $y = -5$; $z = 0$; $t = 12$

e) $x = y = z = t = 2$

c) $x = y = z = t = 0$

5. Multiplicando $\begin{pmatrix} a & -3 \\ -4 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, obtemos $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -10 & -12 \end{pmatrix}$. Calcule $a + b$.

a) 0

d) 6

b) 2

e) 8

c) 4

6. Encontre a matriz X tal que $X + B = A^2$, sendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) $X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

c) $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

7. Sabendo que $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, determine x e y para que $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

a) $x = 0; y = 1$

d) $x = -1; y = 0$

b) $x = 0; y = -1$

e) $x = 0; y = 0$

c) $x = 1; y = 1$

8. Sendo dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, tais que $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, obtenha a e b .

a) $b = a = 2$

d) $b = 2; a = -5$

b) $b = a = -5$

e) $b = 0; a = 1$

c) $b = -5; a = 2$

9. São dadas as matrizes

$$A = I_4, B = \begin{pmatrix} 2x - 5 & y + 2 & 3z + 4 & t - 2 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Calcule o valor de } x, y, z \text{ e } t \text{ de modo}$$

que se tenha $B \cdot A = C^t$.

a) $x = 0; y = \frac{1}{2}; z = \frac{4}{3}; t = 5$

c) $x = y = z = t = 0$

b) $x = 4; y = 0; z = -\frac{4}{3}; t = 3$

d) $x = -\frac{3}{2}; y = \frac{1}{2}; z = \frac{1}{3}; t = 7$

10. Dados $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, determine a matriz $X = (A^{-1} \cdot B)^t$.

a) $X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

e) $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

11. Qual deve ser o valor de x para que se tenha $\begin{vmatrix} x-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0$?

a) $x = 0$ ou $x = -2$

d) $x = 1$ ou $x = -3$

b) $x = 4$ ou $x = -1$

e) $x = 2$ ou $x = -2$

c) $x = 0$

12. O valor de um determinante é 52. Se multiplicarmos a 2ª linha por 2, qual será o valor do novo determinante?

a) 104

d) 44

b) 88

e) 12

c) 76

13. (EEAR-SP) O sistema $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ x + 4y = -6 \\ 2x - 3y = m \end{cases}$, nas incógnitas x e y , admite uma única solução se, e somente se:

a) $m \neq -1$

c) $m = -1$

b) $m = 0$

d) $m = 2$

14. (EPCAR-MG) Considere o sistema nas incógnitas x , y e z :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

Os valores de a de modo que o sistema tenha uma solução ou para que não tenha

solução são, respectivamente:

a) $a \neq 2; a \neq -3$

c) $a = -3; a = 2$

b) $a = 2; a = -3$

d) $a \neq 3; a = 2$

15. (AFA-SP) A condição que deve ser satisfeita pelos termos independentes a , b e c (a ,

b e $c \in \mathbb{R}$) para que seja compatível o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = a \\ y + 2z = b \\ x + 3y + z = c \end{cases}$ é estabelecida por:

a) $c - a + b = 0$

c) $c + a - b = 0$

b) $a + b + c = 0$

d) $a + b - c = 0$

16. (AFC-DF) De forma generalizada, qualquer elemento de uma matriz M pode ser representado por m_{ij} , em que i representa a linha e j a coluna em que esse elemento se localiza. Uma matriz $S = s_{ij}$, de terceira ordem, é a matriz resultante da soma entre as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, ou seja, $S = A + B$. Sabendo-se que $(a_{ij}) = i^2 + j^2$ e que $b_{ij} = (i + j)^2$, então a soma dos elementos da primeira linha da matriz S é igual a:

a) 17

d) 46

b) 29

e) 58

c) 34

17. (FGV-SP) A , B e C são matrizes quadradas de ordem 3, e I é a matriz identidade de mesma ordem. Assinale a alternativa correta:

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

d) $C \cdot I = C$

b) $B \cdot C = C \cdot B$

e) $I \cdot A = I$

c) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$

18. (UPM-SP) Considerando o produto de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

o valor de a é:

a) 0

d) -2

b) -1

e) 1

c) 2

19. (UEL-PR) Uma nutricionista recomendou aos atletas de um time de futebol a ingestão de uma quantidade mínima de certos alimentos (frutas, leite e cereais) necessária para uma alimentação sadia. A matriz D fornece a quantidade diária mínima (em gramas) daqueles alimentos. A matriz M fornece a quantidade (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida por cada grama ingerida dos alimentos citados.

$$D = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 600 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{fruta} \\ \text{leite} \\ \text{cereais} \end{array}$$

$$M = \begin{array}{ccc} & \text{fruta} & \text{leite} & \text{cereais} \\ \begin{bmatrix} 0,006 & 0,033 & 0,108 \\ 0,001 & 0,035 & 0,018 \\ 0,084 & 0,052 & 0,631 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{proteínas} \\ \text{gorduras} \\ \text{carboidratos} \end{array} \end{array}$$

A matriz que mostra a quantidade diária mínima (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão daqueles alimentos é:

a) $\begin{bmatrix} 18,20 \\ 36,30 \\ 454,20 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 51,90 \\ 48,30 \\ 405,60 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 29,70 \\ 16,20 \\ 460,20 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 75,90 \\ 21,50 \\ 411,00 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 48,30 \\ 36,00 \\ 432,40 \end{bmatrix}$

20. (Fuvest-SP) Uma matriz real A é ortogonal se $A \cdot A^t = I$, em que I indica a matriz

identidade e A^t indica a transposta de A . Se $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & x \\ y & z \end{bmatrix}$ é ortogonal, então $x^2 + y^2$ é igual a:

a) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

e) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{1}{2}$





VOCÊ PODE JOGAR MARCANDO EM 1, 2

[01]	[02]	[03]	[04]	[05]	[06]	[07]	[08]	[09]	[10]
[11]	[12]	[13]	[14]	[15]	[16]	[17]	[18]	[19]	[20]
[21]	[22]	[23]	[24]	[25]	[26]	[27]	[28]	[29]	[30]
[31]	[32]	[33]	[34]	[35]	[36]	[37]	[38]	[39]	[40]
[41]	[42]	[43]	[44]	[45]	[46]	[47]	[48]	[49]	[50]
[51]	[52]	[53]	[54]	[55]	[56]	[57]	[58]	[59]	[60]

Para anular este jogo, marque ao lado:

[01]	[02]	[03]	[04]	[05]	[06]	[07]	[08]	[09]	[10]
[11]	[12]	[13]	[14]	[15]	[16]	[17]	[18]	[19]	[20]
[21]	[22]	[23]	[24]	[25]	[26]	[27]	[28]	[29]	[30]
[31]	[32]	[33]	[34]	[35]	[36]	[37]	[38]	[39]	[40]
[41]	[42]	[43]	[44]	[45]	[46]	[47]	[48]	[49]	[50]
[51]	[52]	[53]	[54]	[55]	[56]	[57]	[58]	[59]	[60]

Para anular este jogo, marque ao lado:

Estudar o número de combinações em jogos é prática de muitos matemáticos.

Capítulo 3

Contagem e probabilidade

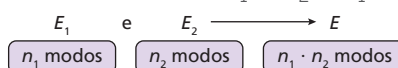
Neste capítulo, vamos estudar as técnicas de contagem que permitem calcular o número de elementos de conjuntos formados de acordo com certas regras, sem que seja necessário enumerar seus elementos.

Encontramos essas situações, por exemplo, quando precisamos calcular a quantidade de placas de automóveis, números telefônicos, grupos de pessoas, cartões de loteria, ocorrência de uma investigação científica, incidência de um sinistro, etc. Finalmente, calcularemos a chance de determinada situação ocorrer.

Princípio fundamental da contagem

O princípio fundamental da contagem, ou princípio multiplicativo, estabelece o número de maneiras distintas de ocorrência de um evento composto de duas ou mais etapas. Pode ser enunciado da seguinte forma:

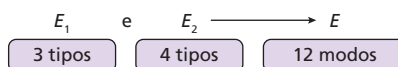
Se uma decisão E_1 pode ser tomada de n_1 modos e, tomada a decisão E_1 , a decisão E_2 pode ser tomada de n_2 modos, então o número de maneiras de se tomarem as decisões E_1 e E_2 é $n_1 \cdot n_2$.



Atividades resolvidas

R1. Uma lanchonete serve 3 tipos de sanduíches e 4 tipos de refrigerantes. Calcule o número de modos distintos de uma pessoa fazer um lanche constituído de um sanduíche e um refrigerante.

Resolução



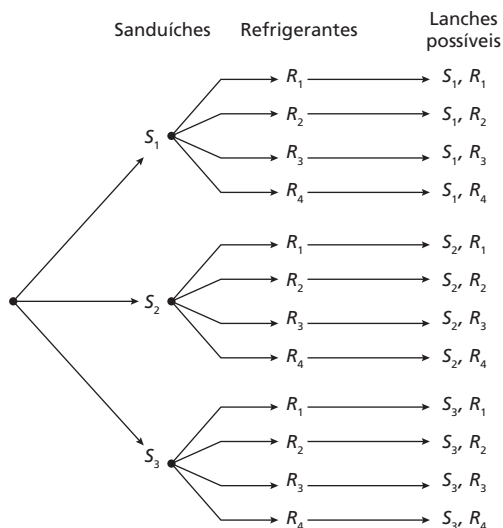
E_1 : escolher um sanduíche

E_2 : escolher um refrigerante

E : escolher um lanche

Para formar um lanche, a cada sanduíche podemos escolher um dos 4 tipos de refrigerantes; como são 3 tipos de sanduíches, podemos compor 3×4 lanches.

Se S_1, S_2 e S_3 são os tipos de sanduíches e R_1, R_2, R_3 e R_4 são os tipos de refrigerantes, então o "par" (S_1, R_1) representa um lanche formado pelo sanduíche S_1 e pelo refrigerante R_1 .



Assim, os 12 lanches possíveis são $(S_1, R_1), (S_1, R_2), (S_1, R_3), (S_1, R_4), (S_2, R_1), (S_2, R_2), (S_2, R_3), (S_2, R_4), (S_3, R_1), (S_3, R_2), (S_3, R_3)$ e (S_3, R_4) .

– Se $A = \{S_1, S_2, S_3\}$ e $B = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$, então o conjunto de todos os pares (S_i, R_j) , onde $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3, 4$, que tem 12 elementos, é chamado de "produto cartesiano de A por B ":

$$A \times B = \{(S_1, R_1), (S_1, R_2), (S_1, R_3), (S_1, R_4), (S_2, R_1), (S_2, R_2), (S_2, R_3), (S_2, R_4), (S_3, R_1), (S_3, R_2), (S_3, R_3), (S_3, R_4)\}$$

R2. Dados os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, determine quantos números naturais podemos formar:

a) com 3 algarismos;

b) com 3 algarismos distintos.

Resolução

a) Temos 6 possibilidades para cada um dos 3 algarismos:

centenas	dezenas	unidades	
↓	↓	↓	
6	6	6	$\rightarrow 6 \times 6 \times 6 = 216$

Assim, podemos formar 216 números.

b) Como os algarismos devem ser distintos, isto é, não pode haver repetição, cada algarismo utilizado é excluído da etapa seguinte:

centenas	dezenas	unidades	
↓	↓	↓	
6	5	4	$\rightarrow 6 \times 5 \times 4 = 120$

Assim, podemos formar 120 números.

R3. Quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem?

Resolução

O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos (não podemos usar o 0 na casa da centena); o segundo algarismo, de 9 modos (não podemos usar o algarismo utilizado anteriormente); e o terceiro, de 8 modos (não podemos usar os dois algarismos já empregados).

1º	2º	3º
algarismo	algarismo	algarismo
↓	↓	↓
9	9	8

Assim, temos $9 \times 9 \times 8 = 648$ números naturais de 3 algarismos distintos.

Atividades

1. Uma moça possui 5 blusas diferentes e 4 saias diferentes. De quantos modos distintos ela pode se vestir?



2. Existem 2 estradas que ligam as cidades A e B e 3 estradas que ligam B e C. De quantas formas distintas é possível ir de A até C passando por B?

3. Uma determinada viagem pode ser feita de carro, ônibus ou avião. De quantos modos pode-se escolher o meio de transporte se não for usado na volta o mesmo meio de transporte usado na ida?

4. Em uma prova classificatória para as olimpíadas, 10 atletas disputam os 800 metros. Sabe-se que apenas os 4 primeiros serão classificados para as finais. Quantos resultados possíveis existem para os 4 primeiros lugares?

5. Quantos são os gabaritos possíveis para uma prova de 10 testes, com 5 alternativas por questão?

6. Dispondo de 6 cores, de quantas formas distintas podemos pintar uma bandeira com 3 listras verticais de cores diferentes?

7. Uma comissão de uma câmara de vereadores será composta por 1 presidente, 1 secretário e 1 relator. Considerando que essa câmara possui 18 vereadores, de quantos modos pode ser formada essa comissão?

8. Quantos números de telefone com 8 algarismos podemos formar? (Utilize os 10 algarismos do sistema decimal.)

9. Quantos números de telefone com 8 algarismos e prefixo 3.241 podem ser formados? (Utilize os 10 algarismos do sistema decimal.)

10. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9:

a) quantos números naturais de 4 algarismos podem ser formados?

b) quantos números naturais pares de 3 algarismos distintos podem ser escritos?

11. Calcule quantas placas de carro podemos formar, dispondo de 26 letras e 10 algarismos, considerando:

a) 3 letras e 4 algarismos;

b) 3 letras distintas e 4 algarismos distintos.

12. Um cofre de segurança possui um disco com as 26 letras do alfabeto e dois outros numerados de 1 a 9. O segredo do cofre consiste em 4 letras distintas, em uma determinada ordem, e 2 números distintos, também em ordem. Considerando que as letras devem sempre anteceder os números, quantos segredos diferentes pode ter o cofre?

13. Quantos números naturais de 4 algarismos distintos existem?

14. Quantos números naturais pares de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos de 0 a 9?

15. Quantos números naturais ímpares de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos de 0 a 9?

16. Quantos são os inteiros positivos de 4 algarismos distintos nos quais o algarismo 5 sempre figura?

17. Quantos números naturais de 5 algarismos, distintos e maiores de 53.000, existem?

18. Quantos números compreendidos entre 2.000 e 7.000 podemos escrever com os algarismos ímpares sem os repetir?

19. Quantos números de 3 algarismos são maiores que 320 e:

a) possuem todos os algarismos distintos?

b) não possuem os algarismos 2, 5 e 7?

c) possuem todos os algarismos distintos e não possuem os algarismos 2, 5 e 7?

Fatorial

Para tornar mais prática a representação e a execução dos cálculos relativos aos problemas de contagem, vamos introduzir um novo conceito: o produto $n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ é chamado n fatorial, ou fatorial de n , e representado por $n!$. Então:

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1, (n \in \mathbb{N})$$

Leitura de " $n!$ ": n fatorial

Convencionou-se que $0! = 1$ e $1! = 1$

Atividades resolvidas

R4. Calcule os fatoriais:

a) $5!$

b) $4!$

c) $\frac{7!}{5!}$

d) $\frac{(n-1)!}{(n+1)}$

Resolução

a) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

b) $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

c) $\frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$

d) $\frac{(n-1)!}{(n+1)} = \frac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!} = \frac{1}{(n+1)n} = \frac{1}{n^2 + n}$

R5. Simplifique a expressão: $\frac{4! + 5!}{3!}$.

Resolução

Para simplificar, decompomos $4!$ e $5!$ em função do menor dos fatoriais, que é o $3!$

$$\frac{4! + 5!}{3!} = \frac{4 \cdot 3! + 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = \frac{3!(4 + 5 \cdot 4)}{3!} = 24$$

Atividades

20. Simplifique as expressões:

a) $\frac{10!}{8!}$

c) $\frac{10!}{12!}$

b) $\frac{26!}{23!}$

d) $\frac{8!}{2!6!}$

21. Verifique em seu caderno a alternativa correta:

a) $10! = 8! + 2!$

c) $10! = 12! - 2!$

b) $10! = 2! \cdot 5!$

d) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8!$

22. Efetue: $\frac{50! + 51!}{49!}$

23. Simplifique as expressões:

a) $\frac{n!}{(n-1)!}$

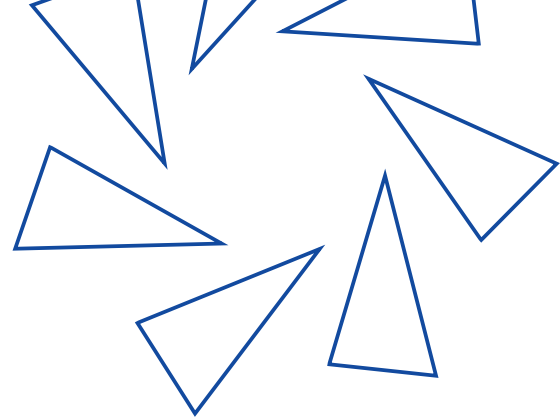
b) $\frac{(n-2)!}{(n-3)!}$

25. Resolva as equações:

a) $\frac{(x+1)!}{(x-1)!} = 7,2, x \in \mathbb{N} \mid x \geq 1$

b) $\frac{x!}{(x-2)!} = 5, x \in \mathbb{N} \mid x \geq 2$

Permutação simples



Dados n objetos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, podemos formar com todos eles, sem repetição, agrupamentos de n elementos que diferem entre si apenas pela ordem dos elementos em cada agrupamento. O 1º elemento pode ser escolhido de n modos, isto é, pode ser qualquer um dos n objetos; o 2º elemento pode ser qualquer um dos $n - 1$ elementos que não foram usados no 1º lugar, e assim por diante. Temos então: n possibilidades para o 1º, $n - 1$ para o 2º, $n - 2$ para o 3º, ..., até uma única possibilidade para o último elemento. Pelo princípio multiplicativo, o número total de agrupamentos (ou ordenações) dos n elementos será igual a:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Cada um desses agrupamentos é chamado de **permutação** dos n objetos dados. Concluimos, portanto, que o número de permutações de n objetos (elementos) é igual a $n!$.

$$P_n = n (n - 1) (n - 2) \dots 1 = n!$$

$$P_n = n!$$

$$(n \in \mathbb{N})$$

Leitura de P_n : permutação de n elementos

Dada uma palavra (como CASTILHO), cada permutação de suas letras recebe o nome de anagrama. Observe que um anagrama é uma palavra que pode não ser dicionarizada.

Atividades resolvidas

R6. Obtenha os anagramas da palavra CASTILHO.

Resolução

Fazer um anagrama de uma palavra é formar outra pela transposição das letras da primeira, ou seja, permutar as letras para obter-se outra.

Assim, permutando suas 8 letras, temos:

$$P_8 = 8! = 40\,320.$$

R7. Considere a palavra PERNAMBUCO. Quantos anagramas:

a) podemos formar?

c) começam com PER?

b) começam com a letra P?

d) possuem a sílaba PER?

Resolução

a)

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Com 10 letras distintas, que trocam de posição entre si, temos:

$$P_{10} = 10! \text{ anagramas.}$$

b)

P									
---	--	--	--	--	--	--	--	--	--

9 letras

$$P_9 = 9! \text{ anagramas.}$$

c)

P	E	R							
---	---	---	--	--	--	--	--	--	--

7 letras

$$P_7 = 7! \text{ anagramas.}$$

d)

		P	E	R					
--	--	---	---	---	--	--	--	--	--

8

Considerando a sílaba PER como se fosse uma única letra, temos:

$$P_8 = 8!$$

R8. Dispostos em ordem crescente todos os números de 4 algarismos, obtidos com 1, 3, 5 e 7 (sem repetir), que posição ocupa o número 5.731?

Resolução

Para resolver esse tipo de exercício, estudamos as possibilidades de cada algarismo em cada casa, separadamente. Dessa forma, temos um controle maior até encontrar a posição de 5.731.

1			
---	--	--	--

 $\rightarrow P_3 = 3! = 6$

3			
---	--	--	--

 $\rightarrow P_3 = 3! = 6$

5	1		
---	---	--	--

 $\rightarrow P_2 = 2! = 2$

5	3		
---	---	--	--

 $\rightarrow P_2 = 2! = 2$

5	7	1	3
---	---	---	---

 $\rightarrow P_1 = 1! = 1$

Temos $6 + 6 + 2 + 2 + 1 = 17$ números menores; portanto, o número 5.731 ocupa o 18º lugar.

Atividades

26. Determine quantos anagramas possuem as palavras:

a) ESCOLA

b) RIMA

c) PEDAL

27. Qual é o número de anagramas da palavra FUTEBOL que:

a) terminam com BOL?

b) possuem a sílaba TE?

c) possuem, juntas, as letras F, U e T?

28. Quantos anagramas da palavra VESTIBULAR:

a) têm, juntas, todas as vogais?

b) têm, juntas, as letras V, E, S, e T, nessa ordem?

29. Quantos anagramas da palavra BIGODE têm as consoantes e as vogais dispostas alternadamente?

30. Qual a soma dos números que se pode formar com as permutações dos algarismos 1, 2, 3 e 4?

31. Forme números obtidos pela permutação dos algarismos 2, 3, 4, 8 e 9 e disponha-os em ordem crescente. Que lugar ocupa o número 43.892?

32. Em uma estante estão dispostos 8 livros distintos, sendo 3 de Matemática, 2 de Física e 3 de Química. Determine de quantas formas distintas podemos dispor os livros, de tal maneira que fiquem sempre juntos:

a) os de matemática;

b) os de uma mesma matéria.

Permutação com elementos repetidos

De modo geral, o número de permutações de n objetos, dos quais n_1 são iguais a A, n_2 são iguais a B, n_3 são iguais a C, etc. é dado por:

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!}$$

$$(n \in \mathbb{N} \text{ e } n_1, n_2, n_3, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*)$$

Atividades resolvidas

R9. Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra NATA?

Resolução

Se todas as letras fossem distintas, teríamos $4!$ permutações. Como temos uma letra repetida, esse número será menor, visto que uma permutação entre letras repetidas não produz nova palavra. Vamos colocar índices nas letras repetidas para visualizar o que acontece. Assim, NA_1TA_2 , NA_2TA_1 , que seriam diferentes se $A_1 \neq A_2$, são, na verdade, iguais quando retiramos os índices, ou seja, o resultado deve ser dividido por 2, pois duas palavras são contadas apenas uma vez.



Então o número de palavras distintas que podem ser formadas por permutação das letras de NATA é igual a $\frac{4!}{2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 12$.

R10. Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra BALADA?

Resolução

Nesse caso, temos 3 letras A que, se fossem letras distintas, teríamos $6!$ permutações, mas todas as permutações de $A_1A_2A_3$, que são em número de $3! = 6$, produzem a mesma palavra.

Temos então $\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ palavras.

R11. Quantos números de 7 algarismos podem ser formados usando os algarismos 2, 2, 2, 3, 3, 4 e 5?

Resolução

Se todos os algarismos fossem distintos, teríamos $P_7 = 7!$ números.

Porém, como temos três 2 e dois 3, teremos um número menor representado por

$$P_7^{(3,2)} = \frac{7!}{3! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} \text{ números} = 420 \text{ números.}$$

Atividades

33. A partir da palavra CARAGUATATUBA, determine quantos anagramas:

a) podemos formar.

b) começam por vogal.

34. De quantos modos podemos separar 10 alunos de uma classe em dois grupos: um de 6 alunos e o outro de 4?

35. De quantos modos podemos embalar 15 sabonetes em 4 caixas, sabendo que na primeira cabem 3 sabonetes, na segunda, 4, na terceira, 6 e na quarta, 2?

36. Bruno mora 3 quarteirões ao norte e 5 quarteirões a leste de sua escola. Quantos caminhos possíveis, percorrendo sempre a menor distância, Bruno pode fazer para ir de sua casa à escola?

37. Quantos números de sete algarismos podem ser formados usando os algarismos 2, 2, 2, 3, 3, 4 e 5?

Práticas interdisciplinares

Combinações e recombinações no DNA

O modelo do DNA, proposto na década de 1950, parece uma hélice dupla, contendo em cada “corrimão” uma sequência de bases nitrogenadas, denominadas adenina (A), timina (T), citosina (C) e guanina (G).

As duas hélices ligam-se uma à outra por “degraus” formados por pares específicos dessas bases. Assim, a adenina liga-se sempre à timina (A – T ou T – A) e a citosina, à guanina (C – G ou G – C).

Quando a dupla hélice do DNA se abre para a produção de uma molécula de RNA, responsável pela síntese de proteínas na célula, a sequência de bases nitrogenadas determina a sequência que terá o RNA.

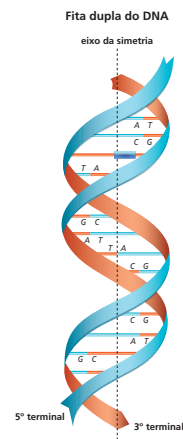
O RNA vai, então, promover a síntese das proteínas a partir dos 20 tipos de aminoácidos existentes. Como a mensagem contida no RNA vem do DNA, podemos dizer que é este último que determina a sequência de ligações dos aminoácidos, de forma a sintetizar uma nova proteína.

Cada aminoácido, dos 20 existentes, é codificado por uma sequência de três bases nitrogenadas, entre as quatro existentes (A, T, G e C). É fácil entender a necessidade de três bases para cada aminoácido: com duas bases (AA, AT, TA, GC, CG, TT, etc.), só poderíamos codificar 16 aminoácidos ($4^2 = 16$). Porém, como são 20 os tipos de aminoácidos, são necessárias sequências de três bases nitrogenadas.

Como existem 64 permutações ($4^3 = 64$), isso nos leva à conclusão de que muitas combinações de três bases se repetem para um mesmo aminoácido.

Essas e outras combinações de aminoácidos e bases nitrogenadas traduzem um conjunto de informações correspondente a mais de 3 bilhões de características relativas à espécie humana. Esse número, segundo os cientistas do Projeto Genoma, responsáveis por mapear o chamado “código da vida”, constituem a identificação de aproximadamente 97% do mapeamento do DNA humano.

Agora, converse com sua turma:



1. Por que são necessárias três bases nitrogenadas para codificar cada aminoácido?

2. Como a relação entre o número de aminoácidos e o número de permutações de bases nitrogenadas resulta em repetições de combinações?

3. Você considera importante a matemática no entendimento da Biologia?

4. Dos seus estudos nas Ciências da Natureza, que outras áreas utilizam ferramentas da matemática em suas explicações?

5. Aproveitando o assunto do texto, o que mais você sabe sobre DNA? Converse com seu professor de Biologia a respeito.

Combinações simples

Representamos por $C_{n,p}$ o número de combinações de n objetos tomados p a p . Por exemplo, as combinações simples de 3 dos 4 objetos a_1, a_2, a_3, a_4 são:

$$\{a_1, a_2, a_3\} \{a_1, a_2, a_4\} \{a_1, a_3, a_4\} \{a_2, a_3, a_4\}$$

Assim, $C_{4,3} = 4$.

Analisando essa resposta: a escolha do 1º elemento da combinação pode ser feita de 4 modos; a do 2º, de 3 modos e a do 3º, de 2 modos. A resposta parece ser $4 \times 3 \times 2 = 24$. Entretanto, se pensarmos em uma combinação, por exemplo $\{a_1, a_2, a_3\}$, verificamos que as combinações $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_3, a_2\}$, $\{a_2, a_1, a_3\}$ etc. são idênticas e foram contadas como se fossem diferentes. Portanto, na resposta 24, estamos contando cada combinação uma vez para cada ordem de escrever seus elementos.

Como em cada combinação os elementos podem ser escritos em $P_3 = 3! = 6$ ordens, cada combinação foi contada 6 vezes. Logo, a resposta é $\frac{24}{6} = 4$.

Genericamente, temos:

$$C_{n,p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!}, \quad 0 \leq p \leq n.$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $(n-p)!$, obtemos:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad 0 \leq p \leq n$$

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} \text{ é chamado de número binomial.}$$

Atividades resolvidas

R12. Calcule o número de comissões com 2 professores e 3 alunos que podem ser formadas a partir de um grupo de 5 professores e 8 alunos.

Resolução

Para escolher os professores, temos $C_{5,2}$ possibilidades, e para cada uma delas temos $C_{8,3}$ possibilidades de escolher os alunos. Portanto, o número de comissões é:

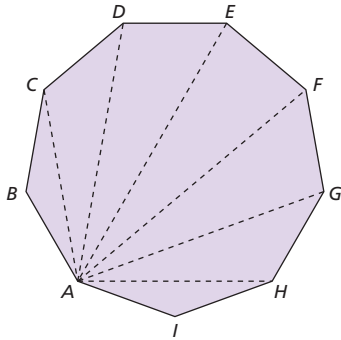
$$C_{5,2} \cdot C_{8,3} = 10 \cdot 56 = 560$$

R13. Quantas diagonais possui um polígono convexo de 9 lados?

Resolução

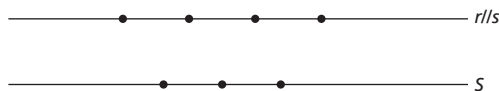
O número de segmentos que têm extremidades nos vértices do polígono é:

$$C_{9,2} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{2!7!} = 36$$



Desses segmentos, 9 são lados e, portanto, o número de diagonais é $36 - 9 = 27$.

R14. Dados 7 pontos distintos, 4 sobre uma reta e 3 sobre uma paralela à primeira, calcule o número de triângulos com vértices nesses pontos.



Resolução

Temos, no total, $C_{7,3}$ agrupamentos de 3 pontos, sendo que $C_{4,3}$ são pontos alinhados em r e $C_{3,3}$ são pontos alinhados em s . Como 3 pontos alinhados não determinam um triângulo, temos que o número de triângulos é:

$$C_{7,3} - C_{4,3} - C_{3,3} = 35 - 4 - 1 = 30.$$

Atividades

38. Em uma classe de 20 alunos, o professor deseja organizar grupos de 5 para trabalhar no laboratório. Quantos grupos distintos poderá formar?

39. Quantos subconjuntos de 4 elementos possui um conjunto de 8 elementos?

40. Um baralho comum possui 52 cartas. De quantas formas distintas um jogador pode receber 5 cartas?

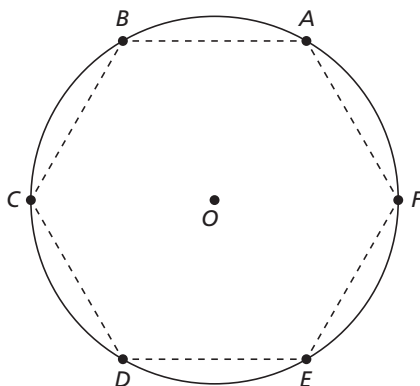
41. Determine o número de diagonais de um polígono convexo de n lados.

42. Em uma câmara municipal, deve-se formar uma comissão de 8 vereadores de tal maneira que 3 sejam do partido A , 2 do B e 3 do C . Quantas comissões distintas podem ser formadas, sabendo-se que os partidos A e C têm 8 deputados cada e o partido B tem 5 deputados?

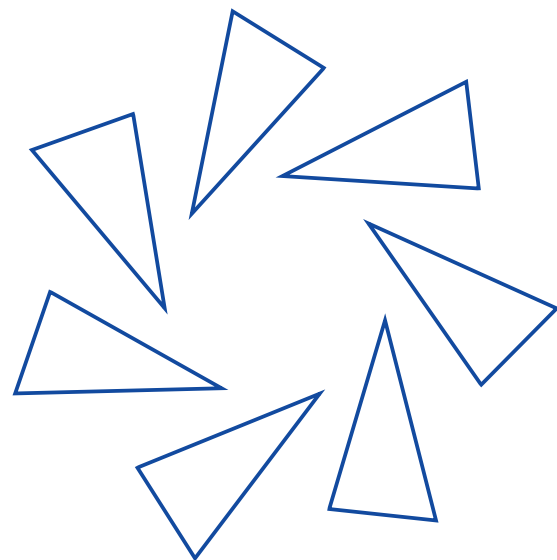
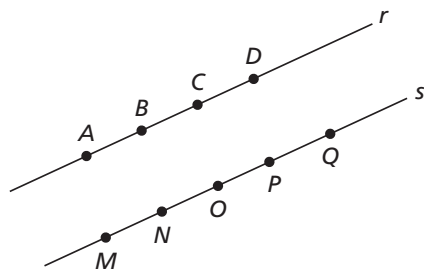
43. Em uma seleção de futebol, existem 8 jogadores de ataque, 6 de meio-campo, 6 defensores e 3 goleiros. Quantos times diferentes podem ser formados utilizando-se 1 goleiro, 4 defensores, 3 meio-campistas e 3 atacantes?

44. Resolva o exercício anterior sem considerar as posições dos jogadores, com exceção do goleiro.

45. A figura a seguir mostra uma circunferência com os 6 vértices de um hexágono regular. Quantos quadriláteros com vértices nesses pontos podemos inscrever na circunferência?



46. Quantos triângulos com vértices em duas retas paralelas r e s podem ser formados com 4 pontos distintos em uma e 5 pontos também distintos na outra?



Números binomiais

Denomina-se número binomial todo número na forma $\binom{n}{p}$, com $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $n \geq p$, em que:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

lê-se: binomial de n sobre p .

n : numerador do binomial.

p : denominador do binomial.

Note que $\binom{n}{p} = C_{n,p}$.

Podem ser demonstradas duas importantes propriedades dos números binomiais:

1ª) Binomiais complementares

Dois binomiais de mesmo numerador, em que a soma dos denominadores é igual ao numerador comum:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

2ª) Relação de Stifel

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Atividades resolvidas

R15. Calcule os números binomiais:

a) $\binom{7}{2}$

b) $\binom{n}{0}$

Resolução

a) $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$

b) $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$

R16. Verifique a igualdade: $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$.

Resolução

De fato, $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!}$ e $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} \therefore \frac{5!}{2!3!} = \frac{5!}{3!2!}$

Dois binomiais serão iguais quando possuírem numeradores e denominadores iguais ou se forem complementares.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{q} \Rightarrow \begin{cases} p = q \text{ ou} \\ p + q = n \end{cases}$$

R17. Determine x em $\binom{7}{3} = \binom{7}{x}$.

Resolução

$$\binom{7}{3} = \binom{7}{x} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ou} \\ 3 + x = 7 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Triângulo de Pascal

Triângulo de Pascal é uma tabela de números binomiais dispostos da seguinte maneira:

– em uma mesma linha, todos os binomiais com numeradores iguais;

– em uma mesma coluna, todos os binomiais com denominadores iguais.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \binom{0}{0} & & & & & & \\
 \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
 \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
 \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
 \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
 \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \dots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

Calculando cada binomial, temos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & & & & & & \\
 1 & 1 & & & & & \\
 1 & 2 & 1 & & & & \\
 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
 \end{array}$$

As propriedades binomiais podem ser facilmente observadas no triângulo de Pascal.

– No triângulo, dois binomiais complementares ocupam posições equidistantes dos extremos de uma linha:

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & & & & & & \\
 1 & 1 & & & & & \\
 1 & 2 & 1 & & & & \\
 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{n-2} & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 & \text{---} & \text{---} & & \text{---} & \text{---} & \\
 & \text{---} & \text{---} & & \text{---} & \text{---} & \\
 & \text{---} & \text{---} & & \text{---} & \text{---} &
 \end{array}$$

Chamamos esses binomiais de complementares.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

– Somando-se dois binomiais consecutivos de uma linha, obtém-se um número que se encontra na linha seguinte, abaixo do segundo binomial somado:

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	+	3	1				
1	4		6	4	1			
1	5	10	10	+	5	1		
1	6	15	20		15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Essa relação é denominada de relação de Stifel.

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

– A soma dos elementos de uma linha n é igual a 2^n .

1	_____	$S_0 = 2^0 = 1$
1 1	_____	$S_1 = 2^1 = 2$
1 2 1	_____	$S_2 = 2^2 = 4$
1 3 3 1	_____	$S_3 = 2^3 = 8$
1 4 6 4 1	_____	$S_4 = 2^4 = 16$
1 5 10 10 5 1	_____	$S_5 = 2^5 = 32$
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮		⋮ ⋮ ⋮
Linha n		$S_n = 2^n$

Atividades resolvidas

R18. Calcule o valor de x na equação:

$$\binom{5}{2x} = \binom{5}{x+2}$$

Resolução

Condição de existência:

$$\begin{cases} 2x \leq 5 \Rightarrow x \leq \frac{5}{2} \\ x + 2 \leq 5 \Rightarrow x \leq 5 - 2 \Rightarrow x \leq 3 \\ x \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{Assim, } \binom{5}{2x} = \binom{5}{x+2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = x + 2 \Rightarrow x = 2 \\ \text{ou} \\ 2x + x + 2 = 5 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$S = \{1, 2\}$$

Atividades

47. Calcule os binomiais:

a) $\binom{4}{3}$

c) $\binom{n+1}{n}$

b) $\binom{9}{2}$

d) $\binom{2n}{1}$

48. Calcule o valor das expressões utilizando as propriedades dos binomiais:

a) $\binom{8}{5} + \binom{8}{3}$

b) $\binom{10}{8} - \binom{9}{7} - \binom{9}{8}$

c) $\binom{5}{3} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} - 2\binom{5}{2}$

49. Calcule o valor de x nas equações:

$$a) \binom{9}{x} = \binom{9}{3}$$

$$b) \binom{12}{2x-1} = \binom{12}{x+1}$$

Binômio de Newton

Denomina-se binômio de Newton todo binômio da forma $(a + b)^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Vamos desenvolver alguns binômios de Newton:

$$n = 0 \Rightarrow (a + b)^0 = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow (a + b)^1 = 1a + 1b$$

$$n = 2 \Rightarrow (a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$n = 3 \Rightarrow (a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$n = 4 \Rightarrow (a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

Observe os coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(a + b)^n$. Eles formam o triângulo de Pascal. Observe também que os expoentes de a decrescem de n até 0, enquanto os de b crescem de 0 a n .

Vamos agora escrever o binômio $(a + b)^n$, utilizando os coeficientes binomiais:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}a^0b^n$$

Note que, em qualquer termo do binômio, a soma dos expoentes de a e b é sempre n .

Termo geral

Um termo qualquer do binômio pode ser expresso pela fórmula do termo geral:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

em que $k + 1$ é a posição do termo e n , o expoente do binômio.

Atribuindo a k valores que variam de 0 a n , temos:

$$k = 0 \Rightarrow 1^{\text{o}} \text{ termo: } T_1 = \binom{n}{0} a^{n-0} b^0$$

$$k = 1 \Rightarrow 2^{\text{o}} \text{ termo: } T_2 = \binom{n}{1} a^{n-1} b^1$$

$$k = 2 \Rightarrow 3^{\text{o}} \text{ termo: } T_3 = \binom{n}{2} a^{n-2} b^2$$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

$$k = n \Rightarrow (n+1)^{\text{o}} \text{ termo: } T_{n+1} = \binom{n}{n} a^{n-n} b^n$$

Observe que a ordem de cada termo é sempre uma unidade maior do que o valor atribuído a k .

Atividades resolvidas

R19. Efetue o desenvolvimento de $(x+3)^4$.

Resolução

$$(x+3)^4 = \binom{4}{0} x^4 \cdot 3^0 + \binom{4}{1} x^3 \cdot 3^1 + \binom{4}{2} x^2 \cdot 3^2 + \binom{4}{3} x \cdot 3^3 + \binom{4}{4} x^0 \cdot 3^4$$

$$(x+3)^4 = 1 \cdot x^4 \cdot 1 + 4 \cdot x^3 \cdot 3 + 6 \cdot x^2 \cdot 9 + 4 \cdot x \cdot 27 + 1 \cdot 1 \cdot 81$$

$$(x+3)^4 = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$$

R20. Determine o sexto termo do desenvolvimento de $(x+2)^8$:

Resolução

Para obter o 6º termo, devemos ter $k = 5$ e $T_{k+1} = \binom{8}{k} x^{8-k} \cdot 2^k$.

Logo:

$$T_{5+1} = \binom{8}{5} x^{8-5} \cdot 2^5$$

$$T_6 = \frac{8!}{5!3!} \cdot x^3 \cdot 32 = 1792x^3$$

R21. Calcule o termo médio do desenvolvimento de $(2x - y)^8$.

Resolução

Como, nesse caso, temos 9 termos, o termo médio é o quinto.

$$T_{k+1} = \binom{8}{k} (2x)^{8-k} \cdot (-y)^k \text{ e } k = 4$$

$$T_5 = \binom{8}{4} (2x)^4 \cdot (-y)^4 = 1\,120 x^4 y^4$$

R22. Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$.

Resolução

Inicialmente, escrevemos o termo geral:

$$T_{k+1} = \binom{6}{k} (x^2)^{6-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k \Rightarrow T_{k+1} = \binom{6}{k} \frac{x^{12-2k}}{x^k}$$

$$T_{k+1} = \binom{6}{k} x^{12-3k}$$

Para que T_{k+1} seja independente de x , devemos ter:

$$12 - 3k = 0 \Rightarrow k = 4$$

Logo, o termo independente é: $T_5 = \binom{6}{4} x^0 \Rightarrow T_5 = 15$.

Atividades

50. Desenvolva os binômios

a) $(2x + 1)^4$

b) $(3x - y)^5$

c) $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^6$

d) $(4 - a)^7$

51. Determine o termo pedido no desenvolvimento dos binômios abaixo:

a) o quarto termo de $(4x + 1)^7$;

b) o sétimo termo de $(x - 1)^{10}$;

c) o quinto termo de $(x^2 - y)^8$.

52. Determine, se houver, o termo independente de x no desenvolvimento de:

a) $\left(\frac{1}{x^2} + x^3\right)^{10}$

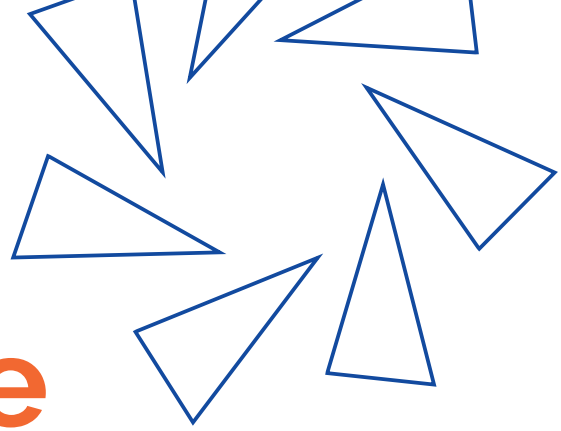
b) $\left(3x - \frac{2}{x^2}\right)^5$

53. Qual o termo em x^4 no desenvolvimento de $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$?

54. Determine o coeficiente do termo em X^2 no desenvolvimento de $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)^6$.

55. Determine a soma dos coeficientes no desenvolvimento de $(x - y)^9$.

Noção de probabilidade



Experimentos aleatórios

Experimentos aleatórios são aqueles que têm resultados imprevisíveis. Por exemplo, lançar um dado e obter a face 6, retirar 1 bola verde de uma urna na qual se encontram 3 bolas verdes e 2 vermelhas, ou apostar 6 números num jogo de loteria e acertar a quina. O estudo de probabilidades destina-se basicamente a estabelecer uma maneira de analisar experimentos aleatórios.

Espaço amostral e evento

Espaço amostral de um experimento aleatório é o conjunto dos resultados possíveis para aquele experimento.

Espaço amostral

$$E = \{r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\}$$

$r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ são os resultados possíveis

$$\left. \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_n \end{matrix} \right\} \text{ resultados possíveis}$$

Veja os exemplos:

1. Quando lançamos uma moeda, temos duas possibilidades:

- obter cara;
- obter coroa.

Logo, o espaço amostral do experimento será:

$$E = \{\text{cara, coroa}\}$$



2. Jogando um dado ideal e anotando a face voltada para cima, teremos o seguinte espaço amostral:

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Qualquer subconjunto do espaço amostral chama-se evento.

Probabilidade de um evento

Probabilidade de um evento A representa a “chance” de ocorrer um evento A . O valor $p(A)$ é igual ao número de elementos de A dividido pelo número de elementos do espaço amostral E .

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } E} = \frac{n(A)}{n(E)}$$

$p(A)$: probabilidade de um evento A .

Como $A \subset E$, temos $n(A) \leq n(E)$. Logo:

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

Em particular, se $p(A) = 0$, A será chamado evento impossível e, se $p(A) = 1$, A será chamado evento certo.

Atividades resolvidas

R23. Qual é o espaço amostral quando lançamos uma moeda duas vezes seguida? Escreva dois eventos possíveis nesse espaço amostral.

Resolução

O espaço amostral é:

$$E = \{(\text{cara, cara}); (\text{cara, coroa}); (\text{coroa, cara}); (\text{coroa, coroa})\}$$

São exemplos de eventos:

– obter 2 caras: $A = \{(\text{cara, cara})\}$

– obter ao menos 1 cara: $B = \{(\text{cara, cara}); (\text{cara, coroa}); (\text{coroa, cara})\}$

R24. Calcule a probabilidade de, jogando um dado ideal, obter um número maior que 4:

Resolução

Espaço amostral: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

evento: $A = \{5, 6\}$

$$\left. \begin{array}{l} n(A) = 2 \\ n(E) = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

R25. Calcule a probabilidade de retirar 1 bola vermelha de uma urna contendo 3 bolas brancas, 2 vermelhas e 5 verdes:

Resolução

$$\left. \begin{array}{l} 3 \text{ brancas} \\ 2 \text{ vermelhas} \\ 5 \text{ verdes} \end{array} \right\} \Rightarrow n(E) = 10 \text{ e } n(A) = 2$$

$$p(A) = \frac{2}{10} \Rightarrow p(A) = \frac{1}{5}$$

Atividades

56. Lançando-se um dado ideal, qual a probabilidade de ser obtido um número menor que 4?

57. Retira-se 1 carta ao acaso de um baralho de 52 cartas. Determine a probabilidade de ser:

a) uma dama;

b) uma dama ou um rei.

58. Qual a probabilidade de sorteio de 1 bola que não seja branca em uma urna que contém 6 bolas brancas, 2 azuis e 4 amarelas?

59. Em um avião viajam 40 brasileiros, 20 japoneses, 8 americanos e 3 árabes. Escolhendo ao acaso um passageiro, determine a probabilidade de ele:

a) ser árabe;

c) ser japonês ou americano;

b) não ser árabe;

d) ser argentino.

Observação: Se $p(A)$ é a probabilidade de A ocorrer, a probabilidade de A não ocorrer será $1 - p(A)$.

$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$, em que $\bar{A}$: evento complementar de A .

60. Em uma urna há 20 bolas, numeradas de 1 a 20. Retira-se 1 bola ao acaso. Calcule a probabilidade de seu número ser:

a) ímpar;

b) múltiplo de 3;

c) divisível por 2 e 3.

d) múltiplo de 5 e 7.

61. Um grupo de amigos organiza uma loteria cujos bilhetes são formados por 4 algarismos distintos. Qual é a probabilidade de uma pessoa que possui os bilhetes 1.387 e 7.502 ser premiada, sendo que nenhum bilhete tem como algarismo inicial o zero?

62. Lançando-se 2 dados simultaneamente, qual a chance de ocorrerem números iguais?

63. Jogando-se 2 dados simultaneamente, qual a probabilidade de se obter um número par na soma das faces?

64. São lançadas 3 moedas simultaneamente. Qual a chance de se obterem 3 caras?

65. Lançamos 2 dados: 1 azul e 1 vermelho. Sabendo que no azul apareceu o número 3, calcule a probabilidade de obtermos a soma dos números maior ou igual a 7.

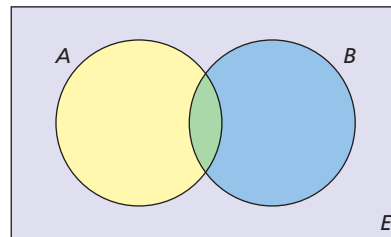
Regra da soma

Considerando dois eventos, A e B , de um mesmo espaço amostral E , a probabilidade de ocorrer A ou B ($A \cup B$) é dada por:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$p(A \cup B)$: probabilidade de A ou B

$p(A \cap B)$: probabilidade de A e B simultaneamente



Atividades resolvidas

R26. Em uma urna existem 10 bolas, numeradas de 1 a 10. Retira-se 1 bola ao acaso. Determine a probabilidade de seu número ser par ou maior que 4.

Resolução

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \Rightarrow n(E) = 10$$

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow n(A) = 5$$

$$B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} \Rightarrow n(B) = 6$$

$$A \cap B = \{6, 8, 10\} \Rightarrow n(A \cap B) = 3$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B) = \frac{5}{10} + \frac{6}{10} - \frac{3}{10} \Rightarrow p(A \cup B) = \frac{8}{10}$$

R27. Retira-se 1 carta ao acaso de um baralho de 52 cartas. Determine a probabilidade de ela ser de ouro ou ser um rei.

Resolução

$$n(E) = 52$$

$$\text{evento } A: \text{ ser de ouro} \Rightarrow n(A) = 13$$

$$\text{evento } B: \text{ ser rei} \Rightarrow n(B) = 4$$

$$\text{evento } A \cap B: \text{ ser rei de ouros} \Rightarrow n(A \cap B) = 1, \quad p(A \cup B) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$$

Atividades

66. Em uma escola de 1.200 alunos, 550 gostam apenas de rock, 230 apenas de samba e 120 gostam de samba e de rock. Escolhendo-se um aluno ao acaso, qual a probabilidade de ele gostar de samba ou de rock?

67. Em uma urna existem 10 bolas coloridas. As brancas estão numeradas de 1 a 6 e as vermelhas, de 7 a 10. Retirando-se 1, qual a probabilidade de ela ser branca ou de seu número ser maior que 7?

68. Retira-se 1 carta ao acaso de um baralho de 52 cartas. Determine a probabilidade de ela:

a) ser preta ou ser figura;

b) não ser figura ou ser um ás.

69. Uma caixa contém 1.000 bolas, numeradas de 1 a 1.000. Qual a probabilidade de se tirar, ao acaso, uma bola contendo um número par ou um número de 2 algarismos?

70. Em um grupo, 50 pessoas pertencem ao clube A, 70 ao clube B, 30 ao clube C, 20 pertencem aos clubes A e B, 22 aos clubes A e C, 18 aos clubes B e C e 10 pertencem aos três clubes. Escolhida, ao acaso, 1 das pessoas presentes, calcule a probabilidade de ela:

a) pertencer aos três clubes;

c) pertencer a dois clubes, pelo menos;

b) pertencer somente ao clube C;

d) não pertencer ao clube B.

71. Em uma urna, temos bolas brancas, amarelas, vermelhas e pretas. O número de bolas amarelas é o dobro do número de bolas brancas, e o de bolas vermelhas, o triplo. Determine a probabilidade de ser retirada uma bola preta, sabendo-se que o número de pretas é o dobro do número de amarelas.



72. Uma estação meteorológica informa: “Hoje, a probabilidade de não chover é de 55%, a probabilidade de fazer frio é de 35% e a probabilidade de chover ou fazer frio é de 80%”. Com esses dados, determine a probabilidade de:

a) chover;

b) não fazer frio;

c) não chover e não fazer frio.

73. Um homem tem em sua mão 4 cartas de espadas de um baralho comum de 52 cartas. Se ele receber mais 3 cartas, calcule a probabilidade de ao menos 1 das cartas recebidas ser também de espadas.

Regra do produto

Considerando dois eventos, A e B , de um mesmo espaço amostral, a probabilidade de ocorrer A e B é dada por:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$$

$p(A \cap B)$: probabilidade de ocorrer A e B simultaneamente

$p(B/A)$: probabilidade de ocorrer B , tendo ocorrido A

Eventos independentes

Dois eventos A e B são independentes quando a probabilidade de ocorrer um deles não depende da ocorrência do outro. Nesse caso, $p(B/A) = p(B)$. Assim, para dois eventos independentes, a regra do produto pode ser escrita:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Atividades resolvidas

R28. Considere uma urna contendo 7 bolas, numeradas de 1 a 7. Calcule a probabilidade de retirarmos a bola 1 e, em seguida, sem a reposição desta, a bola 2.

Resolução

A probabilidade de sair a bola 1 na primeira retirada é $p(A) = \frac{1}{7}$.

Restando 6 bolas na urna, a probabilidade de ocorrer a bola 2 na segunda, tendo ocorrido a bola 1 na primeira, é $p(B/A) = \frac{1}{6}$.

Como devem ocorrer os dois eventos, temos:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{42}$$

R29. Um lote de peças para automóveis contém 60 peças novas e 10 usadas. Escolhe-se 1 peça ao acaso e, em seguida, sem reposição da primeira, uma outra é retirada. Determine a probabilidade de as 2 peças serem usadas.

Resolução

$$n(E) = 70$$

$$\text{Primeira retirada } \begin{cases} n(E) = 70 \\ n(A) = 10 \end{cases} \Rightarrow p(A) = \frac{1}{7}$$

$$\text{Segunda retirada } \begin{cases} n(E) = 69 \\ n(B) = 9 \end{cases} \Rightarrow p(B) = \frac{9}{69}$$

$$p(A \cap B) = \frac{1}{7} \cdot \frac{9}{69} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{3}{161}$$

Atividades

74. Em uma urna, há 16 bolas, sendo 8 brancas, 4 azuis e 4 vermelhas. Retiram-se 2 bolas, uma após a outra. Indique a probabilidade de:

a) serem ambas vermelhas.

b) 1 ser azul e 1 ser branca, independentemente da ordem.

75. Lançando-se 1 dado e 1 moeda, qual a probabilidade de obtenção de número maior que 2 no dado e cara na moeda?

76. Jogando-se 4 dados, qual a probabilidade de se obterem 24 pontos na soma das faces?

77. Sabendo-se que, ao retirar 1 carta de um baralho de 52 cartas, ela era de copas, qual a probabilidade de que ela seja menor que 3? (Considere o ás com valor 1.)

78. Uma prova é composta de 50 testes de múltipla escolha, cada um com 5 alternativas, sendo apenas 1 correta. Qual a probabilidade de que um aluno, apenas “chutando”, acerte todas as questões?

Resumo

Princípio fundamental da contagem

Um evento E é composto pelas etapas $E_1, E_2, \dots, E_n$, que podem ocorrer de $n_1, n_2, \dots, n_n$ maneiras distintas.

$$E = E_1 \cdot E_2 \cdot \dots \cdot E_n$$

$$E = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_n$$

Fatorial

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \quad (n \in \mathbb{N})$$

Convencionou-se que $0! = 1$ e $1! = 1$

Permutação simples

$$P_n = n(n-1)(n-2) \dots 1 = n! \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$P_n = n!$$

Permutação com repetição

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \dots n_k!}, \quad (n \in \mathbb{N} \text{ e } n_1, n_2, n_3, \dots, n_k \in \mathbb{N}^*)$$

Combinação simples

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad 0 \leq p \leq n$$

Números binomiais

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \quad n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, n \geq p.$$

Binomiais complementares

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Igualdade de números binomiais

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{q} \Rightarrow \begin{cases} p = q & \text{ou} \\ p + q = n \end{cases}$$

Relação de Stifel

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Triângulo de Pascal

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
 & \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 & \binom{n}{0} & & \binom{n}{1} & & \dots & & \binom{n}{n} \\
 & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
 \end{array}$$

Propriedades do triângulo de Pascal

- Binomiais complementares ocupam posições equidistantes dos extremos de uma linha;
- somando-se dois binomiais consecutivos de uma linha, obtém-se um número que se encontra na linha seguinte, abaixo do segundo binomial somado;
- a soma dos elementos de uma linha n é igual a $2^n \Rightarrow S_n = 2^n$.

Binômio de Newton

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2}$$

$$a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Termo geral do binômio de Newton

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Noções de probabilidades

Experimentos aleatórios são aqueles que têm resultados imprevisíveis.

Espaço amostral (E) de um experimento aleatório é o conjunto dos resultados possíveis para aquele experimento.

Evento (A) é qualquer conjunto de resultados possíveis.

Probabilidade do evento A

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } E} = \frac{n(A)}{n(E)}$$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$$

$$A \subset E \Rightarrow n(A) \leq n(E) \Rightarrow 0 \leq p(A) \leq 1$$

$$p(A) = 0 \Rightarrow A \text{ é evento impossível}$$

$$p(A) = 1 \Rightarrow A \text{ é evento certo}$$

$p(\bar{A})$: probabilidade de não ocorrer A

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

Regra da soma

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$p(A \cup B)$: probabilidade de A ou B

$p(A \cap B)$: probabilidade de A e B simultaneamente

Eventos mutuamente exclusivos:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Regra do produto

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$$

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Eventos independentes

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Avalie o que aprendeu

1. Um casal pretende ter 5 filhos. Quantas são as possíveis sequências de menino ou menina?

- a) 8
- b) 16
- c) 32
- d) 48
- e) 56

2. Uma moça tem 5 saias, 6 blusas e 4 pares de sapatos. De quantas maneiras distintas ela pode se vestir usando 1 saia, 1 blusa e 1 par de sapatos?

- a) 120
- b) 60
- c) 45
- d) 30
- e) 15

3. A lanchonete "Coma Bem" oferece, na compra de 1 sanduíche, 1 refrigerante grátis. Quantas são as opções para um cliente se a lanchonete oferece 10 tipos de sanduíches e 6 tipos de refrigerantes?

- a) 15
- b) 30
- c) 45
- d) 60
- e) 120

4. Com os algarismos 0, 1, 3, 5, 6, 7 e 9, quantos são os números de algarismos distintos compreendidos entre 3.000 e 9.000?

- a) 120
- b) 480
- c) 960
- d) 1.280
- e) 5.440

5. De quantas maneiras diferentes 10 pessoas podem acomodar-se em um banco de apenas 4 lugares?

- a) 970
- b) 1.010
- c) 2.760
- d) 3.060
- e) 5.040

6. Quantas mensagens de código podem ser enviadas, contendo 10 elementos, se cada elemento ou é 0 (zero) ou é 1 (um)?

- a) 574
- b) 1.024
- c) 1.466
- d) 2.040
- e) 5.078

7. Quantos são os números naturais de 4 algarismos que possuem pelo menos dois algarismos iguais?

- a) 1.022
- b) 2.354
- c) 4.464
- d) 6.728
- e) 8.088

8. Usando o alfabeto de 26 letras, quantas palavras contendo 3 letras diferentes podem ser formadas?

- a) 4.200
- b) 6.300
- c) 8.400
- d) 10.500
- e) 15.600

9. Em um tabuleiro de xadrez 8×8 , de quantos modos podemos colocar 8 peões iguais, de modo que não haja dois peões na mesma linha ou na mesma coluna?

- a) 40.320
- b) 35.180
- c) 28.000
- d) 17.850
- e) 15.000

10. Na primeira fileira de um teatro, há 8 poltronas. De quantas maneiras podemos acomodar 6 grandes fãs de um ator que encenará uma peça nesse teatro?

- | | |
|-----------|-----------|
| a) 20.160 | d) 17.680 |
| b) 19.900 | e) 16.550 |
| c) 18.760 | |

11. Um rapaz deseja fazer 5 tatuagens diferentes em seu corpo. Ele escolheu as costas, o braço e a perna para desenhá-las. De quantas formas isso pode ser feito?

- | | |
|-------|-------|
| a) 30 | d) 60 |
| b) 40 | e) 70 |
| c) 50 | |

12. O número da chapa de um carro é par. Qual a probabilidade de o algarismo das unidades ser 2?

- | | |
|------------------|------------------|
| a) $\frac{1}{3}$ | d) $\frac{1}{9}$ |
| b) $\frac{1}{5}$ | e) 1 |
| c) $\frac{1}{7}$ | |

13. No lançamento de 2 dados, qual a probabilidade de a soma dos pontos obtidos ser maior que 7?

a) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{5}{12}$

b) $\frac{7}{9}$

e) $\frac{1}{12}$

c) $\frac{5}{9}$

14. Com os algarismos 2, 3, 4, 6 e 7 são formados números de 3 algarismos distintos. Escolhendo-se 1 deles, qual a probabilidade de esse número ser par?

a) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{3}{7}$

b) $\frac{3}{5}$

e) $\frac{5}{7}$

c) $\frac{4}{5}$

15. De um grupo de 8 pessoas, das quais 4 são morenas, 3 loiras e 1 ruiva, 1 pessoa é escolhida ao acaso. Calcule a probabilidade de ela ser ruiva.

a) 1

d) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{2}$

e) $\frac{1}{8}$

c) $\frac{1}{4}$

16. Qual a probabilidade de ser ímpar o produto de dois números escolhidos dentre os números naturais distintos de 1 a 20?

a) $\frac{9}{38}$

d) $\frac{7}{20}$

b) $\frac{9}{20}$

e) $\frac{5}{16}$

c) $\frac{7}{38}$

17. Sabendo-se que a probabilidade de que um animal adquira certa enfermidade no decurso de cada mês é igual a 30%, calcule a probabilidade de que um animal somente venha a contrair a doença no terceiro mês.

- a) 17,5%
- b) 14,7%
- c) 13,5%
- d) 11,7%
- e) 10,0%

18. Se num grupo de 15 homens e 5 mulheres sortearmos 3 pessoas para formarem uma comissão, qual a probabilidade de que ela seja formada por 2 homens e 1 mulher?

- a) $\frac{17}{35}$
- b) $\frac{33}{35}$
- c) $\frac{35}{76}$
- d) $\frac{30}{76}$
- e) $\frac{25}{76}$

19. No lançamento de dois dados, qual a probabilidade de sair soma 7, sabendo-se que ocorreu 2 no segundo dado?

- a) $\frac{1}{3}$
- b) $\frac{1}{6}$
- c) $\frac{1}{9}$
- d) $\frac{1}{12}$
- e) $\frac{1}{15}$

20. Numa escola de 300 alunos, 180 são meninas e 30 exercem a função de representante, sendo 10 meninas. Escolhendo ao acaso um desses alunos, qual é a probabilidade de que, sendo menina, seja representante?

- a) $\frac{1}{12}$
- b) $\frac{3}{12}$
- c) 1
- d) $\frac{1}{18}$
- e) $\frac{3}{18}$



Adobestock

Você já comparou as formas geométricas das construções de sua cidade com os modelos apresentados neste capítulo? Observe a silhueta do prédio do Museu do Amanhã na Praça Mauá, no Rio de Janeiro. Essas formas lembram alguma forma geométrica que você conhece do estudo da Geometria?

Capítulo 4

Geometria espacial

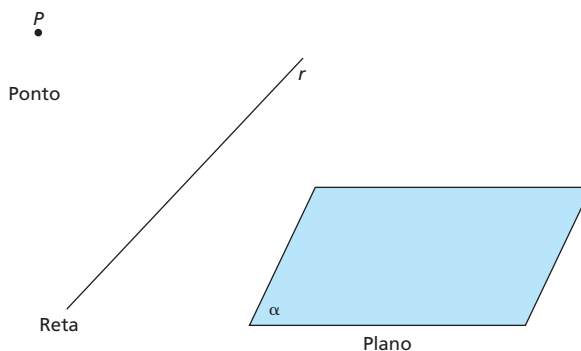
A Geometria estuda o espaço e as formas, as posições e as medidas dos corpos. É, sem dúvida, o mais antigo ramo da Matemática, pois o estímulo para seu desenvolvimento vem das relações mais diretas que os homens têm com o meio que o cerca, como, por exemplo, o domínio de dimensões físicas, como distâncias, áreas e volumes, o desenvolvimento de instrumentos e objetos úteis no dia a dia, as edificações em geral, a representação da natureza e a expressão artística.

Vamos estudar a Geometria Espacial em duas etapas: **Geometria de Posição** e **Geometria Métrica**. Na primeira, estudaremos as relações entre os elementos no espaço, e na segunda, os sólidos geométricos e suas medidas.

Geometria de posição

Conceitos primitivos, postulados e teoremas

A Geometria Espacial baseia-se em três conceitos primitivos com os quais certamente você já teve contato: o ponto, a reta e o plano.



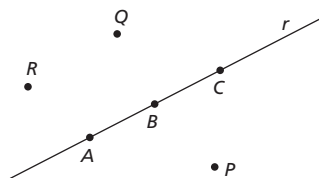
Observe que os desenhos de retas e planos representam apenas uma parte desses objetos. Os pontos são usualmente representados por letras maiúsculas: $A, B, C, \dots, P, Q, \dots$, as retas, por letras minúsculas: $a, b, c, \dots, r, s, \dots$, e os planos, por letras minúsculas do alfabeto grego: $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

A partir dos **conceitos primitivos** e **postulados** são formuladas as **definições**, que caracterizam situações ou objetos específicos. Com base nos conceitos primitivos, postulados e definições, que são proposições admitidas sem demonstração, constroem-se proposições elaboradas, que podem ser demonstradas. Essas proposições são chamadas **teoremas**.

Postulados de existência

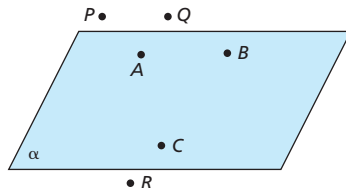
Postulado 1. Existem ponto, reta e plano.

Postulado 2. Em uma reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.



$$\left. \begin{array}{l} A \in r \\ B \in r \\ C \in r \end{array} \right\} \Rightarrow A, B \text{ e } C \text{ são pontos colineares}$$

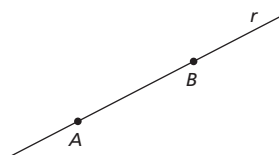
Postulado 3. Em um plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos.



$$\left. \begin{array}{l} A \in r \\ B \in r \\ C \in r \end{array} \right\} \Rightarrow A, B \text{ e } C \text{ são pontos coplanares}$$

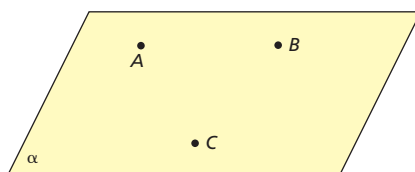
Postulados de determinação

Postulado 4. Dois pontos distintos determinam uma única reta.



$$\begin{array}{c} \leftrightarrow \\ r = AB \end{array}$$

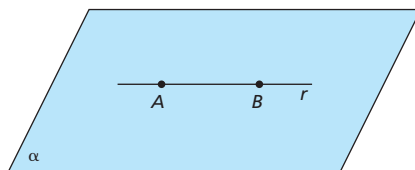
Postulado 5. Três pontos não colineares determinam um único plano.



$$\alpha = (A, B, C)$$

Postulado de inclusão

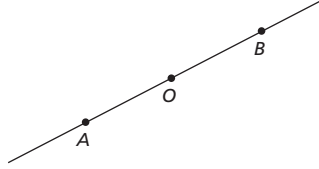
Postulado 6. Uma reta que possui dois pontos distintos em um plano está contida nesse plano.



$$\left. \begin{array}{l} A \in r \\ B \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r = \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$$

Postulado de divisão

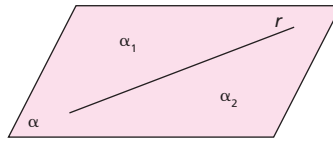
Postulado 7. Um ponto qualquer de uma reta divide-a em duas partes:



$\overrightarrow{OA}$: semi-reta de origem O na direção de A .

$\overrightarrow{OB}$: semi-reta de origem O na direção de B .

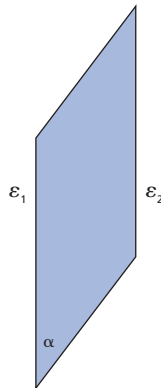
Postulado 8. Uma reta qualquer de um plano divide-o em duas partes:



$r\alpha_1$: semiplano de origem r

$r\alpha_2$: semiplano de origem r

Postulado 9. Um plano qualquer divide o espaço em duas partes:

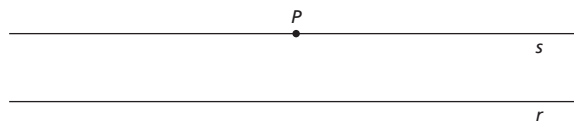


$\alpha\epsilon_1$: semiespaço de origem α

$\alpha\epsilon_2$: semiespaço de origem α

Postulado de Euclides

Postulado 10. Por um ponto fora de uma reta existe uma única reta paralela à reta dada.



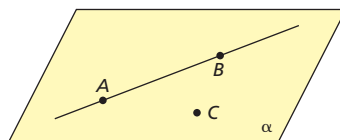
$s \parallel r$ (leia: s é paralela a r)

Atividades resolvidas

R1. Classifique como verdadeira ou falsa a afirmação: três pontos não colineares sempre determinam um plano.

Resolução

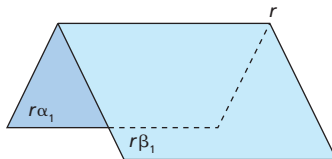
A afirmação é verdadeira. Enquanto por dois pontos passa uma única reta, três determinarão um único plano. Basta que você lembre-se de que precisamos, no mínimo, de três apoios para sustentar um objeto equilibrado.



R2. Classifique em verdadeira ou falsa a afirmação: dois semiplanos de mesma origem são sempre coplanares.

Resolução

A afirmação é falsa. Nem sempre dois semiplanos são coplanares. Observe a figura:



Atividades

1. Classifique cada afirmação a seguir como verdadeira ou falsa:

a) Uma reta tem dois pontos distintos.

b) Fora de uma reta, existem infinitos pontos.

c) Três pontos quaisquer são sempre colineares.

d) Dois pontos quaisquer são sempre colineares.

e) Fora de uma reta, existem pontos que são colineares.

f) Três pontos quaisquer sempre determinam um plano.

g) Por um ponto passam infinitas retas.

h) Por três pontos não alinhados passam três planos diferentes.

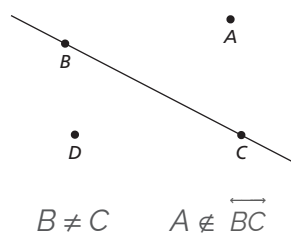
i) Uma reta que tem um ponto comum com um plano está contida nele.

j) Um ponto qualquer divide uma reta em duas semi-retas.

l) Uma reta qualquer de um plano divide-o em dois semiplanos.

m) No espaço, existem infinitas retas.

2. Classifique, de acordo com a figura, cada sentença como verdadeira ou falsa:



a) Os pontos A, B, C determinam um plano α .

b) A reta $\overleftrightarrow{AB}$ está contida no plano determinado por B, C e D .

c) A reta $\overleftrightarrow{BC}$ não está contida no plano determinado por A, D e C .

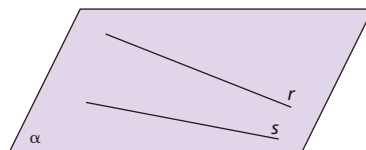
d) Qualquer reta que passe pelo ponto B está contida no plano determinado por A, C e D .

Posições relativas de duas retas

Duas retas no espaço podem pertencer a um mesmo plano. Nesse caso, são chamadas **retas coplanares**. Podem também não estar no mesmo plano. Nessas condições, são denominadas **retas reversas**. As retas coplanares podem ser concorrentes ou paralelas, enquanto as retas reversas podem ser ortogonais ou não ortogonais. Vamos examinar cada uma dessas situações.

Retas coplanares

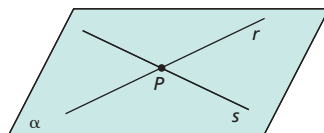
São aquelas que estão contidas em um mesmo plano.



$$\left. \begin{array}{l} r \subset \alpha \\ s \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow r, s \text{ coplanares}$$

Duas retas coplanares r e s podem ser:

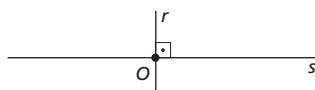
a) **concorrentes**: r e s têm um único ponto comum.



$$r \cap s = \{P\}$$

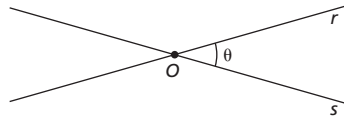
De acordo com o ângulo que formam entre si, duas retas concorrentes podem ser:

– **perpendiculares**: r e s formam ângulo reto.



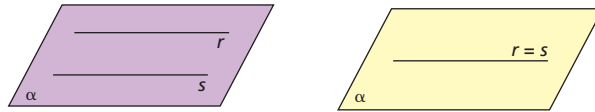
$$r \perp s \text{ (leia: } r \text{ é perpendicular a } s)$$

– **obliquas**: r e s não são perpendiculares.



$$\theta \neq 0^\circ \text{ e } \theta \neq 90^\circ$$

b) **paralelas**: r e s não têm ponto comum, ou r e s são coincidentes.



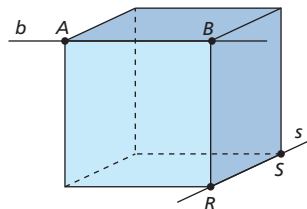
$$\left. \begin{array}{l} r \subset \alpha \\ s \subset \alpha \\ r \cap s = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow \text{paralelas distintas}$$

$$\left. \begin{array}{l} r \subset \alpha \\ s \subset \alpha \\ r \cap s = r = s \end{array} \right\} \Rightarrow \text{paralelas coincidentes}$$

Convencionou-se que o ângulo entre duas retas paralelas é de 0° .

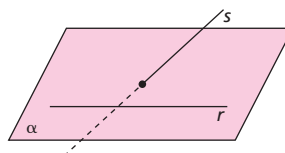
Retas reversas

Quaisquer duas retas que não estão contidas em um mesmo plano são denominadas retas reversas.



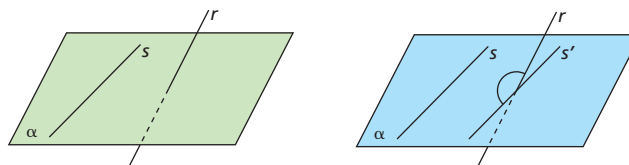
$$b = \overleftrightarrow{AB} \quad s = \overleftrightarrow{RS}$$

Observe na figura que não existe plano que contenha simultaneamente as retas b e s .
Duas retas reversas não têm ponto comum.

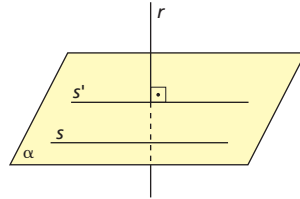


$$r \cap s = \emptyset$$

Chamamos ângulo entre duas retas reversas o ângulo formado por duas outras retas, respectivamente paralelas a cada uma das retas reversas, traçadas por um ponto qualquer.



Quando esse ângulo é 90° , as retas recebem o nome de ortogonais.



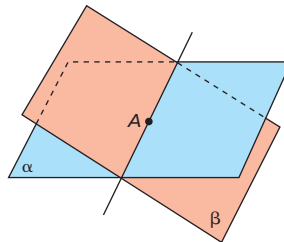
$$\left. \begin{array}{l} r, s \text{ reversas} \\ s // s' \\ r \perp s' \end{array} \right\} \Rightarrow r \text{ é ortogonal a } s (r \perp s)$$

Atividades resolvidas

R3. Se dois planos distintos têm um ponto comum, então eles têm uma reta comum que passa pelo ponto. Classifique em verdadeira ou falsa essa afirmação.

Resolução

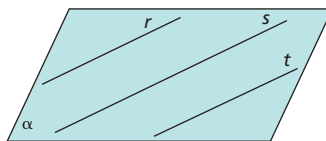
A afirmação é verdadeira. Os planos α e β têm em comum a reta que passa por A.



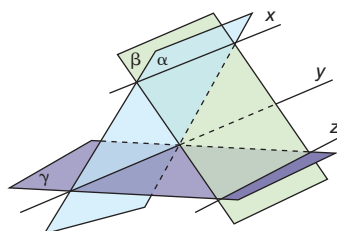
R4. Verifique, por meio de figuras, que três retas paralelas, duas a duas, ou estão no mesmo plano ou determinam três planos, dois a dois concorrentes.

Resolução

Na primeira figura, r , s e t estão no mesmo plano e são paralelas duas a duas.



Na segunda, cada par de paralelas está num plano diferente e as retas x , y e z são interseções dos planos α e β , α e γ e β e γ , respectivamente.



Atividades

3. Classifique cada afirmação a seguir como verdadeira ou falsa:

a) Duas retas reversas são sempre distintas.

b) Duas retas que não têm ponto comum são paralelas.

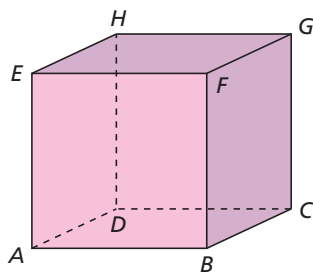
c) Duas retas que não têm ponto comum são reversas.

d) Duas retas distintas ou são reversas, ou são paralelas, ou são concorrentes.

e) Duas retas de um mesmo plano são paralelas ou concorrentes.

f) Duas retas que têm um ponto comum são concorrentes.

4. Neste cubo, localize três pares de retas:



a) concorrentes;

b) paralelas;

c) reversas.

5. Classifique como verdadeira ou falsa cada afirmação a seguir:

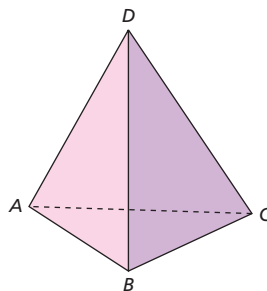
a) Se dois planos têm uma reta comum, eles têm um ponto comum.

b) Dois planos distintos podem ter em comum apenas três pontos não colineares.

c) Dois planos podem ter um único ponto comum.

6. Verifique, por meio de uma figura, que três retas concorrentes duas a duas e que não passam por um mesmo ponto estão em um mesmo plano.

7. Na pirâmide a seguir, considere as retas que ficam determinadas por dois de seus vértices, A, B, C, D . Determine quantos e quais são os pares de retas reversas.

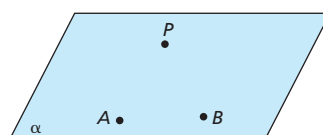


Determinação de planos

Existem quatro maneiras para se determinar um plano:

A primeira é o postulado que já enunciamos.

– Três pontos não colineares:

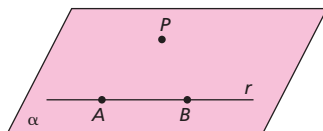


$$\alpha = (A, B, P)$$

A segunda maneira é um teorema que pode ser demonstrado.

– Uma reta r e um ponto P fora dela:

$$\left. \begin{array}{l} A \in r \\ B \in r \\ P \notin r \end{array} \right\} \Rightarrow A, B \text{ e } P \text{ não colineares.}$$

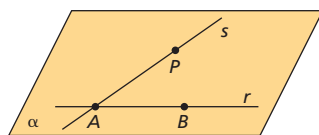


$$\alpha = (r, P)$$

A terceira maneira também é um teorema que pode ser demonstrado.

– Duas retas r e s concorrentes:

$$\left. \begin{array}{l} A = r \cap s \\ B \in r, B \notin s \\ P \in s, P \notin r \end{array} \right\} \Rightarrow A, B \text{ e } P \text{ não colineares}$$

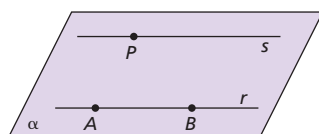


$$\alpha = (r, s)$$

A quarta maneira também é um teorema que pode ser demonstrado.

– Duas retas r e s paralelas distintas:

$$\left. \begin{array}{l} P \in s, P \notin r \\ A \in r, A \notin s \\ B \in r, B \notin s \end{array} \right\} \Rightarrow A, B \text{ e } P \text{ não colineares}$$



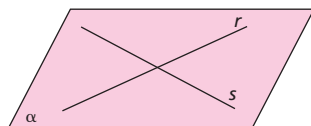
$$\alpha = (r, s)$$

Atividades resolvidas

R5. Podemos dizer que duas retas concorrentes determinam quatro planos?

Resolução

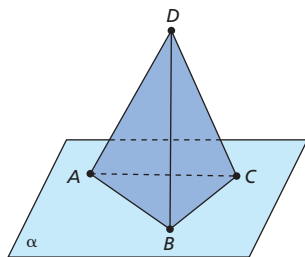
Não, duas retas concorrentes determinam um único plano.



R6. Quantos planos ficam determinados por quatro pontos não coplanares?

Resolução

Observe na figura que os quatro pontos não coplanares determinam quatro planos.



$$\alpha = (A, B, C) \quad \beta = (B, C, D) \quad \gamma = (A, C, D) \quad \theta = (A, B, D)$$

Atividades

8. Classifique cada sentença a seguir como verdadeira ou falsa:

a) Duas retas quaisquer determinam um plano.

b) Uma reta e um ponto sempre determinam um plano.

c) Três pontos distintos determinam um plano.

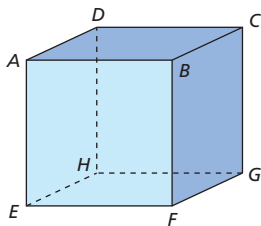
d) Duas retas distintas e coplanares determinam um plano.

e) Três retas paralelas quaisquer são sempre coplanares.

f) Três retas concorrentes quaisquer são sempre coplanares.

g) Duas retas reversas determinam um plano.

9. Quantos planos ficam determinados pelos vértices de um cubo?



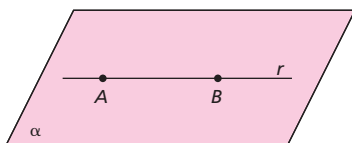
Posições relativas de reta e plano

A posição relativa entre uma reta e um plano determina três situações possíveis, dependendo do número de pontos em comum: ou a reta está contida no plano, ou é concorrente ao plano, ou é paralela a ele. Vamos estudar cada caso.

Reta contida no plano

Uma reta está contida em um plano se tiver dois pontos comuns com o plano:

$$\left. \begin{array}{l} A \neq B \\ A \in r, A \in \alpha \\ B \in r, B \in \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow r \subset \alpha \Rightarrow r \cap \alpha = r$$



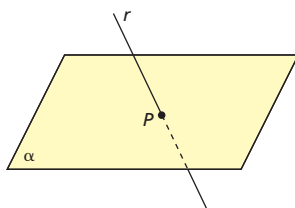
Reta concorrente ao plano

Uma reta e um plano são concorrentes se tiverem um único ponto comum:

$$\exists! P \mid \{P\} = r \cap \alpha \Leftrightarrow r \text{ e } \alpha \text{ concorrentes}$$

($\exists!$: leia existe um único)

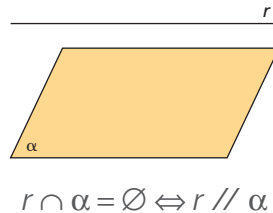
O ponto P é o ponto de intersecção entre a reta e o plano.



Reta paralela ao plano

Uma reta e um plano são paralelos quando não têm ponto comum.

Se uma reta r é paralela a um plano α , então ela será paralela ou reversa a qualquer reta do plano, pois, para uma reta $s \subset \alpha$, temos $r \cap s = \emptyset$.



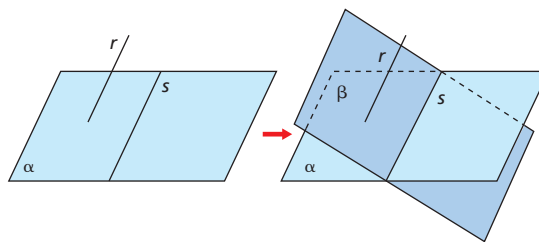
Teorema do paralelismo entre reta e plano

Vamos utilizar o teorema do paralelismo entre uma reta e um plano, que é extremamente importante no estudo da Geometria, para introduzirmos o método de demonstração de um teorema. Inicialmente, lemos a proposição do teorema e dela extraímos a hipótese, conjunto de informações que utilizaremos para a demonstração da tese.

Se uma reta não está contida em um plano e é paralela a uma reta do plano, então ela é paralela ao plano.

$$\text{Hipótese } \begin{cases} r \not\subset \alpha \\ s \subset \alpha \\ r // s \end{cases} \quad \text{Tese: } r // \alpha$$

Demonstração:



$$r // s \Rightarrow \exists \beta = (r, s)$$

Sabemos que $r \subset \beta$ e $\alpha \cap \beta = s$.

Se ocorrer que $r \cap \alpha = \{P\}$, teremos $P \in r$ e $P \in s$, que contraria a hipótese $r // s$.

Logo, $r \cap \alpha = \emptyset$ e $r // \alpha$.

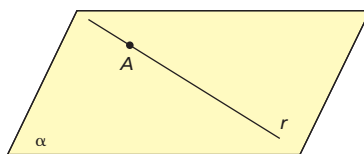
O recíproco desse teorema também pode ser demonstrado: se uma reta está não contida em um plano e é paralela a ele, então essa reta é paralela a uma reta desse plano.

Atividades resolvidas

R7. Uma reta e um plano que têm um ponto comum são concorrentes. Analise essa afirmação e classifique-a em verdadeira ou falsa.

Resolução

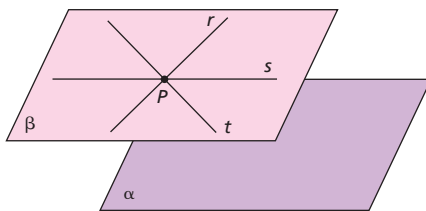
A afirmação é falsa. Se a reta estiver contida no plano, ela também terá um ponto comum com o plano.



R8. Considere um plano α e um ponto P , tal que $P \notin \alpha$. É verdadeiro ou falso afirmarmos que por P passam infinitas retas paralelas a α ?

Resolução

A afirmação é verdadeira, pois:



$$\alpha \cap \beta = \emptyset$$

$$r \subset \beta, s \subset \beta, t \subset \beta, \dots$$

$$P \in r, P \in s, P \in t, \dots$$

Atividades

10. Classifique cada sentença a seguir como verdadeira ou falsa:

a) Uma reta e um plano paralelos não têm ponto comum.

b) Uma reta que tem um ponto comum com um plano está contida nele.

c) Um plano e uma reta concorrentes têm um ponto comum.

d) Uma reta que está contida em um plano tem um ponto comum com ele.

11. Considere duas retas r e s paralelas a um plano α e classifique cada sentença abaixo como verdadeira ou falsa:

a) r e s são paralelas.

b) r e s podem ser reversas.

c) r e s são concorrentes.

d) Pode existir uma reta contida em α que seja concorrente a r ou s .

e) Pode existir uma reta concorrente com α que seja paralela a r ou s .

12. Classifique como verdadeira ou falsa cada sentença a seguir:

a) Se r é uma reta paralela a um plano α , qualquer plano β por r que cruza α o faz segundo uma reta s paralela a r .

b) Se r é uma reta não contida num plano α e s , uma reta de α que é paralela a r , então r e α são paralelos.

c) Se r é uma reta paralela a um plano α e $P \in \alpha$, e se s é uma reta por P e paralela a r , então s está contida em α .

d) Se r e s são retas paralelas distintas e r cruza o plano α , então s também cruza α .

Posições relativas de dois planos

As posições relativas de dois planos definem três categorias: planos coincidentes, planos concorrentes e planos paralelos distintos, como veremos a seguir.

Planos coincidentes

Dois planos são coincidentes se tiverem todos os pontos comuns.

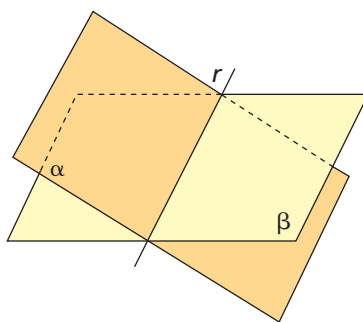
$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \alpha = \beta$$



Planos concorrentes

Dois planos distintos são concorrentes ou secantes se tiverem uma reta comum.

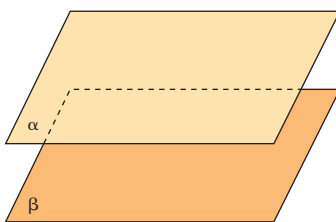
$$\exists r / \alpha \cap \beta = r \Leftrightarrow \alpha \text{ e } \beta \text{ concorrentes}$$



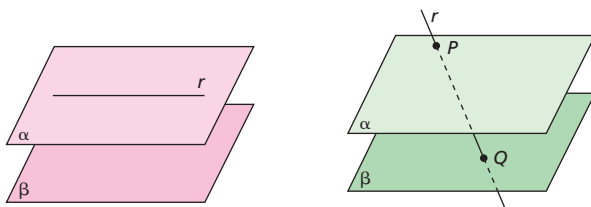
Planos paralelos distintos

Dois planos distintos são paralelos quando não tiverem ponto comum.

$$\alpha \cap \beta = \emptyset \Leftrightarrow \alpha // \beta$$



Se dois planos distintos são paralelos, então qualquer reta de um deles é paralela ao outro, e qualquer reta concorrente a um deles também é concorrente ao outro.



$$\left. \begin{array}{l} r \subset \alpha \\ \alpha \cap \beta = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow r // \beta$$

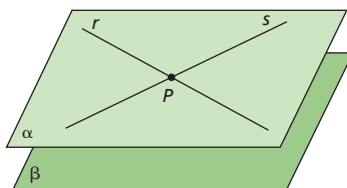
$$\left. \begin{array}{l} \alpha \cap \beta = \emptyset \\ r \cap \alpha = \{P\} \end{array} \right\} \Rightarrow r \cap \beta = \{Q\}$$

Teorema do paralelismo entre dois planos

Se um plano contém duas retas concorrentes, ambas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.

Hipótese: $r \subset \alpha, s \subset \alpha, r \cap s = \{P\}, r // \beta, s // \beta$

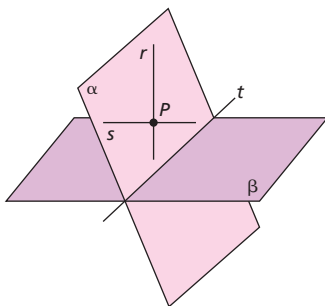
Tese: $\alpha // \beta$



Demonstração:

Se α e β não forem paralelos, então:

$$\exists t \mid t = \alpha \cap \beta$$



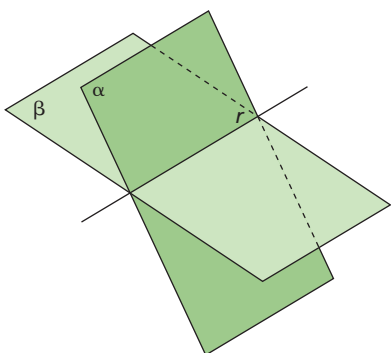
Como $r // \beta$ e $s // \beta$, teríamos $r // t$ e $s // t$, o que é absurdo, pois contraria o postulado de Euclides. Logo, $\alpha // \beta$.

Atividades resolvidas

R9. É verdadeiro ou falso dizer que dois planos concorrentes têm um único ponto comum? Justifique sua resposta.

Resolução

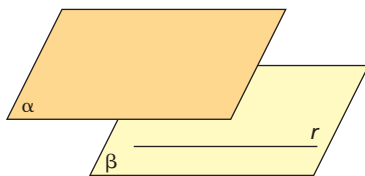
A afirmativa é falsa, pois os planos concorrentes possuem uma reta comum e esta possui infinitos pontos.



R10. Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta paralela a um deles é paralela ao outro. Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique.

Resolução

A afirmação é falsa, pois a reta pode estar contida no outro plano.



$$\left. \begin{array}{l} \alpha \neq \beta \\ \alpha // \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset$$

Se $r \subset \beta$, então $r \cap \alpha = \emptyset$.

Logo, $r // \alpha$ e r não é paralela a β .

Atividades

13. Classifique cada sentença a seguir como verdadeira ou falsa:

a) Dois planos distintos que têm um ponto comum são concorrentes.

b) Dois planos que têm uma reta comum são concorrentes.

c) Dois planos distintos que têm uma reta comum são concorrentes.

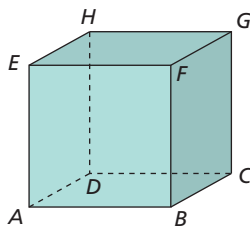
d) Dois planos que têm intersecção vazia são paralelos.

e) Dois planos que têm um ponto comum são concorrentes.

f) Dois planos coincidentes têm todos os pontos em comum.

g) Dois planos distintos que não têm uma reta comum são paralelos.

14. Classifique os pares de planos como paralelos distintos, coincidentes ou concorrentes, de acordo com a figura:



a) $\alpha = (A, B, C)$ e $\beta = (E, F, H)$

b) $\alpha = (A, B, C)$ e $\beta = (A, C, D)$

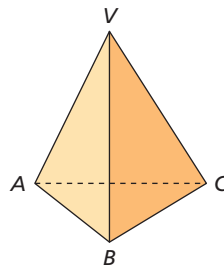
c) $\alpha = (A, D, H)$ e $\beta = (F, G, H)$

d) $\alpha = \langle D, H, G \rangle$ e $\beta = \langle F, C, B \rangle$

e) $\alpha = \langle F, A, E \rangle$ e $\beta = \langle A, B, F \rangle$

f) $\alpha = \langle H, A, E \rangle$ e $\beta = \langle A, B, C \rangle$

15. Considere os planos $\alpha = \langle A, B, C \rangle$, $\beta = \langle V, A, B \rangle$, $\gamma = \langle V, B, C \rangle$ e $\theta = \langle V, A, C \rangle$ de acordo com a figura. Determine:



a) $\alpha \cap \beta$

c) $\beta \cap \gamma$

b) $\alpha \cap \gamma$

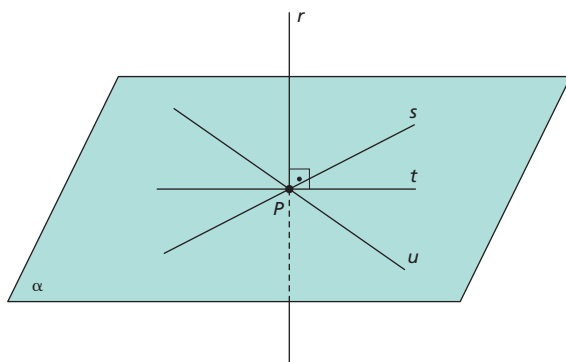
d) $\gamma \cap \theta$

Perpendicularismo

Vamos estabelecer as condições de perpendicularismo entre reta e plano e entre dois planos.

Reta e plano perpendiculares

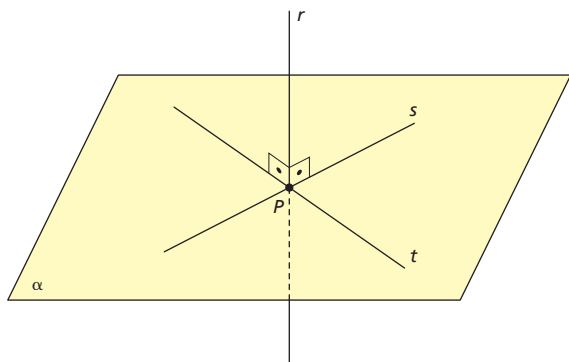
Uma reta é perpendicular a um plano se for concorrente ao plano e perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto de concorrência:



$$\left. \begin{array}{l} r \cap \alpha = \{P\} \\ s \neq t \neq \dots \neq u \neq \dots \\ s \subset \alpha, t \subset \alpha, \dots, u \subset \alpha, \dots \\ r \perp s, r \perp t, \dots, r \perp u, \dots \end{array} \right\} \Rightarrow r \perp \alpha$$

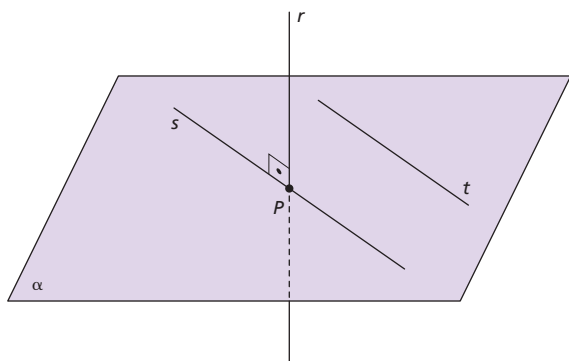
Teorema do perpendicularismo entre reta e plano

Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.



$$\left. \begin{array}{l} s \subset \alpha, t \subset \alpha \\ r \perp s \\ r \perp t \\ r \cap \alpha = \{P\} \end{array} \right\} \Rightarrow r \perp \alpha$$

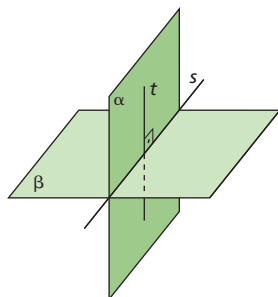
Como consequência desse teorema, podemos concluir que, se uma reta é perpendicular a um plano, ela será perpendicular ou ortogonal a qualquer reta desse plano.



$$\left. \begin{array}{l} r \perp \alpha \\ s \subset \alpha, t \subset \alpha \\ r \cap s = \{P\} \\ r \cap t = \emptyset \end{array} \right\} \Rightarrow r \perp s \text{ e } r \perp t$$

Perpendicularismo entre dois planos

Dois planos são perpendiculares se um deles contiver uma reta perpendicular ao outro.



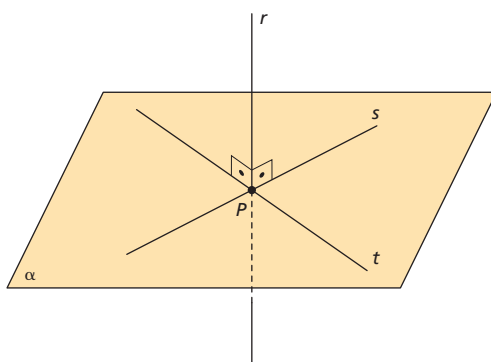
$$\left. \begin{array}{l} t \subset \alpha \\ t \perp \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

Atividades resolvidas

R11. Uma reta perpendicular a um plano é reversa a todas as retas desse plano. Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique.

Resolução

A afirmação é falsa, pois a reta será perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto comum com o plano.

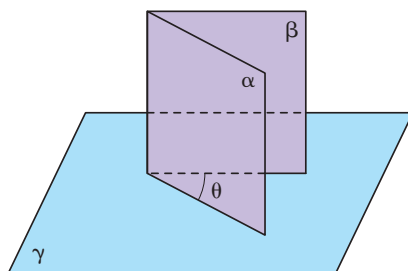


$$\left. \begin{array}{l} r \cap \alpha = \{P\} \\ r \perp \alpha \\ s \subset \alpha, P \in s \\ t \subset \alpha, P \in t \end{array} \right\} \Rightarrow r \perp s \text{ e } r \perp t$$

R12. Se dois planos são perpendiculares a um terceiro, então são perpendiculares entre si. Classifique em verdadeira ou falsa essa afirmação.

Resolução

A afirmação é falsa, pois existe o caso em que os planos α e β não são perpendiculares entre si, mas são perpendiculares a γ .



Atividades

16. Classifique cada sentença a seguir como verdadeira ou falsa:

a) Dois planos perpendiculares são secantes.

b) Uma reta perpendicular a um plano é ortogonal a todas as retas desse plano.

c) Dois planos secantes são perpendiculares.

d) Uma reta perpendicular a um plano é perpendicular a todas as retas do plano.

e) Uma reta perpendicular a um plano é perpendicular a qualquer reta desse plano.

17. Classifique cada sentença a seguir como verdadeira ou falsa, de acordo com a figura abaixo:

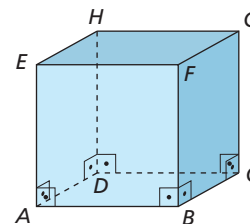
a) $\overrightarrow{FB} \perp \alpha = (A, B, C)$ _____

b) $\alpha = (A, B, C) \perp \beta = (F, G, B)$ _____

c) $\overrightarrow{HB} \perp \alpha = (A, B, C)$ _____

d) $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{GC}$ _____

e) $\theta = (H, E, A) \perp \beta = (F, G, B)$ _____



18. Classifique como verdadeira ou falsa cada sentença abaixo:

a) Se uma reta forma um ângulo reto com duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular a este.

b) Se duas retas são paralelas e uma delas é perpendicular a um plano, então a outra também é perpendicular a ele.

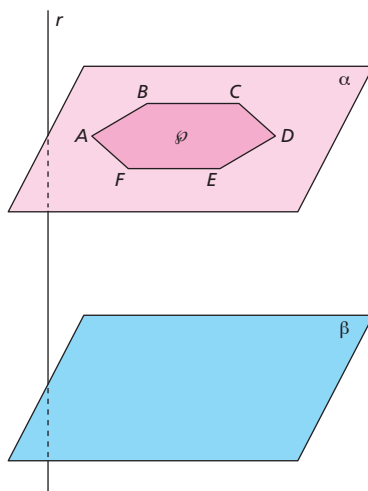
c) Se duas retas são perpendiculares a um plano, então elas são paralelas.

d) Se dois planos concorrentes são perpendiculares a um terceiro, então sua intersecção é perpendicular a este último.

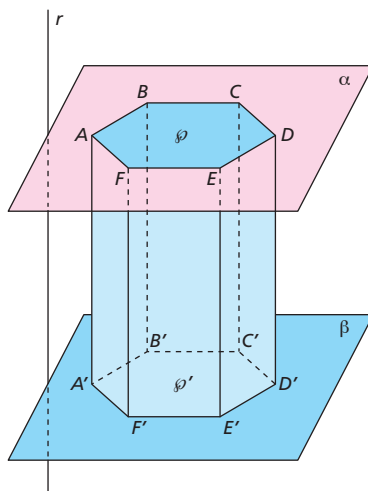
Geometria métrica

Prismas

Considere dois planos α e β paralelos, um polígono $\wp$ contido em α e uma reta r concorrente aos dois.

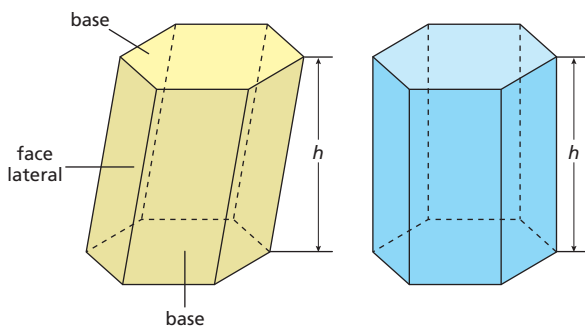


Chamamos de prisma o sólido determinado pela reunião de todos os segmentos paralelos a r , com extremidades no polígono $\wp$ e no plano β .



Em β fica determinado um polígono $\wp'$, congruente a $\wp$. Os dois polígonos são denominados bases e seus lados, arestas das bases.

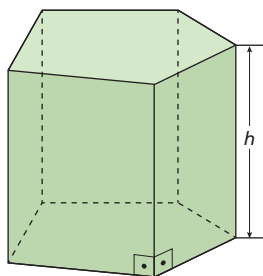
A distância entre as bases recebe o nome de altura do prisma e será igual a uma aresta lateral quando esta for perpendicular à base.



Classificação

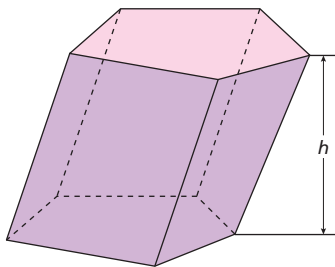
Além de ser especificado pelo polígono da base, um prisma pode ser classificado como:

– **reto**: quando as arestas laterais são perpendiculares às bases;



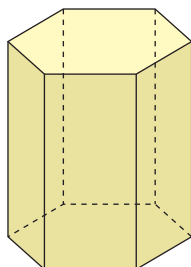
prisma reto pentagonal

– **oblíquo**: quando não é reto;



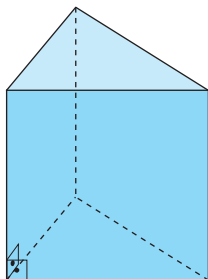
prisma oblíquo pentagonal

Um prisma é regular quando sua base é um polígono regular.

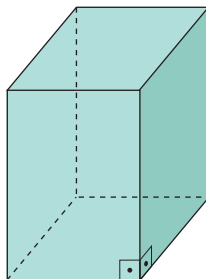


prisma reto hexagonal regular

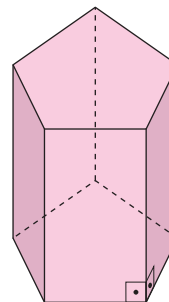
Nos prismas retos, as faces sempre são retângulos.



prisma reto triangular



prisma reto quadrangular



prisma reto pentagonal

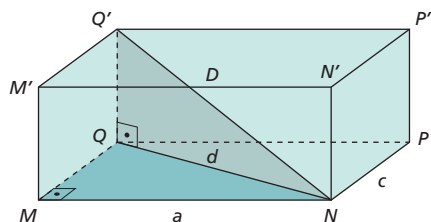
Paralelepípedos

Os prismas, cujas bases são paralelogramos, denominam-se **paralelepípedos**.



Todo paralelepípedo reto cuja base é um retângulo chama-se **paralelepípedo retângulo** ou **reto-retângulo**.

Podemos obter a diagonal D do paralelepípedo retângulo utilizando o teorema de Pitágoras.



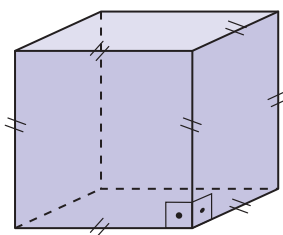
$$\triangle MNQ \text{ retângulo} \Rightarrow d^2 = a^2 + c^2$$

$$\triangle Q'QN \text{ retângulo} \Rightarrow D^2 = d^2 + b^2 = (a^2 + c^2) + b^2$$

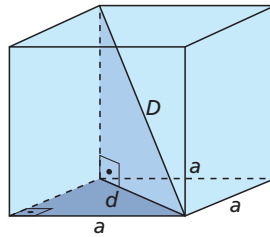
$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Cubo

Cubo é todo paralelepípedo retângulo com seis faces quadradas. Portanto, todas as arestas do cubo são congruentes.



Vamos determinar as diagonais do cubo de aresta a :



$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2$$

$$D^2 = a^2 + d^2 \Rightarrow D^2 = 3a^2$$

– diagonal da face: $d = a\sqrt{2}$

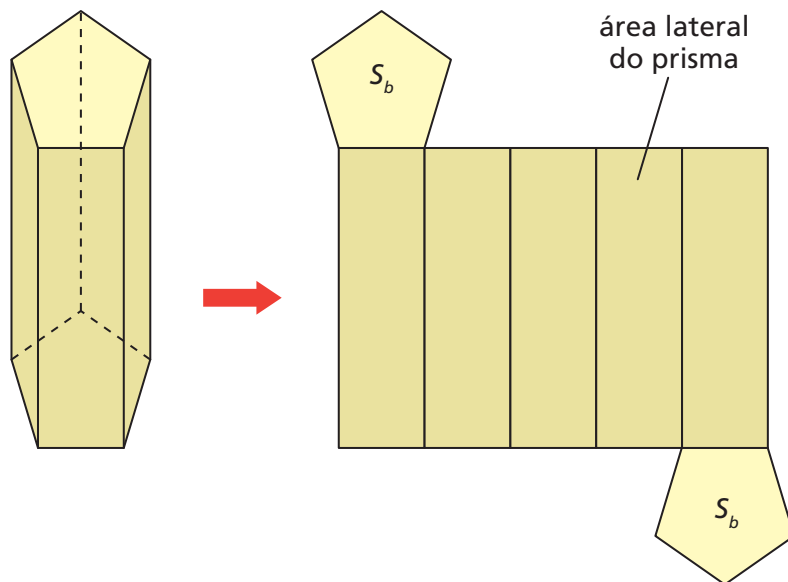
– diagonal do cubo: $D = a\sqrt{3}$

Áreas e volume do prisma

Calcula-se a área lateral de um prisma somando as áreas das faces laterais. No caso de um prisma regular, a área lateral (S_ℓ) é dada por:

$S_\ell = n \cdot (\text{área de um retângulo})$, em que n é o número de arestas da base.

Observe, por exemplo, a área lateral de um prisma pentagonal regular:

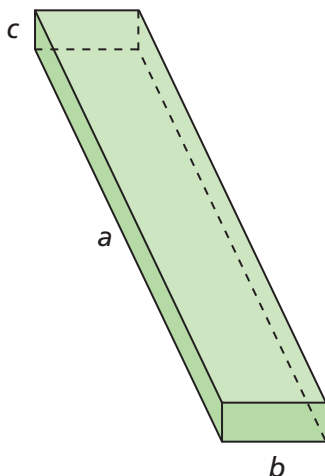


$$S_\ell = 5 \cdot (\text{área de um retângulo})$$

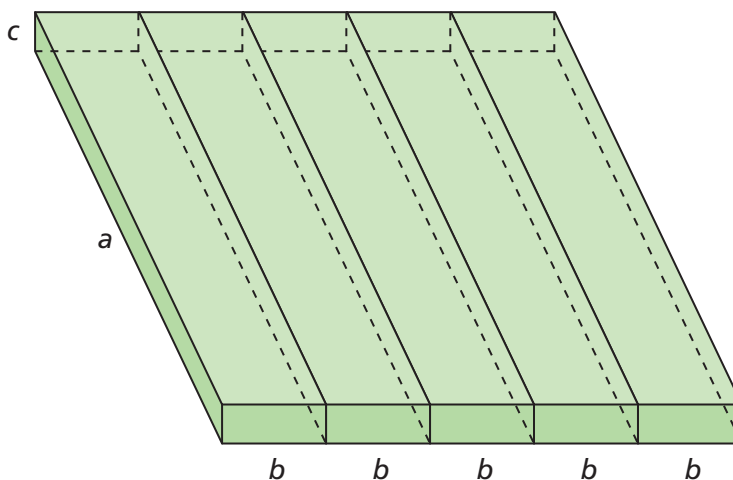
Calcula-se a área total de um prisma somando a área lateral (S_ℓ) com as áreas das bases (S_b).

$$S_t = 2 \cdot S_b + S_\ell$$

Antes de estabelecermos a fórmula para o cálculo do volume de um prisma, vamos determinar o volume de um paralelepípedo retângulo.



Para obter seu volume, devemos observar que ele é proporcional a cada uma de suas dimensões. Isso quer dizer que se mantivermos, por exemplo, constantes o comprimento a e a altura c , e se multiplicarmos a largura b por um número natural n , o volume ficará também multiplicado por n .



O volume total é 5 vezes maior que qualquer um dos paralelepípedos.

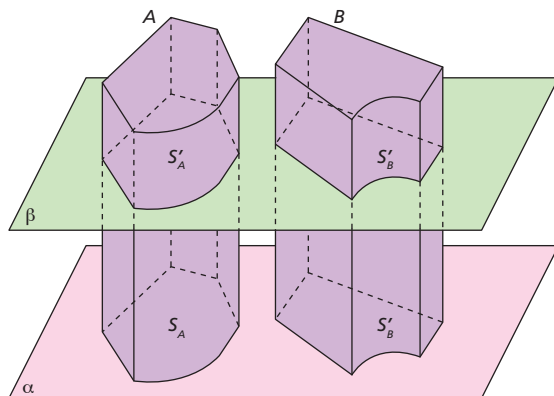
Esse fato pode ser generalizado para qualquer número real e isso quer dizer que, mantidas constantes duas dimensões de um paralelepípedo retângulo, seu volume é proporcional à terceira dimensão. Logo, sendo a, b e c as dimensões de um paralelepípedo retângulo, temos:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Como o produto ab é a área da base, é costume dizer que o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto da área base pela altura.

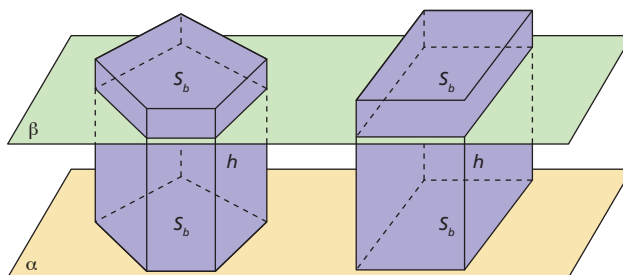
$$V = S_b \cdot h$$

Agora vamos enunciar um axioma que fundamenta o cálculo do volume de sólidos em geral. Trata-se do **Princípio de Cavalieri**: são dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm mesmo volume.



Para o cálculo do volume de um prisma qualquer, aplicamos o princípio de Cavalieri.

Dado um prisma qualquer, de área da base S_b e altura h , sempre é possível encontrar um paralelepípedo retângulo de área da base S_b e altura h .

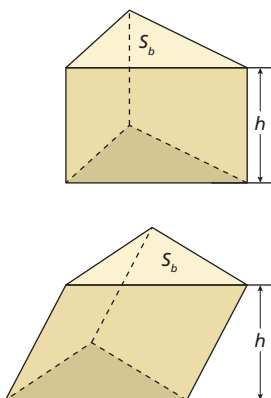


$\alpha \parallel \beta$ e volume do paralelepípedo = $S_b \cdot h$

Como as secções determinadas no prisma e no paralelepípedo por um plano $\beta \parallel \alpha$ têm a mesma área, os sólidos têm o mesmo volume. Logo, o volume do prisma é igual ao volume do paralelepípedo retângulo de mesma área da base S_b e mesma altura h .

$$V = S_b \cdot h$$

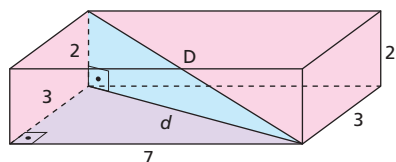
É importante salientar que o volume do prisma depende exclusivamente da área da base e da altura. Isso significa que um prisma reto e um oblíquo que tenham mesma base e mesma altura têm o mesmo volume.



Atividades resolvidas

R13. Calcule a diagonal de um paralelepípedo retângulo de dimensões 2 cm, 3 cm e 7 cm.

Resolução



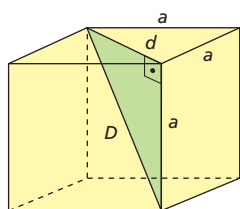
$$D^2 = 2^2 + d^2$$

Como $d^2 = 3^2 + 7^2$, temos:

$$D^2 = 2^2 + 3^2 + 7^2 \Rightarrow D = \sqrt{62} \text{ cm}$$

R14. Determine as diagonais de um cubo de aresta $a = 2$ m.

Resolução



$$d^2 = 2a^2 \Rightarrow d^2 = 8$$

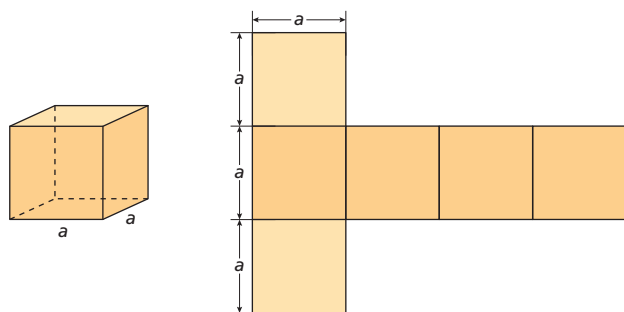
$$d = 2\sqrt{2} \text{ m}$$

$$D^2 = 3a^2 \Rightarrow D^2 = 12$$

$$D = 2\sqrt{3} \text{ m}$$

R15. Determine a área lateral, a área da base, a área total e o volume de um cubo de aresta a .

Resolução



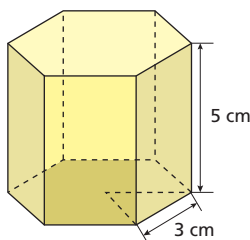
$$\left. \begin{array}{l} S_{\ell} = 4 \cdot a^2 \\ S_b = a^2 \end{array} \right\} \Rightarrow S_t = 6a^2$$

$$V = S_b \cdot h$$

$$V = a^2 \cdot a \Rightarrow V = a^3$$

R16. Um prisma reto hexagonal regular tem 5 cm de altura e a aresta da base mede 3 cm. Determine:

- a) a área da base;
- b) o volume;
- c) a área lateral.



Resolução

a) Área da base (hexágono regular):

$$S_b = 6 \cdot (\text{área do triângulo equilátero})$$

$$\text{Área do triângulo equilátero} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$S_b = 6 \cdot \frac{3^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_b = \frac{27\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$$

b) Volume:

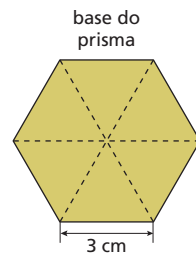
$$V = S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{27\sqrt{3}}{2} \cdot 5$$

$$V = \frac{135\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^3$$

c) Área lateral:

$$S_l = 6 \cdot (\text{área de um retângulo})$$

$$S_l = 6 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow S_l = 90 \text{ cm}^2$$



Atividades

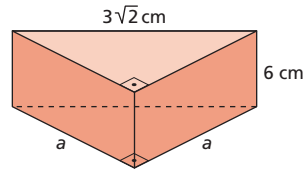
19. Em um prisma triangular regular, a aresta da base e a altura medem 3 cm. Determine o volume e a área lateral desse prisma.

20. Calcule a diagonal de um paralelepípedo de dimensões 4 m, 6 m e 8 m.

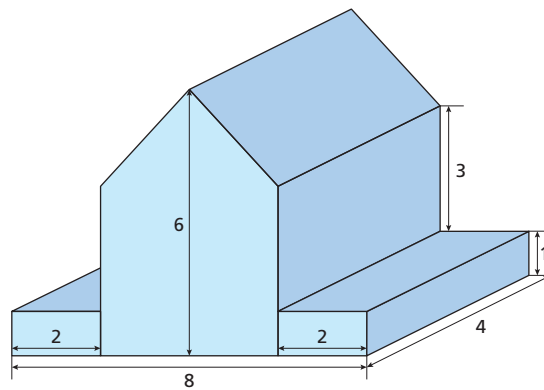
21. Qual o volume de ar contido em uma sala de 5 m de largura, 4 m de profundidade e pé-direito (altura) de 2,5 m?

22. Quanto mede a aresta de um cubo de 27 m³?

23. Em um prisma triangular reto, a base é um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa igual a $3\sqrt{2}$ cm. Determine a área lateral, a área da base, a área total e o volume do prisma, sabendo que sua altura é 6 cm.



24. Calcule o volume desse sólido. As medidas estão indicadas em metros.



25. Um prisma hexagonal regular tem 6 cm de altura e a aresta da base mede 4 cm. Determine:

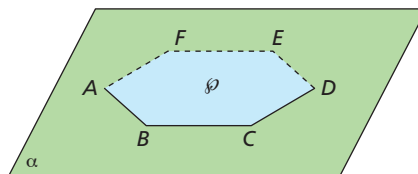
a) a área da base;

b) o volume;

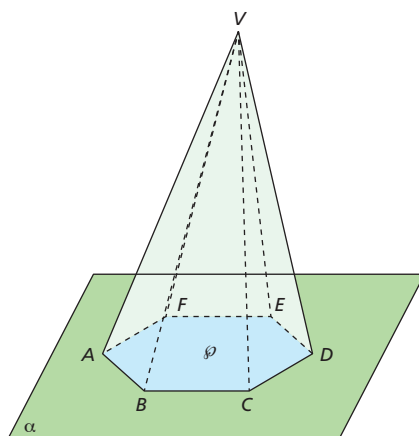
c) a área lateral.

Pirâmides

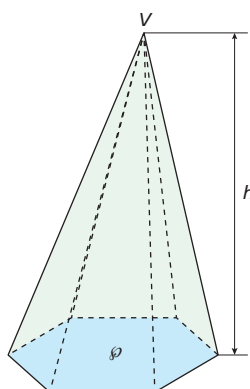
Considere um polígono $\wp$ contido em um plano α e um ponto V fora de α .



Chamamos de pirâmide o sólido determinado pela reunião de todos os segmentos com uma extremidade em V e outra no polígono $\wp$.

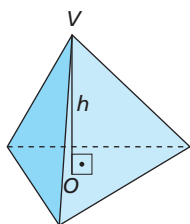


O polígono $\wp$ é a base da pirâmide. Note que as faces de uma pirâmide são triângulos e que a distância de V a $\wp$ é a altura h da pirâmide.

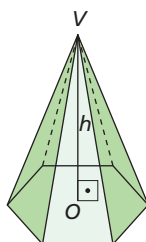


Classificação

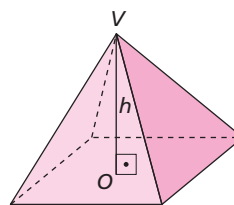
As pirâmides são também classificadas quanto ao número de lados da base. Uma pirâmide é reta quando as arestas laterais forem congruentes e é regular quando sua base é um polígono regular, e a projeção do vértice V sobre o plano da base coincide com o centro da base.



pirâmide regular
triangular



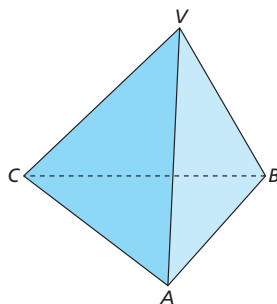
pirâmide regular
hexagonal



pirâmide regular
quadrangular

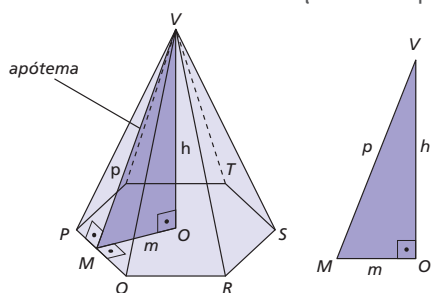
Tetraedro

Tetraedro é toda pirâmide de base triangular. Se as quatro faces forem congruentes, teremos um tetraedro regular. No tetraedro regular, cada face é um triângulo equilátero.



Apótema da pirâmide regular

Apótema de uma pirâmide regular é a altura de uma face lateral em relação à aresta da base. Lembre-se que, se a pirâmide é regular, cada face lateral é um triângulo isósceles.



p : apótema da pirâmide

m : apótema da base

h : altura

M : ponto médio de $\overline{PQ}$

O : centro da base

A partir do triângulo retângulo MOV , podemos obter uma importante relação entre o apótema da pirâmide, o apótema da base e a altura da pirâmide.

$$p^2 = m^2 + h^2$$

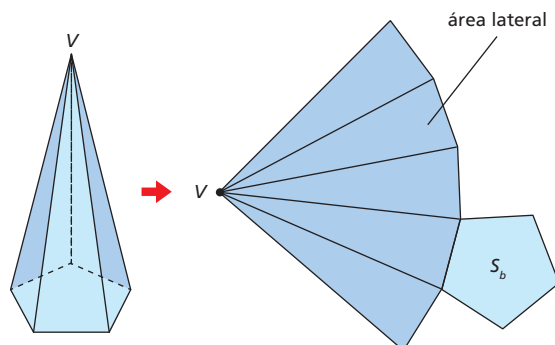
Áreas e volume da pirâmide

A área lateral de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais. Se a pirâmide for reta e regular e sua base um polígono de n lados, a área lateral será dada por:

$$S_\ell = n \cdot (\text{área de um triângulo})$$

Observe, por exemplo, a área lateral de uma pirâmide pentagonal:

$$S_\ell = 5 \cdot (\text{área de um triângulo})$$



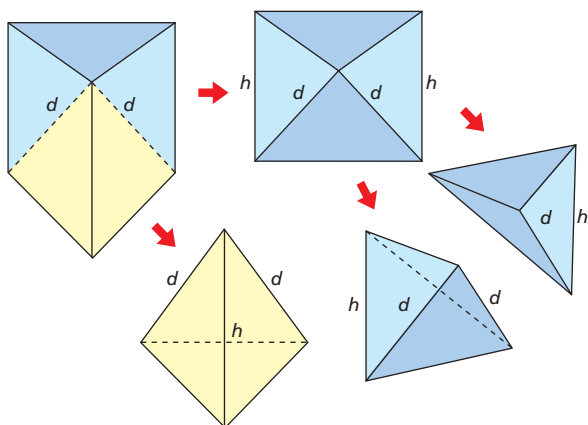
A área total será dada por:

$$S_t = S_b + S_\ell$$

O volume de uma pirâmide é a terça parte do volume de um prisma regular de mesma base e mesma altura:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h$$

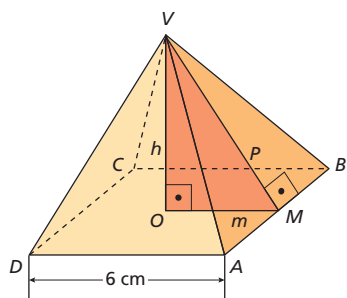
Observe na figura como o prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides de mesma base. Tome como referência os segmentos de comprimento d traçados em duas faces do prisma.



Atividades resolvidas

R17. Uma pirâmide quadrangular regular tem 4 m de altura e a aresta da base mede 6 m. Calcule seu volume e as áreas.

Resolução



$$m = \frac{AD}{2} \Rightarrow m = 3 \text{ m}$$

ΔVOM é retângulo $\Rightarrow$

$$\Rightarrow p^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow p^2 = 4^2 + 3^2$$

$$p = 5 \text{ m}$$

Volume da pirâmide:

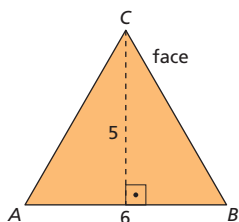
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 \Rightarrow V = 48 \text{ m}^3$$

Área de cada face:

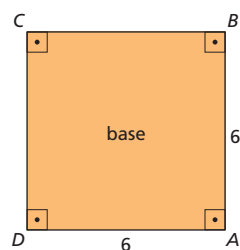
$$S_f = \frac{6 \cdot 5}{2} \Rightarrow S_f = 15 \text{ m}^2$$

Área lateral:

$$S_\ell = 4 \cdot 15 \Rightarrow S_\ell = 60 \text{ m}^2$$



Área da base:



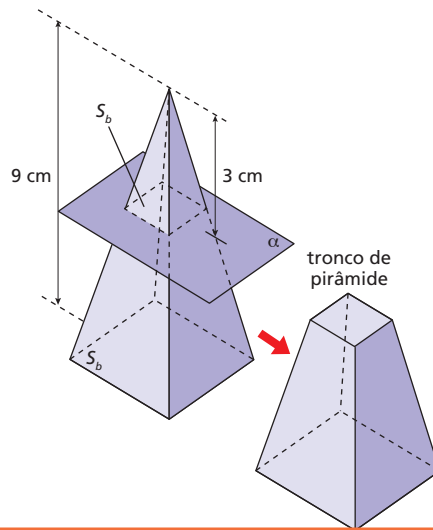
$$S_b = 36 \text{ m}^2$$

Área total:

$$S_t = S_\ell + S_b$$

$$S_t = 96 \text{ m}^2$$

R18. Uma pirâmide quadrangular tem 9 cm de altura, e a área da base é igual a 180 cm². Um plano α , paralelo à base, secciona a pirâmide a 3 cm do vértice, originando uma nova pirâmide cuja base tem 20 cm². Qual o volume do tronco de pirâmide obtido?



Resolução

$$V_T = V_p - V'_p$$

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h - \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h'$$

$$V_T = \frac{180 \cdot 9}{3} - \frac{20 \cdot 3}{3}$$

$$V_T = 520 \text{ cm}^3$$

Atividades

26. Determine a área total e o volume de um tetraedro regular cuja aresta mede 2 m.

27. Uma pirâmide regular triangular tem 5 cm de altura e o apótema da base mede 4 cm. Calcule o volume da pirâmide.

28. Uma pirâmide regular hexagonal tem 4 cm de altura e a aresta da base mede 2 cm. Determine:

a) a área da base;

b) a área lateral;

c) o volume.

29. Considere uma pirâmide quadrangular regular inscrita em um cubo de 2 cm de aresta. Pede-se:

a) a área lateral da pirâmide;

b) a área total da pirâmide;

c) o volume da pirâmide;

d) a razão entre os volumes da pirâmide e do cubo;

e) a razão entre as áreas totais da pirâmide e do cubo.

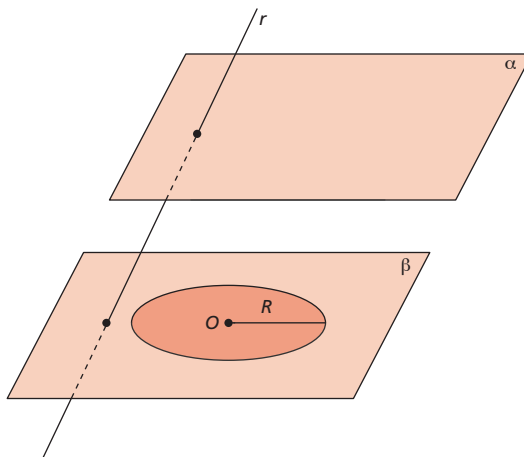
30. Um prisma de base pentagonal tem 360 m^3 de volume. Qual o volume de uma pirâmide com mesma base e mesma altura?

31. Um prisma de base hexagonal tem 420 m^3 de volume. Qual o volume de uma pirâmide de mesma base e de altura igual à metade da altura do prisma?

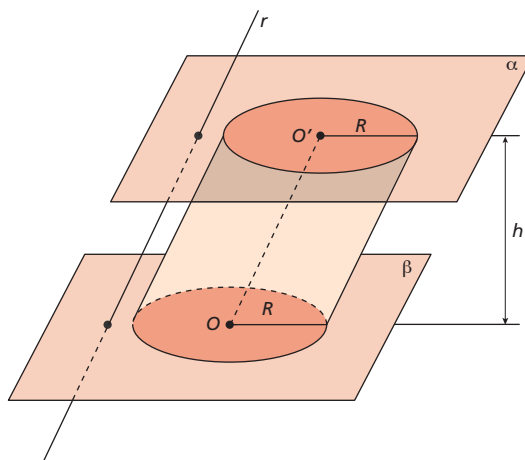
32. Uma pirâmide hexagonal tem $9\sqrt{3} \text{ cm}$ de altura, e a área da base é igual a 120 cm^2 . Um plano α , paralelo à base, secciona a pirâmide a $2\sqrt{3} \text{ cm}$ do vértice, originando uma nova pirâmide cuja base tem 18 cm^2 . Qual o volume do tronco de pirâmide obtido?

Cilindros

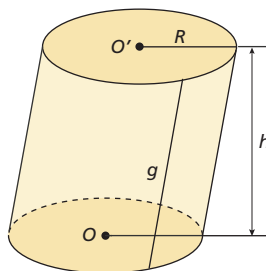
Considere dois planos, α e β , paralelos, um círculo de centro O e raio R contido em um deles, e uma reta r concorrente com os dois.



Chamamos de cilindro o sólido determinado pela reunião de todos os segmentos paralelos a r , com extremidades no círculo e no outro plano.

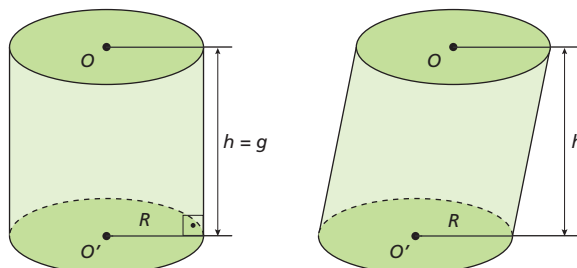


Qualquer segmento paralelo a r , com extremidades nas duas circunferências, é chamado geratriz do cilindro, e o segmento com extremidades nos centros O e O' dos círculos é denominado eixo do cilindro. A distância entre os planos α e β é a altura h do cilindro.



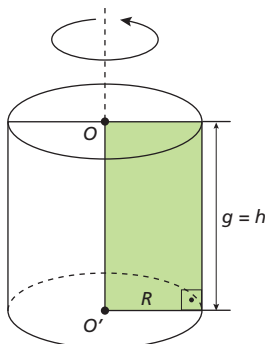
Classificação

Um cilindro é classificado segundo o ângulo formado pela geratriz com os planos das bases:



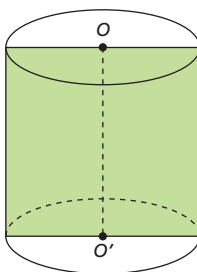
- reto: geratriz perpendicular às bases e igual à altura;
- oblíquo: todo cilindro que não é reto.

O cilindro reto é também chamado de **cilindro de revolução**, pois pode ser obtido pela rotação de um retângulo em torno de um de seus lados.

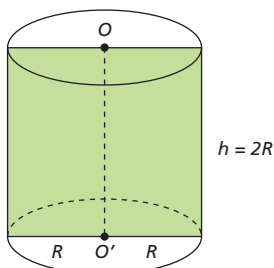


Secção meridiana do cilindro

Chamamos de secção meridiana do cilindro à intersecção do cilindro com um plano que contém seu eixo:



Quando a altura de um cilindro reto é igual a $2R$, a secção meridiana é um quadrado de lado $2R$, e este cilindro é denominado **cilindro equilátero**.



Áreas e volume do cilindro reto

A área de cada base do cilindro reto depende do raio R e é dada por:

$$S_b = \pi R^2$$

Vamos calcular a área lateral:

$$S_\ell = 2\pi R h \text{ ou } S_\ell = 2\pi R g$$

A área total será:

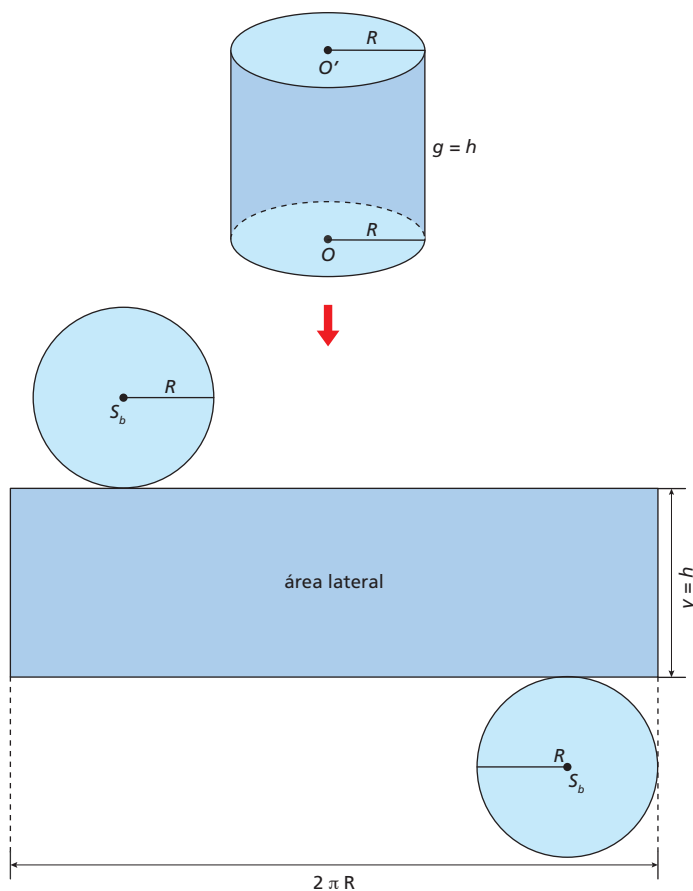
$$S_t = S_\ell + 2S_b$$

Como $S_b = \pi R^2$ e $S_\ell = 2\pi R g$,

$$S_t = 2\pi R g + 2\pi R^2$$

O princípio de Cavalieri também nos permite concluir que o volume do cilindro reto é dado pelo produto da área da base pela altura ou pela geratriz:

$$V = \pi R^2 \cdot h \text{ ou } V = \pi R^2 \cdot g$$



Atividades resolvidas

R19. Em um cilindro reto de 6 m de altura, o raio da base mede 3 m. Determine sua área lateral e seu volume.

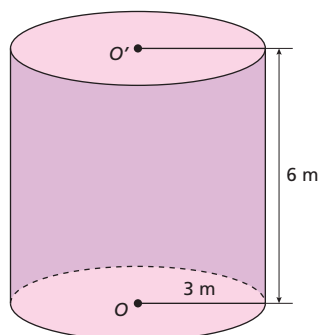
Resolução

$$S_\ell = 2\pi R \cdot h \Rightarrow S_\ell = 2\pi \cdot 3 \cdot 6 \Rightarrow S_\ell = 36\pi \text{ m}^2$$

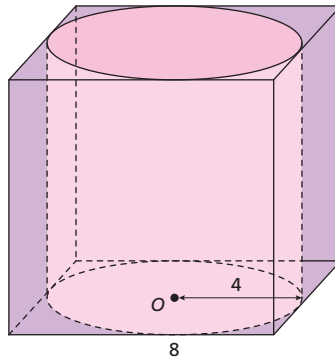
$$S_b = \pi R^2 \Rightarrow S_b = \pi \cdot 3^2 \Rightarrow S_b = 9\pi \text{ m}^2$$

Logo, o volume será:

$$V = S_b \cdot h \Rightarrow V = 9\pi \cdot 6 \Rightarrow V = 54\pi \text{ m}^3$$



R20. Qual o volume de um cilindro reto inscrito em um cubo de 8 cm de aresta?



Resolução

$$V = \pi R^2 \cdot h$$

$$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 \Rightarrow V = 128\pi \text{ cm}^3$$

Atividades

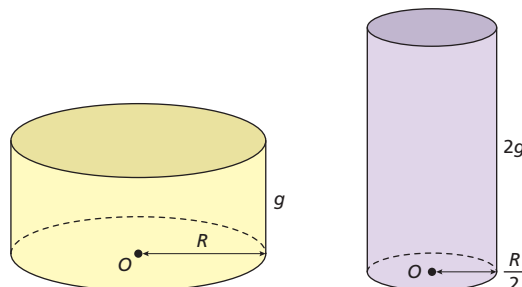
33. Calcule o volume e a área lateral de um cilindro equilátero, sabendo que o raio da base mede 2 m.

34. Em um cilindro reto, o raio da base mede 5 m e a geratriz, 2 m. Determine:

a) sua área lateral.

b) seu volume.

35. Encontre a relação entre os volumes destes dois cilindros:



36. Um cilindro reto tem volume V . Dobrando o raio da base e dividindo a geratriz por 2, obteremos um novo cilindro reto. Qual é o volume desse novo cilindro?

37. Um cilindro reto de 7 cm de altura tem $63\pi \text{ cm}^3$ de volume. Calcule o raio da base.

38. Qual o volume de um cilindro reto inscrito em um cubo de 12 cm de aresta?

39. Determine o volume de um cilindro reto inscrito em um cubo de 96 m^3 de volume.

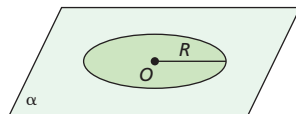
40. Qual o volume de um cilindro reto cuja geratriz é igual ao raio da base?

41. Determine o volume de um cilindro inscrito em um cubo cuja área total é 150 cm^2 .

Cones

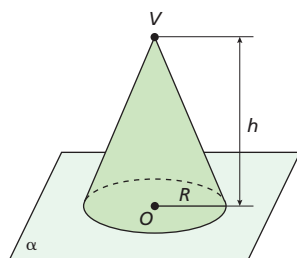
Considere um plano α , um círculo de centro O e raio R contido em α , e um ponto V fora dele.

V
•



Chamamos de cone circular o sólido determinado pela reunião de todos os segmentos com uma extremidade em V e outra no círculo.

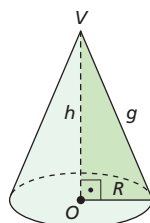
Todo segmento que passa por V e tem extremidade na circunferência da base é denominado geratriz do cone, e o segmento que une o vértice V ao centro O da base é chamado eixo do cone. A distância de V ao plano α é a altura h do cone.



Classificação

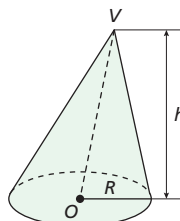
Um cone é classificado segundo a inclinação do eixo VO :

– **reto**: quando o eixo VO é perpendicular à base;

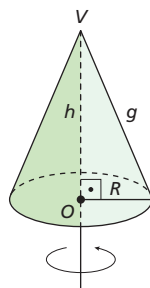


$$g^2 = h^2 + R^2$$

– **obliquo**: quando não é reto.

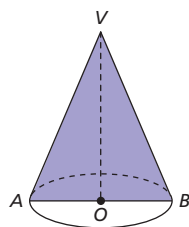


Todo cone reto pode ser obtido pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos. Por isso o cone reto também é chamado de **cone de revolução**.

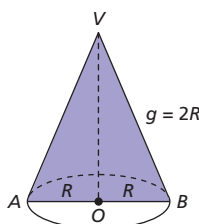


Secção meridiana do cone

Chamamos de secção meridiana do cone à intersecção do cone com um plano que contém seu eixo:

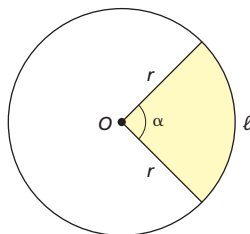


Quando a geratriz de um cone reto é igual a $2R$, a secção meridiana é um triângulo de lado $2R$, e esse cone é denominado **cone equilátero**.



Áreas e volume do cone reto

A área lateral de um cone reto é calculada a partir da área de um setor circular. Vamos, portanto, determinar inicialmente a área S_{se} de um setor circular determinado por um ângulo central α num círculo de raio r .



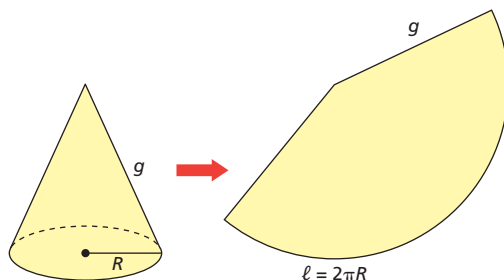
Para isso, estabelecemos uma regra de três simples, em que r é o raio da circunferência e ℓ o comprimento do arco correspondente ao ângulo α :

comprimento	área
$2\pi r$	πr^2
ℓ	S_{se}

A partir dessa proporcionalidade, temos:

$$S_{se} = \frac{\ell r}{2}$$

Quando planificamos a superfície lateral de um cone, obtemos um setor circular:



Chamando de R o raio da base e de g a geratriz do cone, temos:

$$S_{\ell} = \frac{\ell \cdot r}{2} \Rightarrow S_{\ell} = \frac{2 \cdot R \cdot g}{2}$$

$$S_{\ell} = \pi Rg$$

Como a área da base é $S_b = \pi R^2$, a área total será:

$$S_T = \pi R^2 + \pi Rg$$

O princípio de Cavalieri garante que o volume do cone corresponde à terça parte do volume de um cilindro com a mesma altura e com o mesmo raio da base:

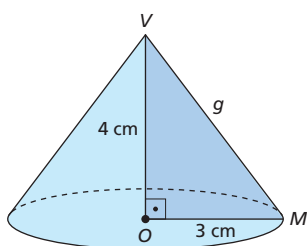
$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h \text{ ou } V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h$$

Note que a relação entre o volume do cone e o do cilindro é a mesma estabelecida para a pirâmide e o prisma.

Atividades resolvidas

R21. Um cone reto tem 4 cm de altura e o raio da base mede 3 cm. Determine a área lateral e o volume.

Resolução



$\triangle VOM$ retângulo

$$g^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow g^2 = 25 \Rightarrow g = 5 \text{ cm}$$

Área lateral:

$$S_{\ell} = \pi R \cdot g \Rightarrow S_{\ell} = \pi \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow S_{\ell} = 15\pi \text{ cm}^2$$

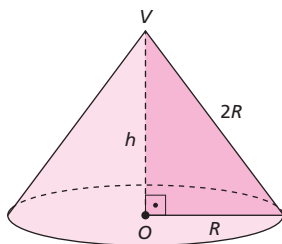
Volume:

$$S_b = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$$

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot 4 \Rightarrow V = 12\pi \text{ cm}^3$$

R22. Determine o volume e a área lateral de um cone equilátero.

Resolução



O cone equilátero tem como geratriz o diâmetro da base. Logo:

$$4R^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow h^2 = 3R^2 \Rightarrow h = R\sqrt{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_b = \pi R^2 \\ h = R\sqrt{3} \end{array} \right\} \Rightarrow V = \frac{\pi R^2 \cdot R \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi \sqrt{3} R^3}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_l = \pi R \cdot g \\ g = 2R \end{array} \right\} \Rightarrow S_l = 2\pi R^2$$

Atividades

42. Calcule a área lateral e o volume de um cone equilátero, sabendo que o raio da base mede 5 m.

43. Em um cone reto, o raio da base e a altura medem, respectivamente, 5 cm e 12 cm. Determine:

a) sua área lateral.

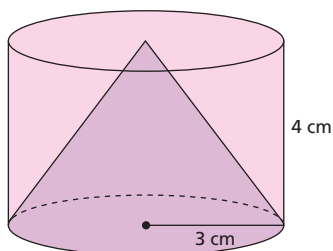
b) sua área total.

c) seu volume.

44. A base de um cone reto está inscrita em um quadrado de 6 m de lado. Sabendo que a geratriz do cone mede 5 m, calcule o volume e a área lateral do cone.

45. Qual a geratriz de um cone equilátero cujo volume é igual a $\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$?

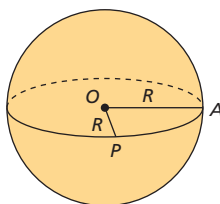
46. Qual o volume de um cone circular reto inscrito em um cilindro de 4 m de altura e raio da base igual a 3 m?



47. Um plano α secciona um cone reto a 4 cm do vértice. Sabendo que a altura do cone é de 16 cm e que o raio da base mede 4 cm, calcule o volume do tronco de cone assim gerado.

Esfera

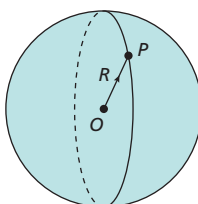
Superfície esférica de centro O é o conjunto de pontos do espaço cuja distância a O é igual a R .



superfície esférica

$$d_{O,P} = R$$

Esfera é o conjunto de pontos do espaço cuja distância a O é igual ou menor que o raio R .



esfera

$$d_{O,P} \leq R$$

Área da superfície esférica e volume da esfera

A área da superfície esférica de raio R é dada por:

$$S_e = 4\pi R^2$$

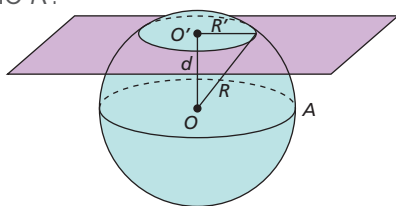
O volume da esfera de raio R também é obtido como aplicação do princípio de Cavalieri e é dado por:

$$V_e = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$$

Secção de uma esfera

OO' é a distância do plano α ao centro da esfera.

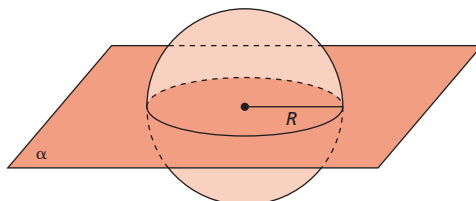
Qualquer plano α que secciona uma esfera de raio R determina como secção plana um círculo de raio R' .



Sendo $OO' = d$, temos:

$$R^2 = d^2 + (R')^2$$

Quando o plano que secciona a esfera contiver um diâmetro, teremos $d = 0$. Nesse caso, o círculo determinado terá raio R e será denominado círculo máximo.

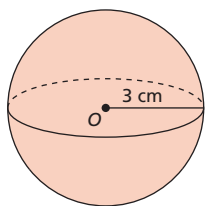


círculo máximo

Atividades resolvidas

R23. Calcule a área da superfície esférica e o volume de uma esfera de 3 cm de raio.

Resolução

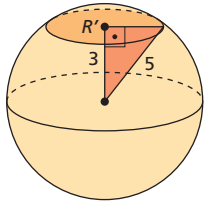


$$S_e = 4\pi R^2 \Rightarrow S_e = 36\pi \text{ cm}^2$$

$$V_e = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow V_e = 36\pi \text{ cm}^3$$

R24. Uma esfera de 5 cm de raio é seccionada a 3 cm do centro. Determine a área da secção plana obtida.

Resolução



$$R^2 = d^2 + (R')^2$$

$$5^2 = 3^2 + (R')^2 \Rightarrow R' = 4 \text{ cm}$$

$$\text{Logo: } S' = \pi \cdot 4^2 \Rightarrow S' = 16\pi \text{ cm}^2$$

Atividades

48. Calcule a área da superfície e o volume da esfera de 2 m de raio.

49. Uma esfera de 8 cm de raio é seccionada a 5 cm do centro. Determine a área da secção plana obtida.

50. Determine a área da superfície e o volume de uma esfera cuja área de secção de círculo máximo é igual a $16\pi \text{ cm}^2$.

51. Determine o volume de uma esfera inscrita em um cubo de 6 cm de aresta.

52. Calcule o volume de uma esfera circunscrita a um cubo de 4 cm de aresta.

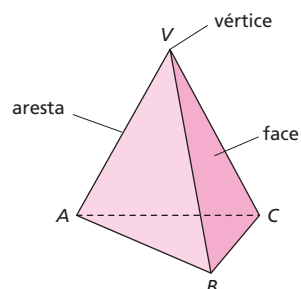
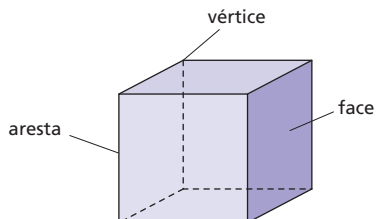
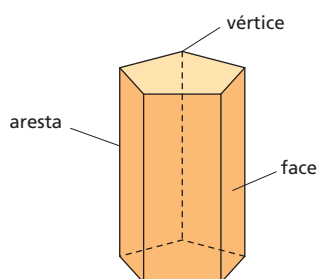
53. Qual o volume de uma esfera de superfície esférica igual a $144\pi \text{ cm}^2$?

Poliedros

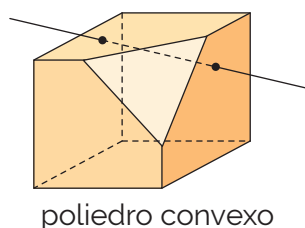
Poliedro é a reunião de um número finito de polígonos planos, chamados faces, em que:

- cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.
- a intersecção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, um vértice ou é vazia.

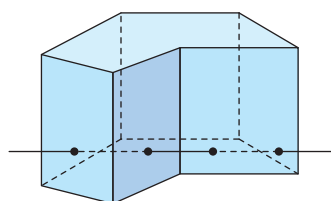
Os elementos principais de um poliedro são:



Dizemos que um **poliedro é convexo** se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos. Caso contrário, dizemos que o poliedro é não convexo, mas estes não serão objeto de estudo.

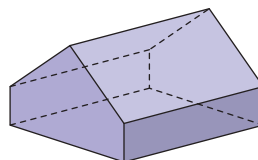
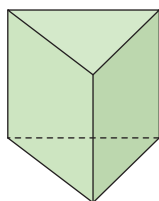
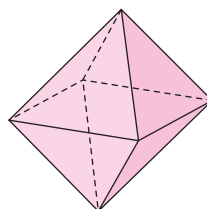
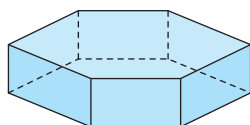


poliedro convexo



poliedro não convexo

Veja alguns exemplos de poliedros convexos:



Os poliedros convexos recebem denominações de acordo com seu número de faces, como, por exemplo:

- tetraedro tem 4 faces
- hexaedro tem 6 faces
- octaedro tem 8 faces
- dodecaedro tem 12 faces
- icosaedro tem 20 faces

Relação de Euler

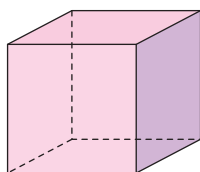
A relação de Euler estabelece que para todo poliedro convexo com A arestas, V vértices e F faces, vale a relação:

$$V - A + F = 2$$

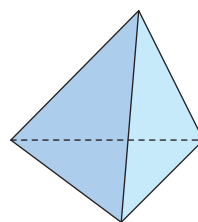
Poliedros regulares

Um poliedro convexo é denominado **poliedro regular** quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

O cubo e o tetraedro a seguir são poliedros regulares, pois atendem a essas características.

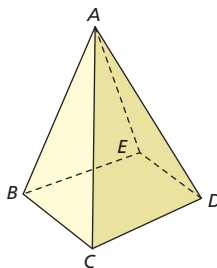


cubo



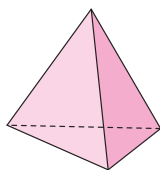
tetraedro

Já a pirâmide quadrangular a seguir não é poliedro regular porque as faces não têm o mesmo número de arestas, e o número de arestas que converge para o vértice A é diferente do número que converge para B .

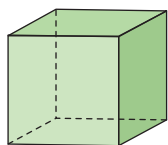


pirâmide quadrangular

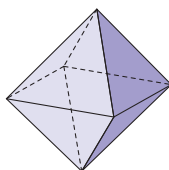
Existem somente cinco classes de poliedros regulares:



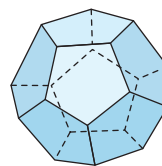
tetraedro



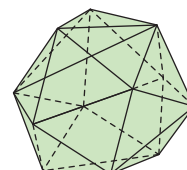
hexaedro



dodecaedro



icosaedro

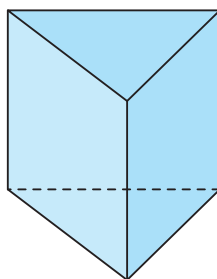


octaedro

Nome	F	V	A
tetraedro	4	4	6
hexaedro	6	8	12
octaedro	8	6	12
dodecaedro	12	20	30
icosaedro	20	12	30

Atividades resolvidas

R25. Verifique a relação de Euler para um prisma triangular.



Resolução

$$V = 6; A = 9; F = 5$$

Substituindo na relação de Euler, temos:

$$V - A + F = 6 - 9 + 5$$

$$V - A + F = 2$$

R26. Qual o número de arestas e o número de vértices de um poliedro com 6 faces quadrangulares e 4 faces triangulares?

Resolução

Vamos inicialmente determinar o número de arestas:

6 faces quadrangulares têm 24 arestas;

4 faces triangulares têm 12 arestas.

No total, teríamos $24 + 12 = 36$ arestas. No entanto, cada aresta é contada duas vezes pois sempre é comum a duas faces. Logo, o número de arestas será $A = 18$.

Para determinar o número de vértices, utilizamos a relação de Euler:

$$A = 18$$

$$F = 10 \text{ (6 faces quadrangulares + 4 faces triangulares)}$$

$$V - A + F = 2 \Rightarrow V = 18 - 10 + 2$$

$$V = 10$$

Atividades

54. Em um poliedro convexo, o número de vértices é 8 e o número de arestas é 12. Determine o número de faces.

55. Calcule o número de vértices de um poliedro convexo que tem 8 faces triangulares.

56. Um poliedro convexo tem 8 faces quadrangulares e 2 hexagonais. Calcule o número de vértices.

57. Calcule a soma dos ângulos das faces de um hexaedro regular. Lembre que a soma dos ângulos internos de um polígono é dada por $S_i = (n - 2) 180^\circ$.

58. Calcule a soma dos ângulos das faces de um octaedro regular.

59. Calcule a soma dos ângulos das faces dos seguintes poliedros regulares:

a) tetraedro.

b) dodecaedro.

c) icosaedro.

Resumo

Postulados de existência

1. Existem ponto, reta e plano.
2. Em uma reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.
3. Em um plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos.

Postulados de determinação

4. Dois pontos distintos determinam uma reta.
5. Três pontos não colineares determinam um único plano.

Postulado de inclusão

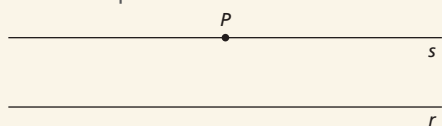
6. Uma reta que possui dois pontos distintos em um plano está contida nesse plano.

Postulados de divisão

7. Um ponto qualquer de uma reta divide-a em duas partes.
8. Uma reta qualquer de um plano divide-o em dois semiplanos.
9. Um plano qualquer divide o espaço em dois semiespaços.

Postulado de Euclides

Por um ponto fora de uma reta existe uma única reta paralela a esta reta.



Posições relativas de duas retas

Retas coplanares

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Concorrentes} \left\{ \begin{array}{l} \text{perpendiculares} \\ \text{obliquas} \end{array} \right. \\ \text{Paralelas} \left\{ \begin{array}{l} \text{distintas} \\ \text{coincidentes} \end{array} \right. \end{array} \right.$

Retas reversas $\left\{ \begin{array}{l} \text{ortogonais} \\ \text{não ortogonais} \end{array} \right.$

Posições relativas de reta e plano

Reta r e plano α

$$\begin{cases} r \text{ contida no plano } \alpha \Leftrightarrow r \cap \alpha = r \\ r \text{ concorrente ao plano } \alpha \Leftrightarrow r \cap \alpha = \{P\} \\ r \text{ paralela ao plano } \alpha \Leftrightarrow r \cap \alpha = \emptyset \end{cases}$$

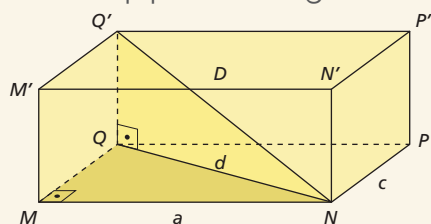
Posições relativas de dois planos

Planos α e β

$$\begin{cases} \alpha \text{ e } \beta \text{ coincidentes} \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \alpha = \beta \\ \alpha \text{ e } \beta \text{ concorrentes} \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = r \\ \alpha \text{ e } \beta \text{ paralelos distintos} \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \emptyset \end{cases}$$

Prismas

Paralelepípedo retângulo



$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$S_t = 2 \cdot S_b + S_l$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

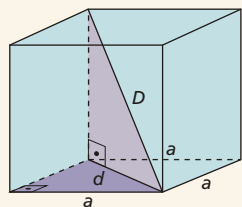
Cubo

$$d = a\sqrt{2}$$

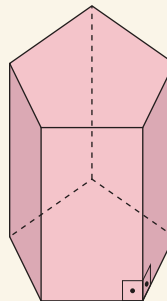
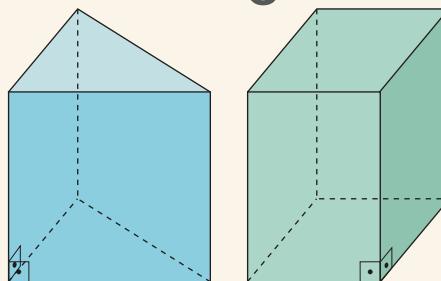
$$D = a\sqrt{3}$$

$$S_t = 6 \cdot a^2$$

$$V = a^3$$



Prisma Regular



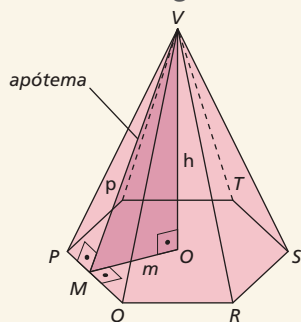
$$S_l = n \cdot S_{\text{face}} \quad (n = \text{número de faces retangulares})$$

$$S_t = S_l + 2S_b$$

$$V = S_b \cdot h$$

Pirâmides

Pirâmide regular



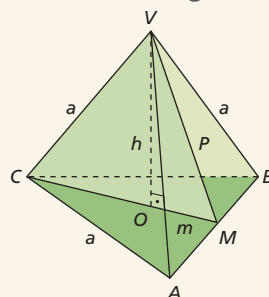
$$p^2 = m^2 + h^2$$

$$S_l = n \cdot S_{\text{face}} \quad (n = \text{número de faces triangulares})$$

$$S_t = S_l + S_b$$

$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$$

Tetraedro regular



$$p = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

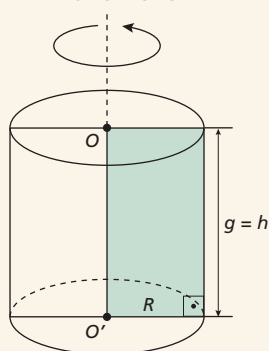
$$S_{\text{face}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\text{total}} = a^2 \sqrt{3}$$

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

Cilindros

Cilindro reto



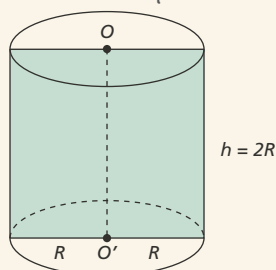
$$S_b = \pi R^2$$

$$S_l = 2\pi Rg$$

$$S_t = 2\pi R(g+R)$$

$$V = \pi R^2 h \text{ ou } V = \pi R^2 g$$

Cilindro equilátero



Cones

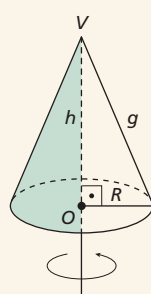
Cone reto

$$S_b = \pi R^2$$

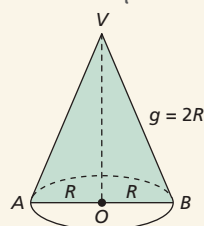
$$S_l = \pi Rg$$

$$S_t = \pi R(g+R)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$



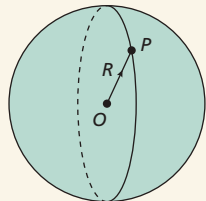
Cone equilátero



Esfera

$$S_e = 4\pi R^2$$

$$V_e = \frac{4}{3}\pi R^3$$



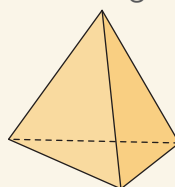
V = número de vértices

A = número de arestas

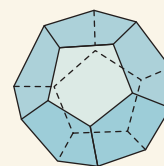
F = número de faces

$V - A + F = 2$ (relação de Euler)

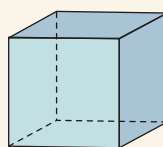
Poliedros regulares



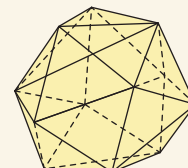
tetraedro



icosaedro



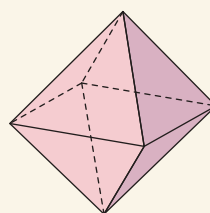
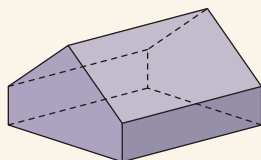
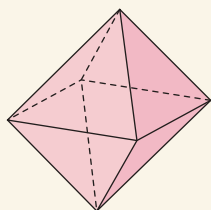
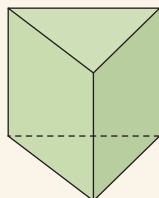
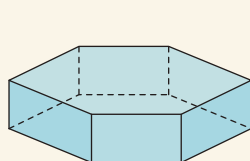
hexaedro



octaedro

Poliedros

Poliedros convexos



dodecaedro

Avalie o que aprendeu

1. Calcule a medida da diagonal, a área total e o volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões 10, 6 e 2 cm.

a) $D = 3\sqrt{65}$ cm; $S_t = \sqrt{184}$ cm²; $V = \sqrt{120}$ cm³

b) $D = 2\sqrt{35}$ cm; $S_t = 184$ cm²; $V = 120$ cm³

c) $D = 35$ cm; $S_t = \sqrt{184}$ cm²; $V = 120$ cm³

d) $D = 3\sqrt{35}$ cm; $S_t = 184$ cm²; $V = \sqrt{120}$ cm³

e) $D = 70$ cm; $S_t = 184$ cm²; $V = 120$ cm³

2. Em um prisma triangular regular, a aresta da base mede $2\sqrt{2}$ cm. Sabe-se que a medida da aresta lateral é o triplo da medida da aresta da base. Calcule a área lateral e o volume do prisma.

a) $S_{\ell} = 94\text{cm}^2; V = 12\sqrt{6}\text{cm}^3$

d) $S_{\ell} = 72\text{cm}^2; V = 6\sqrt{2}\text{cm}^3$

b) $S_{\ell} = 72\text{cm}^2; V = 12\sqrt{6}\text{cm}^3$

e) $S_{\ell} = 36\text{cm}^2; V = 6\sqrt{2}\text{cm}^3$

c) $S_{\ell} = 36\text{cm}^2; V = 12\sqrt{6}\text{cm}^3$

3. A altura de um prisma hexagonal regular é $6\sqrt{3}$ m. Calcule o seu volume e a sua área total, sabendo que a aresta da base mede 6 m.

a) $V = 972\text{m}^3; S_t = 676\sqrt{5}\text{m}^2$

d) $V = \sqrt{757}\text{m}^3; S_t = 324\sqrt{3}\text{m}^2$

b) $V = \sqrt{757}\text{m}^3; S_t = 567\sqrt{7}\text{m}^2$

e) $V = 972\text{m}^3; S_t = 324\sqrt{3}\text{m}^2$

c) $V = 972\text{m}^3; S_t = 7\sqrt{5}\text{m}^2$

4. Um prisma regular de base quadrada tem 1.372m^3 de volume. Sabe-se que sua altura é o quádruplo da aresta da base. Calcule as áreas lateral e total.

a) $S_{\ell} = 784\text{m}^2; S_t = 882\text{m}^2$

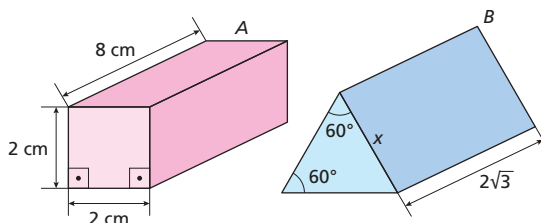
d) $S_{\ell} = 600\text{m}^2; S_t = 900\text{m}^2$

b) $S_{\ell} = 784\text{m}^2; S_t = 900\text{m}^2$

e) $S_{\ell} = 550\text{m}^2; S_t = 670\text{m}^2$

c) $S_{\ell} = 600\text{m}^2; S_t = 882\text{m}^2$

5. Na figura, tem-se:



V_A : volume do prisma A

V_B : volume do prisma B

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{1}{3}$$

Nessas condições, calcule a medida x indicada na figura.

a) $x = 2\sqrt{2}\text{ cm}$

d) $x = 4\sqrt{3}\text{ cm}$

b) $x = 4\sqrt{5}\text{ cm}$

e) $x = 8\sqrt{3}\text{ cm}$

c) $x = 8\sqrt{5}\text{ cm}$

6. Calcule o volume e as áreas lateral e total de um cone circular reto de altura 12 m e área da base igual a $25\pi \text{ m}^2$.

a) $V = 100\pi \text{ m}^3$; $S_L = 65\pi \text{ m}^2$; $S_t = 90\pi \text{ m}^2$

d) $V = 50\pi \text{ m}^3$; $S_L = 32,5\pi \text{ m}^2$; $S_t = 45\pi \text{ m}^2$

b) $V = 100 \text{ m}^3$; $S_L = 65 \text{ m}^2$; $S_t = 90 \text{ m}^2$

e) $V = 25\pi \text{ m}^3$; $S_L = 15\pi \text{ m}^2$; $S_t = 22,5\pi \text{ m}^2$

c) $V = \pi \text{ m}^3$; $S_L = \pi \text{ m}^2$; $S_t = \pi \text{ m}^2$

7. Obtenha a medida do raio da base de um cone reto cuja geratriz mede 4 cm e a área total é de $12\pi \text{ cm}^2$.

a) $R = 32 \text{ cm}$

d) $R = 4 \text{ cm}$

b) $R = 16 \text{ cm}$

e) $R = 2 \text{ cm}$

c) $R = 8 \text{ cm}$

8. Calcule a área e o volume de uma esfera de raio 4 cm.

a) $A = 32\pi \text{ cm}^2$; $V = \frac{13\pi}{3} \text{ cm}^3$

c) $A = 64\pi \text{ cm}^2$; $V = \frac{127\pi}{3} \text{ cm}^3$

b) $A = 124\pi \text{ cm}^2$; $V = \frac{567\pi}{3} \text{ cm}^3$

d) $A = 64\pi \text{ cm}^2$; $V = \frac{256\pi}{3} \text{ cm}^3$

9. Calcule a área da secção plana obtida em uma esfera de 6 cm de raio por um plano distante 4 cm do centro.

a) $S = 5\pi \text{ cm}^2$

d) $S = 25\pi \text{ cm}^2$

b) $S = 10\pi \text{ cm}^2$

e) $S = 30\pi \text{ cm}^2$

c) $S = 20\pi \text{ cm}^2$

10. Uma esfera é seccionada por um plano α a 8 cm de seu centro. Encontre o volume da esfera, sabendo que a secção tem área de $36\pi \text{ cm}^2$.

a) $V = \frac{4.000\pi}{3} \text{ cm}^3$

c) $V = \frac{1.000\pi}{3} \text{ cm}^3$

b) $V = \frac{2.000\pi}{3} \text{ cm}^3$

d) $V = \frac{4.000\pi}{7} \text{ cm}^3$



Adobestock

O estudo de retas pode inspirar artistas a criarem belas artes, como essa composição do artista holandês Piet Mondrian.

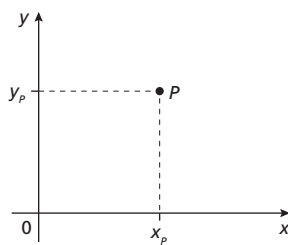
Capítulo 5

Geometria analítica

O método da Geometria Analítica consiste, basicamente, em associar números a pontos de um plano e equações a figuras geométricas, criando assim uma poderosa ferramenta matemática, com aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento, como em Economia e Administração, Arquitetura e Engenharia e outras atividades de planejamento.

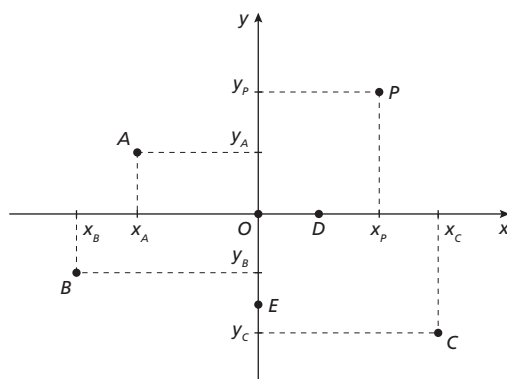
Estudo do ponto

Podemos localizar um ponto P em um plano α utilizando um sistema de eixos cartesianos.



- Ox é o eixo das abscissas.
- Oy é o eixo das ordenadas.
- xOy é o sistema cartesiano ortogonal.
- $O(0, 0)$ é a origem do sistema.
- x_p é a abscissa do ponto P .
- y_p é a ordenada do ponto P .
- (x_p, y_p) são as coordenadas do ponto P .

A posição do ponto P no plano α é dada a partir de suas coordenadas:



$$P \in 1^{\text{o}} \text{ Qd} \Leftrightarrow x_p > 0 \text{ e } y_p > 0$$

$$A \in 2^{\text{o}} \text{ Qd} \Leftrightarrow x_A < 0 \text{ e } y_A > 0$$

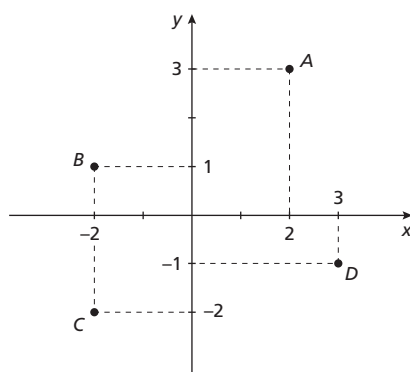
$$B \in 3^{\text{o}} \text{ Qd} \Leftrightarrow x_B < 0 \text{ e } y_B < 0$$

$$C \in 4^{\text{o}} \text{ Qd} \Leftrightarrow x_C > 0 \text{ e } y_C < 0$$

$$D \in \overrightarrow{Ox} \Leftrightarrow y_D = 0$$

$$E \in \overrightarrow{Oy} \Leftrightarrow x_E = 0$$

Observe a seguir que, conhecendo as coordenadas de um ponto, podemos localizá-lo no plano cartesiano:



a) para $A(2, 3)$, temos $x_A > 0$ e $y_A > 0$;

logo, $A \in 1^{\text{a}}$ Qd.

b) para $B(-2, 1)$, temos $x_B < 0$ e $y_B > 0$;

logo, $B \in 2^{\text{a}}$ Qd.

c) para $C(-2, -2)$, temos $x_C < 0$ e $y_C < 0$;

logo, $C \in 3^{\text{a}}$ Qd.

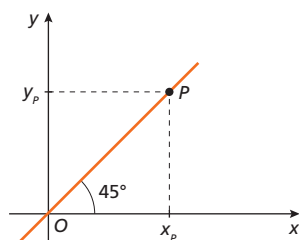
d) para $D(3, -1)$, temos $x_D > 0$ e $y_D < 0$;

logo, $D \in 4^{\text{a}}$ Qd.

Atividades resolvidas

R1. Determine o valor de k para que o ponto $P(5, 2k - 3)$ pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares:

Resolução



Um ponto P pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares se e somente se $y_P = x_P$.

Logo, para $P(5, 2k - 3)$, temos:

$$2k - 3 = 5 \Rightarrow k = 4 \text{ e então } P(5, 5)$$

Atividades

1. Indique o quadrante a que pertence cada ponto:

a) $A(-3, -1)$

b) $B\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

c) $C(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

d) $D\left(\frac{3}{2}, -1\right)$

e) $E(\sqrt{70}, -\sqrt{2})$

2. Localize, no sistema cartesiano ortogonal, os pontos:

a) $A(3, 2)$

c) $C(-2, 3)$

e) $E(-3, -2)$

g) $G(4, 2)$

i) $I(0, 0)$

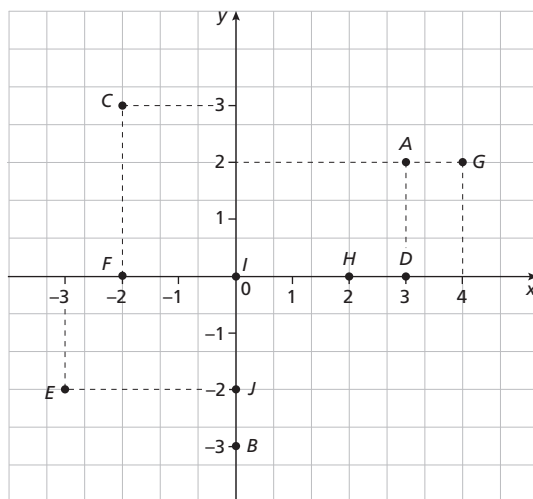
b) $B(0, -3)$

d) $D(3, 0)$

f) $F(-2, 0)$

h) $H(2, 0)$

j) $J(0, -2)$



3. Determine o valor de k para que os pontos pertençam à bissetriz dos quadrantes ímpares:

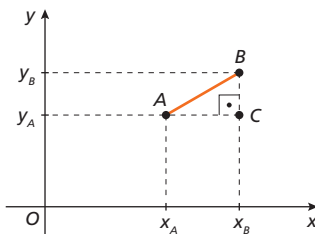
a) $P(4k + 2, 6)$

b) $P(3k + 1, 2k + 6)$

c) $P(4k - 1, 2k - 3)$

Distância entre dois pontos

Dados os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, a distância d_{AB} entre eles é uma função das coordenadas de A e B :



Nessa figura, temos:

$$- d_{AC} = |x_B - x_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2}$$

$$- d_{BC} = |y_B - y_A| = \sqrt{(y_B - y_A)^2}$$

Para obter d_{AB} , aplicamos o teorema de Pitágoras ao triângulo ABC :

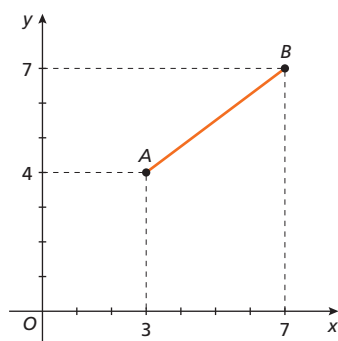
$$d_{AB}^2 = d_{AC}^2 + d_{BC}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Atividades resolvidas

R2. Calcule a distância entre os pontos $A(3, 4)$ e $B(7, 7)$.

Resolução



$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(7 - 3)^2 + (7 - 4)^2}$$

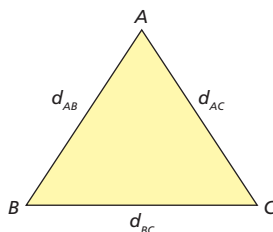
$$d_{AB} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} \Rightarrow d_{AB} = 5$$

R3. Calcule o perímetro do triângulo de vértices $A(1, 4)$, $B(-1, 1)$ e $C(2, 0)$.

Resolução

Perímetro é a medida do contorno, então:

$$\text{perímetro do triângulo } ABC = d_{AB} + d_{AC} + d_{BC}$$



$$d_{AB} = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{13}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(2 - 1)^2 + (0 - 4)^2} = \sqrt{17}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(2 + 1)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{perímetro} = \sqrt{13} + \sqrt{17} + \sqrt{10}$$

Atividades

4. Determine a distância entre os pontos a seguir:

a) $A(2, 5)$ e $B(-3, 1)$

c) $R\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ e $S(5, -1)$

b) $P(-4, 0)$ e $Q(1, -5)$

d) $T(0, -8)$ e $V(-7, 0)$

5. Calcule o perímetro do triângulo de vértices A , B e C em cada caso:

a) $A(3, 0)$, $B(0, 4)$ e $C(0, 0)$

b) $A(-6, -1)$, $B(4, 2)$ e $C(3, -1)$

6. Mostre que o triângulo de vértices $A(3, 1)$, $B(8, 1)$ e $C(3, 7)$ é retângulo. (Observação: todo triângulo retângulo verifica o teorema de Pitágoras: a hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos catetos.)

7. Determine x para que o triângulo ABC seja retângulo em B :

a) $A(7, 8)$, $B(4, 4)$ e $C(x, 7)$

c) $A(1, x)$, $B(3, 4)$ e $C(0, 6)$

b) $A(2, 3)$, $B(-1, x)$ e $C(-2, 3)$

d) $A(x, 1)$, $B(3, 3)$ e $C(5, -1)$

8. Dados $A(x, 3)$, $B(1, 5)$ e $C(4, 2)$, obtenha x para que A esteja à mesma distância de B e C .

9. Determine as coordenadas do ponto P , pertencente ao eixo das abscissas, sabendo que P equidista dos pontos $A(1, 5)$ e $B(7, 1)$.

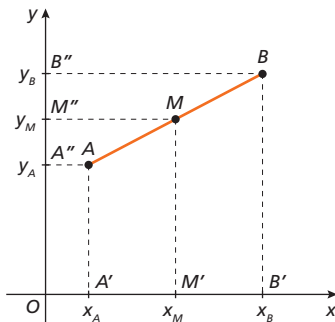
10. Obtenha o ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares que equidista dos pontos $A(3, 5)$ e $B(-2, 8)$.

11. Obtenha o ponto da bissetriz dos quadrantes pares que equidista dos pontos $A(1, 6)$ e $B(4, -8)$.

12. Para qual valor de m o ponto $P(5, m)$ dista 4 unidades do ponto $Q(1, -2)$?

Ponto médio

Dados os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, as coordenadas do ponto $M(x_M, y_M)$, médio entre A e B , serão dadas pelas semi-somas das coordenadas de A e B .



O ponto M terá as seguintes coordenadas:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Atividades resolvidas

R4. Determine as coordenadas do ponto médio M de um segmento que tem extremidades $A(3, 5)$ e $B(7, 9)$.

Resolução

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_M = \frac{3 + 7}{2} \Rightarrow x_M = 5$$

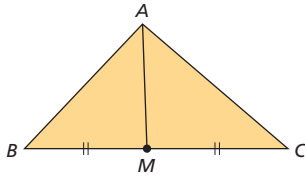
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_M = \frac{5 + 9}{2} \Rightarrow y_M = 7$$

Logo, o ponto M é $(5, 7)$.

R5. Dados os pontos $A(6, 2)$, $B(3, 5)$ e $C(1, -3)$, calcule a medida da mediana $\overline{AM}$ do triângulo ABC .

Resolução

Mediana é o segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto.



Cálculo do ponto médio de $\overline{BC}$:

$$M\left(\frac{3+1}{2}, \frac{5-3}{2}\right) \Rightarrow M(2, 1)$$

Cálculo da medida da mediana $\overline{AM}$:

$$d_{AM} = \sqrt{(2-6)^2 + (1-2)^2} \Rightarrow d_{AM} = \sqrt{17}$$

Atividades

13. Obtenha as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$ nos seguintes casos:

a) $A(3, 1)$ e $B(-3, 5)$

b) $A\left(\frac{5}{3}, 6\right)$ e $B\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$

14. Dados os pontos $A(4, 2)$, $B(6, -5)$ e $C(10, -3)$, calcule a medida da mediana $\overline{AM}$ do triângulo ABC .

15. Dados os pontos A e B , determine as coordenadas dos pontos que dividem o segmento $\overline{AB}$ em quatro partes iguais:

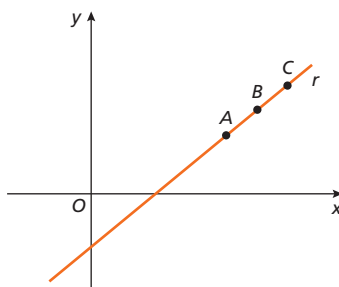
a) $A(8, 0)$ e $B(4, 12)$

b) $A(16, -4)$ e $B(18, 0)$

16. O baricentro de um triângulo é o par de coordenadas $(4, 2)$, e dois de seus vértices são $(1, 5)$ e $(2, 8)$. Determine o terceiro vértice.

Alinhamento de três pontos

Três pontos estão alinhados se são colineares, isto é, se pertencem a uma mesma reta.



Considerando os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, dizemos que esses pontos estão alinhados se e somente se:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Se $D \neq 0$, os pontos não são colineares e representam os vértices de um triângulo.

Atividades resolvidas

R6. Verifique se os pontos $A(2, 3)$, $B(-1, 0)$ e $C(3, 4)$ são colineares.

Resolução

Basta que verifiquemos o valor do determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Diagrama de Sarrus para o cálculo do determinante:

2	3	1	2	3
-1	0	1	-1	0
3	4	1	3	4
0	-8	3	0	9
			-4	

$$D = 9 - 4 - 8 + 3 \Rightarrow D = 0$$

Como $D = 0$, A , B e C são colineares.

R7. Mostre que os pontos $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$ e $C(0, -2)$ são vértices de um triângulo.

Resolução

Basta que verifiquemos o valor do determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$\swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow \quad \swarrow$
 $0 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 2$

$$D = 3 + 2 + 2 + 2 \Rightarrow D = 9$$

Como $D \neq 0$, os pontos A , B e C não estão alinhados. Logo, são vértices de um triângulo.

Atividades

17. Verifique se estão alinhados os pontos A , B e C nos seguintes casos:

a) $A(3, 4)$, $B(1, 2)$ e $C(0, 3)$

c) $A(3, 7)$, $B(1, 2)$ e $C(0, 0)$

b) $A(3, -1)$, $B(-2, -6)$ e $C(8, 4)$

d) $A(-1, 0)$, $B(3, 4)$ e $C(0, 1)$

18. Determine o valor de x para que os pontos A , B e C sejam colineares:

a) $A(x, 2)$, $B(3, 1)$ e $C(-4, 2)$

b) $A(-2, x)$, $B(0, 0)$ e $C(3, 1)$

c) $A(1, -4)$, $B(-3, 5)$ e $C(4x, 3)$

d) $A(1, 2)$, $B(x, 0)$ e $C(3, 4)$

19. Determine para que valores de p existe o triângulo ABC em cada caso:

a) $A(p, 2)$, $B(3, 5)$ e $C(1, 0)$

b) $A(2, 1)$, $B(3p, 4)$ e $C(-1, 3)$

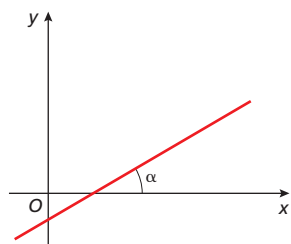
c) $A(p - 2, -1)$, $B(p - 1, 4)$ e $C(2, 9)$

d) $A(p, 1)$, $B(p + 1, 2)$ e $C(0, 3)$

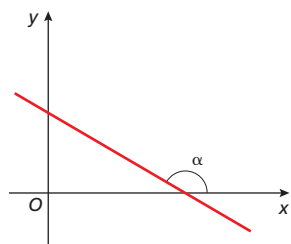
20. Calcule a área S do triângulo ABC de vértices $A(-1, 4)$; $B(0, 5)$ e $C(3, -3)$.

Estudo da reta

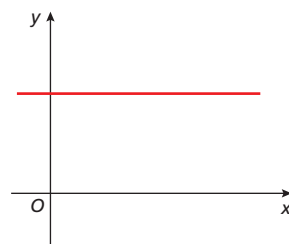
O estudo de uma reta do plano cartesiano pode ser realizado a partir do ângulo α que ela forma com o eixo das abscissas. Esse ângulo, denominado inclinação da reta, é medido a partir do eixo $\overrightarrow{Ox}$ no sentido anti-horário.



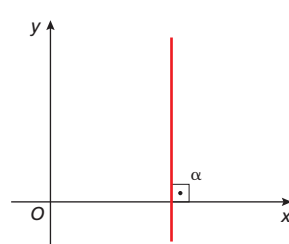
$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



$$90^\circ < \alpha < 180^\circ$$



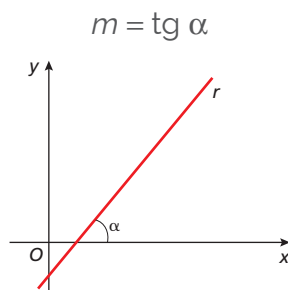
$$\alpha = 0^\circ$$



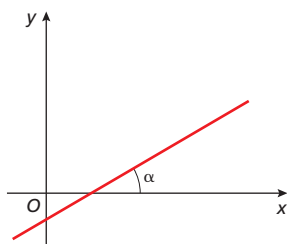
$$\alpha = 90^\circ$$

Coeficiente angular

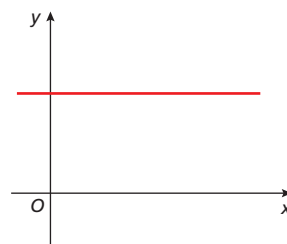
Coeficiente angular m de uma reta não perpendicular ao eixo $\overrightarrow{Ox}$ é o valor da tangente do ângulo de inclinação dessa reta.



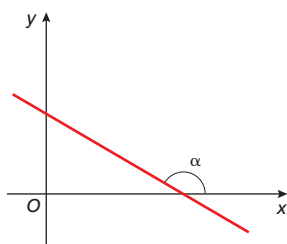
O valor do coeficiente angular m varia em função de α .



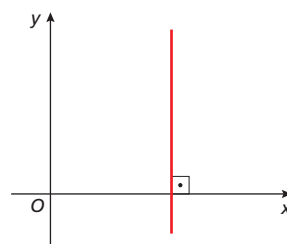
$$0 < \alpha < 90^\circ \Rightarrow m > 0$$



$$\alpha = 0 \Rightarrow m = 0$$



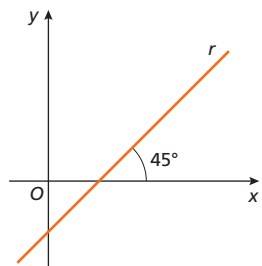
$$90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow m < 0$$



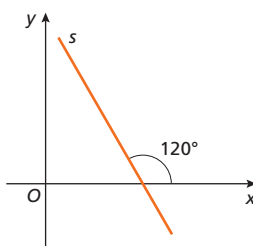
$$\alpha = 90^\circ \Rightarrow \nexists m$$

Observe, por exemplo, os coeficientes angulares das retas r e s nos gráficos a seguir:

a) $m_r = \operatorname{tg} 45^\circ \Rightarrow m_r = 1$



b) $m_s = \operatorname{tg} 120^\circ = -\operatorname{tg} 60^\circ \Rightarrow m_s = -\sqrt{3}$

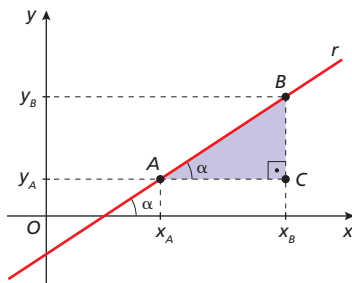


O coeficiente angular de uma reta r não vertical também pode ser obtido a partir das coordenadas de dois de seus pontos. Dados $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, dois pontos distintos pertencentes a r , temos:

$$m_r = \operatorname{tg} \alpha \text{ e } \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC}$$

Então,

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$



Atividades resolvidas

R8. Qual o coeficiente angular da reta r determinada pelos pontos $A(3, 4)$ e $B(2, 5)$?

Resolução

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$m_r = \frac{5 - 4}{2 - 3} \Rightarrow m_r = \frac{1}{-1} \Rightarrow m_r = -1$$

R9. Verifique se os pontos $A(3, 4)$, $B(1, 2)$ e $C(-2, -1)$ são colineares.

Resolução

Uma maneira de verificar se três pontos A , B e C são colineares é por meio do coeficiente angular. Se ocorrer $m_{AB} = m_{BC}$, então A , B e C são colineares.

Para os pontos $A(3, 4)$, $B(1, 2)$ e $C(-2, -1)$, temos:

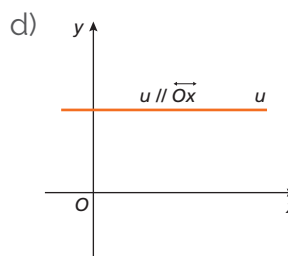
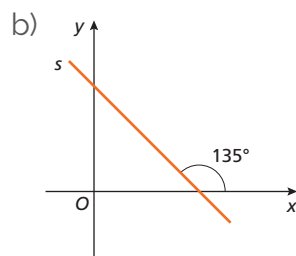
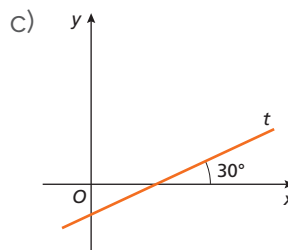
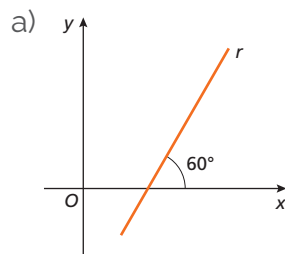
$$m_{AB} = \frac{2 - 4}{1 - 3} = \frac{-2}{-2} \Rightarrow m_{AB} = 1$$

$$m_{BC} = \frac{-1 - 2}{-2 - 1} = \frac{-3}{-3} \Rightarrow m_{BC} = 1$$

Como $m_{AB} = m_{BC}$, então A , B e C são colineares.

Atividades

21. Determine o coeficiente angular da reta em cada caso:



22. Calcule o coeficiente angular do segmento $\overline{AB}$ em cada caso:

a) $A(2, 3)$ e $B(3, 4)$

d) $A(-3, -4)$ e $B(-2, -2)$

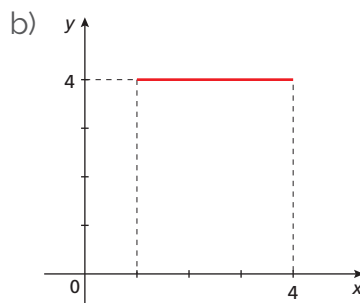
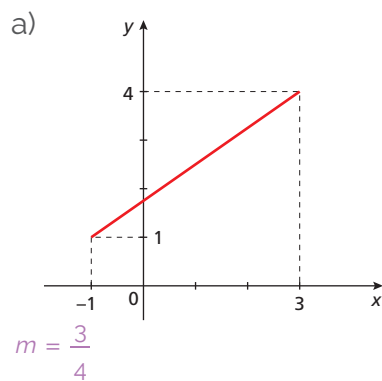
b) $A(4, -1)$ e $B(5, 1)$

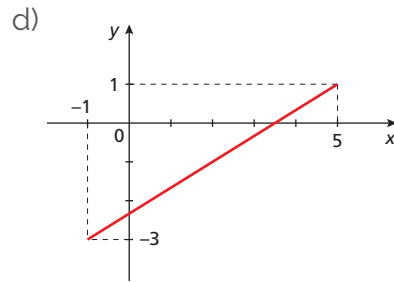
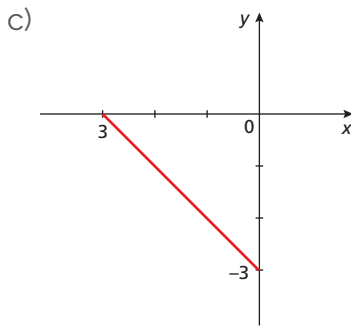
e) $A(1, 0)$ e $B(0, 1)$

c) $A(3, 2)$ e $B(4, 2)$

f) $A(-2, 0)$ e $B(0, 0)$

23. Determine o coeficiente angular do segmento indicado em cada caso:





24. Dado o ponto $A(4, 2)$, calcule as coordenadas do ponto $B(2b + 1, 4b)$ de modo que o coeficiente angular de $\overline{AB}$ seja -2 .

25. Verifique se os pontos A , B e C dados a seguir são colineares:

a) $A(0, 1)$, $B(2, 3)$ e $C(4, 1)$

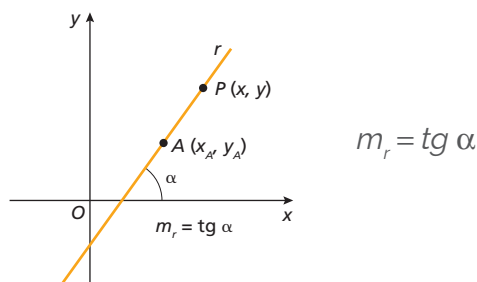
b) $A(2, 3)$, $B(0, 5)$ e $C(3, -2)$

c) $A(6, 4)$, $B(3, 2)$ e $C(-9, -6)$

Equação fundamental da reta

Podemos representar uma reta r do plano cartesiano por meio de uma equação. Essa equação pode ser obtida a partir de um ponto $A(x_A, y_A)$ e do coeficiente angular m_r dessa reta.

Considere uma reta r não vertical, de coeficiente angular m_r , que passa pelo ponto $A(x_A, y_A)$. Vamos obter a equação dessa reta, tomando um ponto genérico $P(x, y)$ tal que $P \neq A$.

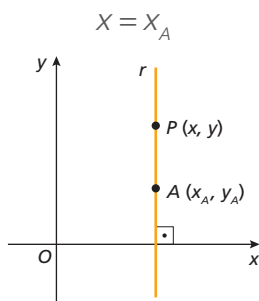


A equação fundamental de r é dada por:

$$m_r = \frac{y - y_A}{x - x_A} \Rightarrow y - y_A = m_r(x - x_A)$$

Se a reta r for paralela ao eixo $\overleftrightarrow{Oy}$, isto é, se não existir coeficiente angular, então todos os pontos pertencentes a ela terão abscissas iguais.

Nesse caso, a equação de r é dada por:



Atividades resolvidas

R10. Obtenha a equação fundamental da reta r , que forma ângulo α de 45° com o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ e que passa pelo ponto $A(1, 2)$.

Resolução

$$m_r = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow m_r = \operatorname{tg} 45^\circ \Rightarrow m_r = 1$$

$$y - y_A = m_r(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = 1(x - 1)$$

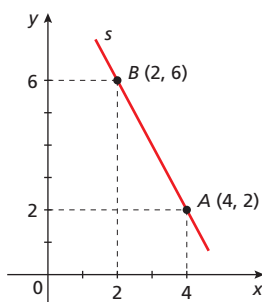
R11. Obtenha a equação fundamental e faça o gráfico da reta s que passa pelos pontos $A(4, 2)$ e $B(2, 6)$.

Resolução

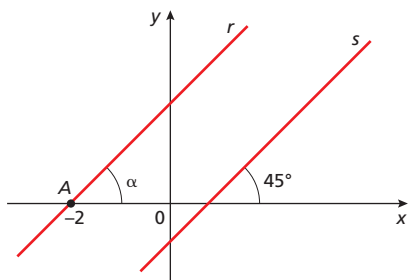
$$m_s = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6 - 2}{2 - 4} \Rightarrow m_s = -2$$

$$y - y_A = m_s(x - x_A)$$

$$y - 2 = -2(x - 4)$$



R12. Determine a equação da reta r da figura a seguir, sabendo que é paralela à reta s .



Resolução

Como $r \parallel s$, então $\alpha = 45^\circ$.

$$m_r = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow m = \operatorname{tg} 45^\circ \Rightarrow m = 1$$

O ponto $A(-2, 0) \in r$.

Então, a equação da reta r é: $y - 0 = 1(x + 2) \Rightarrow y = x + 2$.

Atividades

26. Determine a equação da reta r que passa pelo ponto A e tem inclinação α :

a) $A(2, 1)$ e $\alpha = 30^\circ$

c) $A(-2, -3)$ e $\alpha = 135^\circ$

b) $A(-4, 1)$ e $\alpha = 45^\circ$

d) $A(3, -2)$ e $\alpha = 60^\circ$

27. Determine a equação da reta r que passa por A e tem coeficiente angular m_r :

a) $A(4, 4)$ e $m_r = -1$

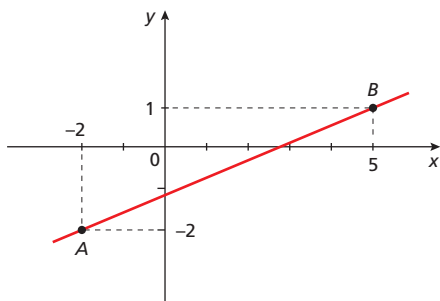
b) $A(2, -8)$ e $m_r = \frac{1}{2}$

28. Determine a equação da reta r que passa pelos pontos A e B :

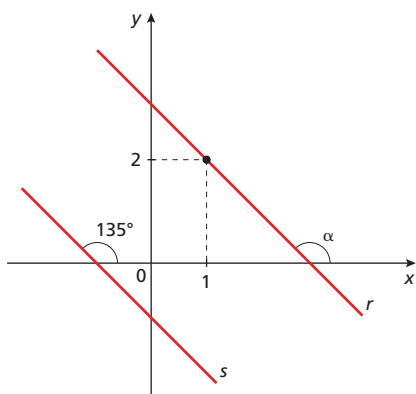
a) $A(3, 4)$ e $B(-1, 1)$

b) $A(-2, -1)$ e $B(5, -2)$

29. Determine a equação da reta que passa pelos pontos A e B :



30. Sabendo que as retas r e s são paralelas, determine a equação de r na figura a seguir.



Equação geral da reta

Toda reta r do plano cartesiano pode ser expressa por uma equação do tipo:

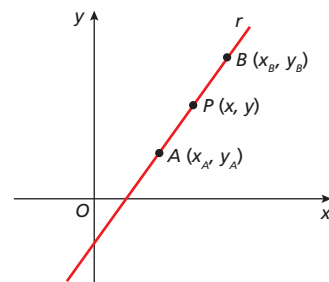
$$ax + by + c = 0$$

em que:

- a , b e c são números reais.
- a e b não são simultaneamente nulos.

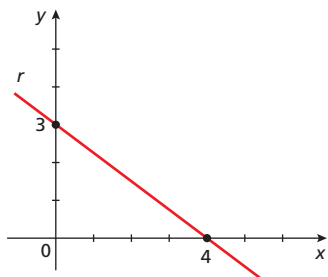
Podemos obter a equação geral de uma reta r conhecendo dois pontos não coincidentes de r , $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Para isso, usa-se a condição de alinhamento de A e B com um ponto genérico $P(x, y)$ de r :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ax + by + c = 0$$



Atividades resolvidas

R13. Determine a equação da reta r no gráfico a seguir:



Resolução

Conhecendo o gráfico de uma reta r , podemos determinar sua equação geral a partir dos pontos em que r cruza os eixos $\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{Oy}$.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante, vamos obter:

$$(r) 3x + 4y - 12 = 0$$

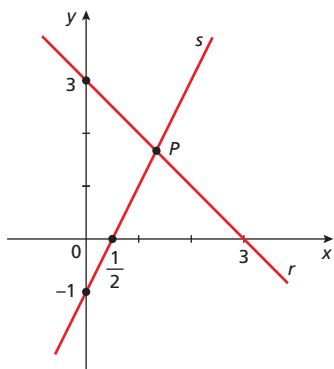
R14. Determine a equação geral da reta cuja equação fundamental é $y - 2 = 3(x - 5)$:

Resolução

$$y - 2 = 3(x - 5)$$

$$y - 2 = 3x - 15 \Rightarrow 3x - y - 13 = 0$$

R15. Determine a intersecção das retas $(r) x + y - 3 = 0$ e $(s) 2x - y - 1 = 0$ representadas na figura.



Resolução

Obtém-se a intersecção $P(x, y)$ de duas retas r e s , resolvendo o sistema formado com suas equações:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \text{ (I)} \\ 2x - y - 1 = 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

$$(I) + (II) \Rightarrow 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$\text{Substituindo } x = \frac{4}{3} \text{ em (I)} \Rightarrow \frac{4}{3} + y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{3}.$$

Logo, a intersecção de r e s é $P\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

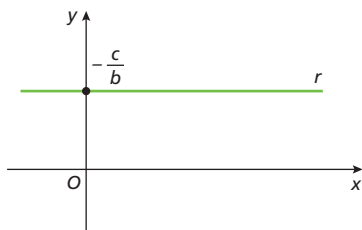
Casos particulares da equação geral da reta

Quando um dos coeficientes a , b ou c for igual a zero, temos três casos particulares da equação da reta:

– reta horizontal

$$a = 0 \text{ e } b \neq 0 \Rightarrow by + c = 0$$

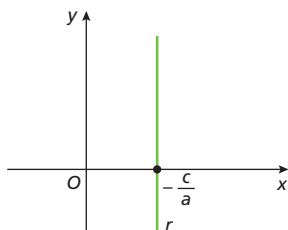
$$y = -\frac{c}{b} \Rightarrow r \parallel \overrightarrow{Ox}$$



– reta vertical

$$a \neq 0 \text{ e } b = 0 \Rightarrow ax + c = 0$$

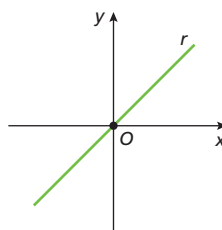
$$x = -\frac{c}{a} \Rightarrow r \parallel \overrightarrow{Oy}$$



– reta que passa pela origem

$$a \neq 0 \text{ e } b \neq 0 \text{ e } c = 0$$

$$ax + by = 0 \Rightarrow (0, 0) \in r$$



Atividades

31. Determine a equação da reta que passa pelos pontos:

a) $A(2, 2)$ e $B(4, 3)$

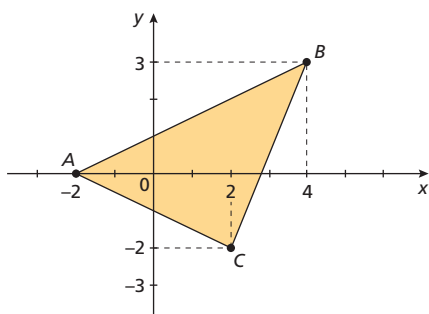
b) $M(1, -1)$ e $N(-2, 0)$

c) $R(-3, 2)$ e $S(-1, -1)$

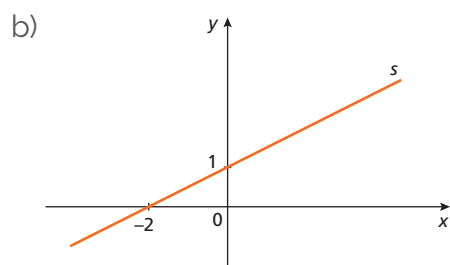
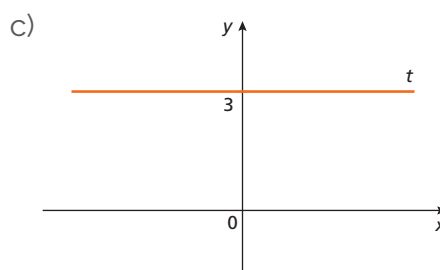
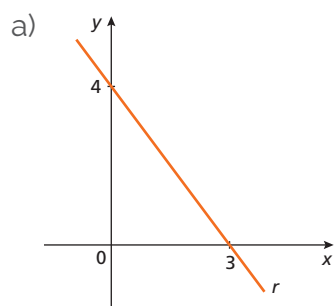
e) $M(0, 0)$ e $B\left(2, \frac{2}{3}\right)$

d) $A\left(\frac{4}{3}, 2\right)$ e $D\left(3, \frac{1}{5}\right)$

32. Determine a equação geral das retas-suporte dos lados do triângulo ABC , de vértices $A(-2, 0)$, $B(4, 3)$ e $C(2, -2)$.



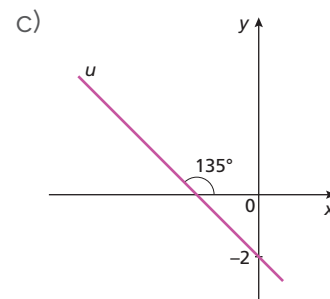
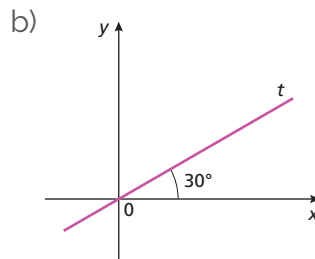
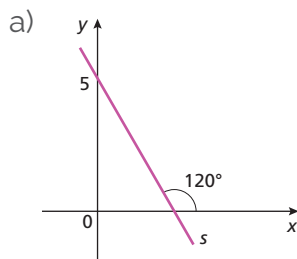
33. Determine, a partir dos gráficos, as equações gerais das retas representadas:



34. Verifique se os pontos $P(2, 1)$ e $Q(1, 4)$ pertencem à reta (r) $2x + y - 5 = 0$.

35. Dada a reta r de equação $2x - y + 3 = 0$ e os pontos $A(-1, 1)$, $B(0, 3)$, $C(2, 2)$, $D(1, -3)$ e $E(-3, 4)$, verifique quais desses pontos pertencem à reta r .

36. Dados os gráficos, determine, em cada caso, a equação geral da reta:



37. Esboce o gráfico das seguintes retas:

a) $y = -3$

b) $x = 5$

c) $2x - y = 3$

38. Determine a área do triângulo definido pela origem e pelas intersecções da reta (r) $2x + 3y - 6 = 0$ com os eixos $\overrightarrow{Ox}$ e $\overrightarrow{Oy}$.

39. Determine a intersecção das retas (r) $-4x + 2y + 2 = 0$ e (s) $2x - y - 1 = 0$.

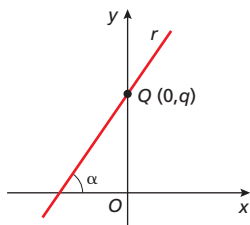
Equação reduzida da reta

Vamos determinar a equação da reta r que passa por $Q(0, q)$ e tem coeficiente angular $m = \operatorname{tg} \alpha$:

$$y - q = m(x - 0)$$

$$y - q = mx$$

$$y = mx + q$$



Toda equação na forma $y = mx + q$ é chamada equação reduzida da reta, em que m é o coeficiente angular e q é a ordenada do ponto no qual a reta cruza o eixo $\overrightarrow{Oy}$. A equação reduzida pode ser obtida diretamente da equação geral $ax + by + c = 0$:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c$$

Para $b \neq 0$, temos:

$$\left. \begin{array}{l} y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \\ m = -\frac{a}{b} \\ q = -\frac{c}{b} \end{array} \right\} \Rightarrow y = mx + q$$

Atividades resolvidas

R16. Obtenha a equação reduzida da reta r que passa por $P(0, 5)$ e é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Resolução

A equação da bissetriz dos quadrantes ímpares é $y = x$. Logo, $m = 1$. A equação da reta r que passa por $(0, 5)$ é:

$$y = mx + q \Rightarrow y = x + 5$$

Atividades

40. Obtenha a equação reduzida de cada uma das retas a seguir:

a) $2x - y + 3 = 0$

c) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

b) $6x + 9y - 1 = 0$

d) $y - 5 = 0$

41. Obtenha a equação reduzida da reta r que passa por $P(1, -5)$ e é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

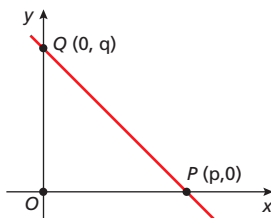
42. Obtenha a equação reduzida de r nos seguintes casos:

a) r é paralela à bissetriz dos quadrantes pares e passa por $P(0, 3)$;

b) r é paralela à reta $2x - y - 3 = 0$ e passa por $Q(0, -1)$.

Equação segmentária da reta

Considere uma reta r que cruza os eixos cartesianos nos pontos $(0, q)$ e $(p, 0)$.



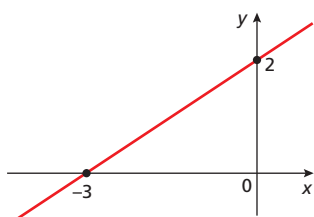
Vamos escrever a equação da reta r :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & q & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow qx + py - pq = 0 \Rightarrow qx + py = pq$$

Dividindo esta equação por pq , obtemos a equação segmentária da reta: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

Atividades resolvidas

R17. Determine a equação segmentária da reta r representada no gráfico.



Resolução

Como r cruza os eixos em $(-3, 0)$ e $(0, 2)$, teremos a seguinte equação:

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$$

R18. Escreva a equação segmentária da reta $x + 2y - 4 = 0$

Resolução

Vamos determinar a intersecção da reta $x + 2y - 4 = 0$ com os eixos coordenados:

$$x = 0 \Rightarrow 0 + 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2$$

$$y = 0 \Rightarrow x + 0 - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

Assim, temos a equação segmentária $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$.

Atividades

43. Determine a equação segmentária das retas que passam pelos pontos A e B :

a) $A(3, 0)$, $B(0, 1)$

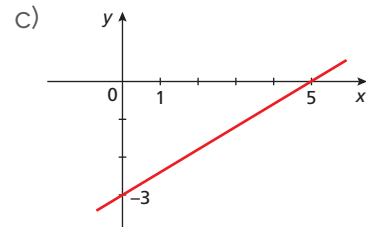
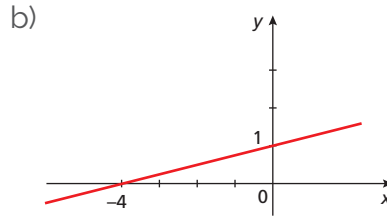
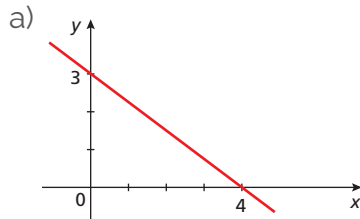
b) $A(-4, 0)$, $B(0, 2)$

44. Escreva a equação segmentária de cada reta a seguir:

a) $2x + y - 3 = 0$

b) $3x - y - 12 = 0$

45. Obtenha a equação segmentária da reta representada em cada um dos gráficos a seguir:



Posições relativas de duas retas

Considere duas retas distintas do plano cartesiano:

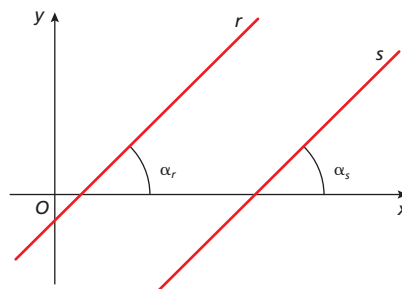
$$\begin{cases} (r) a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ (s) a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Podemos classificá-las como paralelas ou concorrentes.

Retas paralelas

As retas r e s têm o mesmo coeficiente angular.

$$\alpha_r = \alpha_s \Leftrightarrow m_r = m_s$$



Assim, para $r \parallel s$ temos:

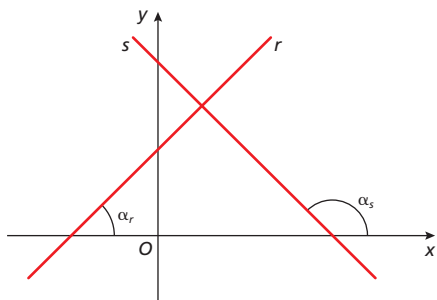
$$m_r = m_s \Leftrightarrow -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Retas concorrentes

As retas r e s têm coeficientes angulares diferentes.

$$\alpha_r \neq \alpha_s \Leftrightarrow m_r \neq m_s$$

Assim, para r e s concorrentes, temos:



$$m_r \neq m_s \Leftrightarrow -\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$$

Atividades resolvidas

R19. Determine a posição relativa das retas (r) $2x + 3y - 4 = 0$ e (s) $3x + y - 2 = 0$.

Resolução

A determinação da posição relativa é feita a partir dos coeficientes angulares:

$$m_r = -\frac{a}{b} \Rightarrow m_r = -\frac{2}{3}$$

$$m_s = -\frac{a}{b} \Rightarrow m_s = -\frac{3}{1} \Rightarrow m_s = -3$$

Como $m_r \neq m_s$, r é concorrente a s .

Atividades

46. Dados os pontos $A(1, 7)$, $B(0, 5)$, $C(3, 3)$, $D(1, -1)$ e $E(0, 7)$, determine a posição relativa das retas:

a) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CE}$

b) $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{EC}$

c) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$

47. Discuta em função de m a posição relativa das retas r e s dadas a seguir:

a) $(r) 2mx + y - 3 = 0$ e $(s) 6x + y + 1 = 0$

b) $(r) 3x - 2y - 8 = 0$ e $(s) 2x - my + 3 = 0$

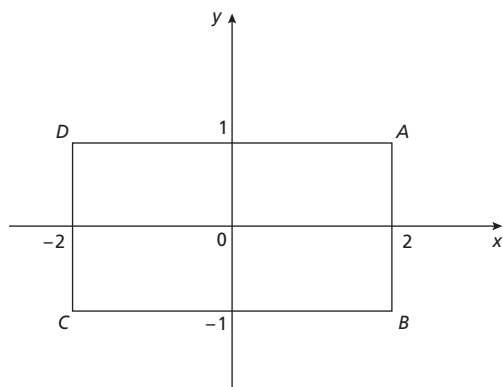
48. Dada a reta s de equação $x - 2y + 3 = 0$, obtenha r paralela a s , tal que:

a) r passe por $P(-2, -1)$;

b) r passe pela origem.

49. Um dos lados de um paralelogramo está sobre a reta $(r) y = 2x - 1$. Sabendo que os vértices $A(0, -1)$ e $B(3, 5)$ estão sobre a reta r , determine a equação do lado $\overline{CD}$ para $C(3, 0)$.

50. Um retângulo tem vértices $A(2, 1)$, $B(2, -1)$, $C(-2, -1)$ e $D(-2, 1)$.



Determine as equações:

a) das retas-suporte dos lados.

b) da reta-suporte da diagonal $\overline{AC}$.

Retas perpendiculares

Duas retas r e s não verticais são perpendiculares se e somente se os seus coeficientes angulares são tais que $m_r = -\frac{1}{m_s}$.

De fato: $r \perp s \Leftrightarrow \alpha_r = \alpha_s + \frac{\pi}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha_r = \cos \alpha_s \\ \cos \alpha_r = -\sin \alpha_s \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha_r = -\operatorname{cotg} \alpha_s$$

Como $\operatorname{cotg} \alpha_s = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_s}$:

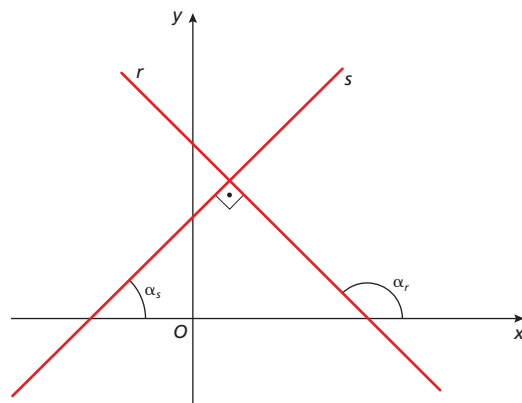
$$\operatorname{tg} \alpha_r = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_s} \Rightarrow m_r = \frac{1}{m_s}$$

Então:

$$r \perp s \Rightarrow m_r = -\frac{1}{m_s}$$

E, reciprocamente, se $m_r = -\frac{1}{m_s} \Rightarrow r \perp s$.

Logo, $r \perp s \Leftrightarrow m_r = -\frac{1}{m_s}$.



Atividades resolvidas

R20. Vamos verificar se as retas (r) $3x - 2y + 6 = 0$ e (s) $2x + 3y - 6 = 0$ são perpendiculares:

Resolução

$$\left. \begin{array}{l} m_r = -\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \\ m_s = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow m_r \cdot m_s = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$$

Portanto, r e s são perpendiculares.

R21. Determine a equação da reta s que passa pelo ponto $P(4, 3)$ e é perpendicular à reta (r) $2x - 3y + 1 = 0$.

Resolução

$$(r) \ 2x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow m_r = \frac{2}{3}$$

$$s \perp r \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r}$$

$$m_s = -\frac{1}{\frac{2}{3}} \Rightarrow m_s = -\frac{3}{2}$$

Logo, como s passa por $P(4, 3)$:

$$y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 4) \Rightarrow 2y - 6 = -3x + 12$$

$$(s) \ 3x + 2y - 18 = 0$$

Atividades

51. Em cada caso a seguir, verifique se as retas r e s são perpendiculares:

a) (r) $x + y = 1$ e (s) $x - y = -7$

b) (r) $3x - y - 7 = 0$ e (s) $3x - y + 1 = 0$

52. Determine k para que a reta (r) $kx - 3y + 9 = 0$ seja perpendicular à reta (s) $12x - 6y = 1$.

53. Obtenha p para que a reta (r) $x - 2py + 7 = 0$ seja perpendicular a (s) $-2px - y + 1 = 0$.

54. Determine a equação da reta s que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r nos seguintes casos:

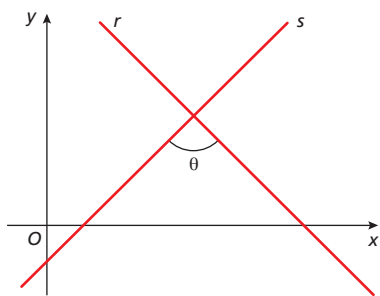
a) $P(-2, 1)$ e (r) $x - y + 4 = 0$

b) $P(0, 3)$ e (r) $2x + y - 3 = 0$

55. Obtenha a reta s perpendicular a (r) $-x + y + 3 = 0$ e que passa pelo ponto $A(-2, 1)$.

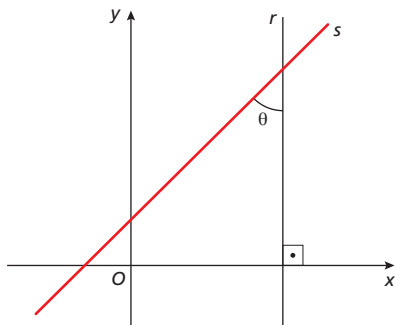
Ângulo entre duas retas

Conhecendo os coeficientes angulares m_r e m_s de duas retas r e s não paralelas aos eixos $\vec{Ox}$ e $\vec{Oy}$, podemos determinar o ângulo θ agudo formado entre elas:



$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \right|$$

Se uma das retas for vertical, teremos:



$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{1}{m_s} \right|$$

Atividades resolvidas

R22. Vamos determinar o ângulo formado entre as retas (r) $6x - 2y + 6 = 0$ e (s) $4x + 2y - 10 = 0$.

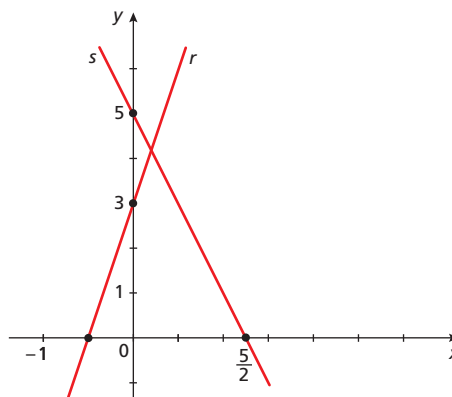
Resolução

$$(r) 6x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow m_r = 3$$

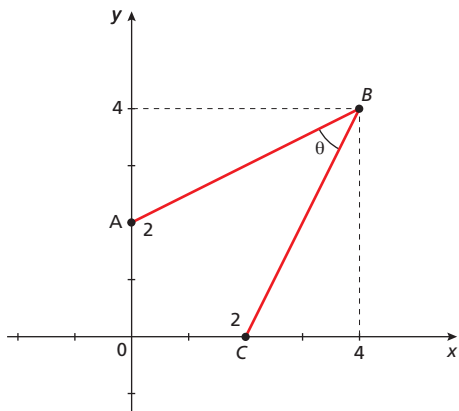
$$(s) 4x + 2y - 10 = 0 \Rightarrow m_s = -2$$

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \right| \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \left| \frac{-2 - 3}{1 + (-2) \cdot 3} \right|$$

$$\operatorname{tg} \theta = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$



R23. Calcule a medida do ângulo $\theta = \angle ABC$ para $A(0, 2)$, $B(4, 4)$ e $C(2, 0)$.



Resolução

Chamando de r a reta que passa por A e B e de s a reta que passa por B e C, temos:

$$(r) -x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow m_r = \frac{1}{2}$$

$$(s) 2x - y - 4 = 0 \Rightarrow m_s = 2$$

$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot 2} \right| \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{3}{4} = 0,75$$

Da tabela trigonométrica, obtemos $\theta \approx 37^\circ$.

Atividades

56. Determine a medida do ângulo formado pelos pares de retas a seguir:

a) $(r) 2x - 4y + 1 = 0$ e $(s) 3x + 9y + 7 = 0$

b) $(u) 5x - y + 8 = 0$ e $(v) 6x - 2y + 3 = 0$

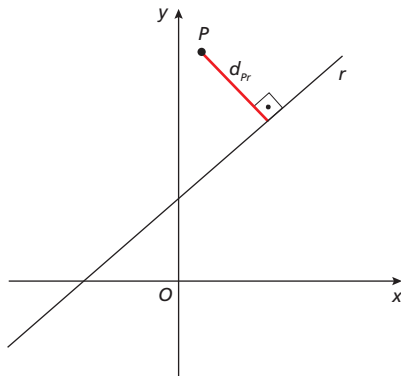
57. Calcule a medida do ângulo $\theta = ABC$ para $A(1, 4)$, $B(3, 3)$ e $C(-1, 0)$.

58. Determine o ângulo formado pelas retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{RS}$ para $P(1, 1)$, $Q(4, 2)$, $R(-1, -3)$ e $S(2, 0)$.

Distância de ponto a reta

Considere uma reta r , de equação $ax + by + c = 0$, e um ponto $P(x_0, y_0)$ não pertencente a r . Pode-se demonstrar que a distância entre P e r (d_{Pr}) é dada por:

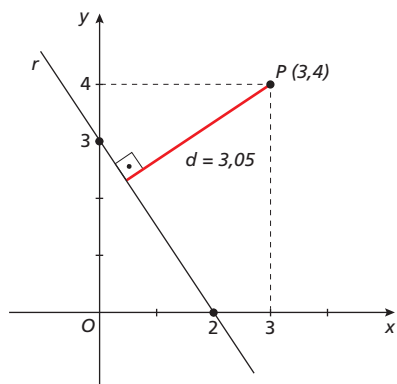
$$d_{Pr} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$



Atividades resolvidas

R24. Calcule a distância entre o ponto $P(3, 4)$ e a reta (r) $3x + 2y - 6 = 0$.

Resolução



$$\begin{cases} P(3, 4) \\ (r) 3x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$d_{Pr} = \left| \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 - 6}{\sqrt{9 + 4}} \right| = \frac{11}{\sqrt{13}} = \frac{11\sqrt{13}}{13}$$

Portanto, $d_{Pr} \approx 3,05$.

R25. Calcule a distância entre as retas paralelas:

(r) $5x - 3y + 15 = 0$ e (s) $5x - 3y - 15 = 0$.

Resolução

A partir da fórmula da distância entre um ponto e uma reta, podemos determinar a distância entre duas retas paralelas de equações conhecidas. Para isso, basta obter um ponto em uma delas e calcular a distância desse ponto à outra reta. Atribuímos um valor arbitrário a x e obtemos o valor correspondente de y :

$$x = 0 \Rightarrow 5 \cdot 0 - 3y + 15 = 0$$

$$y = 5 \Rightarrow P(0, 5)$$

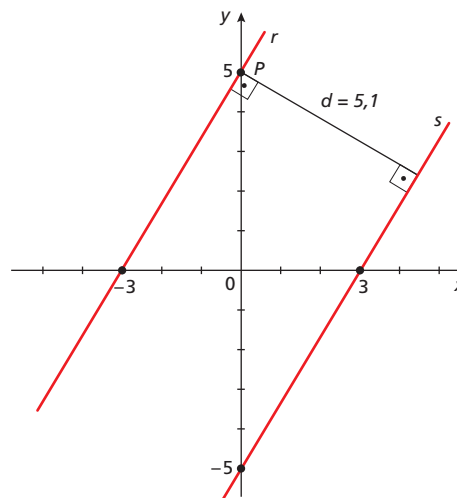
Para encontrar a distância de P a s , utilizamos a fórmula da distância de ponto a reta:

$$\begin{cases} P(0, 5) \\ (s) 5x - 3y - 15 = 0 \end{cases}$$

$$d_{Ps} = \left| \frac{5 \cdot 0 - 3 \cdot 5 - 15}{\sqrt{25 + 9}} \right| = \frac{30\sqrt{34}}{34} = \frac{15\sqrt{34}}{17}$$

Como $\sqrt{34} \approx 5,83$, teremos a distância entre r e s :

$$d_{rs} \approx 5,14$$



Atividades

59. Calcule a distância entre o ponto P e a reta r em cada um dos casos a seguir:

a) $P(2, 4)$ e $(r) 3x - 4y + 1 = 0$

b) $P(0, 0)$ e $(r) x + y = 0$

c) $P(-2, 3)$ e $(r) 2x - y = 0$

d) $P(-2, -5)$ e $(r) 8x + 6y - 10 = 0$

60. Calcule a medida da altura h , relativa ao lado $\overline{AC}$, do triângulo ABC que tem vértices $A(3, 2)$, $B(1, -5)$ e $C(-2, -4)$.

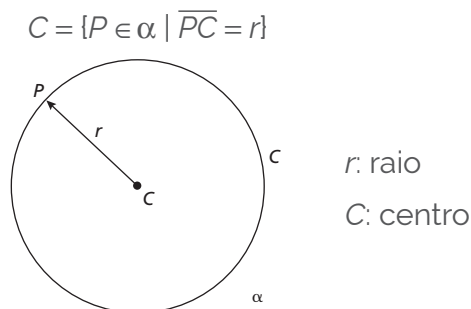
61. Determine a distância entre cada par de retas paralelas a seguir:

a) $(r) -x - y + 2 = 0$ e $(s) x + y - 1 = 0$

b) $(t) 2x + y - 7 = 0$ e $(u) 4x + 2y + 3 = 0$

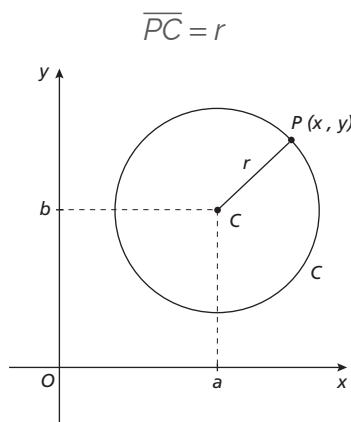
Estudo da circunferência

Denominamos circunferência o conjunto de pontos de um plano α que equidistam de um ponto C de α .



Equação reduzida da circunferência

Considere um ponto $C(a, b)$ em um plano cartesiano e um número real $r \geq 0$. Qualquer ponto $P(x, y)$ que pertencer à circunferência C deverá satisfazer esta condição:

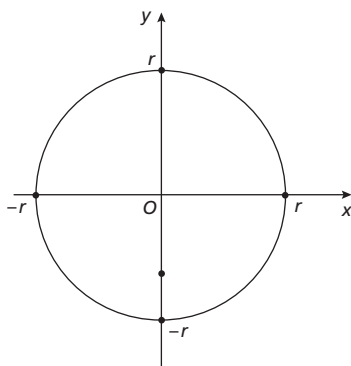


Usando a fórmula da distância entre dois pontos, temos:

$$d_{PC} = r \Rightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Essa equação é chamada equação reduzida da circunferência, de centro $C(a, b)$ e raio r .
Toda circunferência cuja equação é do tipo $x^2 + y^2 = r^2$ tem centro na origem e raio r .



Atividades resolvidas

R26. Escreva a equação reduzida de cada uma das circunferências a seguir, que obtemos conhecendo o centro C e o raio r :

a) $C(2, 3)$ e $r = 4$

b) $C(-2, -3)$ e $r = 1$

Resolução

a) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

b) $(x - (-2))^2 + (y - (-3))^2 = 1^2$

$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$

R27. Determine o centro e o raio da circunferência de equação $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$.

Resolução

Comparando $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$ com $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, temos:

$$\left. \begin{array}{l} a = 4 \\ b = 3 \\ r^2 = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow C(4, 3) \text{ e } r = 4$$

R28. Em que pontos a circunferência de equação $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 1$ cruza o eixo $\overleftrightarrow{Oy}$?

Resolução

A circunferência cruza o eixo $\overleftrightarrow{Oy}$ nos pontos de abscissa $x = 0$. Assim:

$$x = 0 \Rightarrow 1 + (y - 3)^2 = 1 \Rightarrow (y - 3)^2 = 0 \Rightarrow y = 3$$

Logo, o ponto é $(0, 3)$.

Atividades

62. Escreva a equação da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r em cada um dos casos a seguir:

a) $C(-4, 1)$ e $r = 4$

b) $C(-2, -1)$ e $r = 3$

63. Determine o centro e o raio das circunferências de equações:

a) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$

c) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 8$

b) $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 25$

64. Dados os pontos $A(2, 0)$, $B(-1, 1)$, $C(3, -4)$ e $D(4, 0)$, verifique quais estão na circunferência C de equação $(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 25$.

65. Dados os pontos $A(1, 2)$, $B(4, -1)$ e $M(3, \sqrt{6})$, quais pertencem à circunferência de centro $C(0, -1)$ e raio igual a 4?

66. Em que pontos a circunferência de equação $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 2$ cruza o eixo $\overleftrightarrow{Oy}$?

67. Determine os pontos em que a circunferência de equação $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 5$ cruza o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$.

68. Escreva a equação da circunferência de centro $C(2, -1)$ que passa pelo ponto $P(1, 4)$.

Equação geral da circunferência

Dada uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r , podemos obter sua equação geral a partir do desenvolvimento da equação reduzida:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Atividades resolvidas

R29. Determine a equação geral da circunferência de centro $C(1, 2)$ e raio $r = 3$.

Resolução

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$

Atividades

69. Escreva a equação geral da circunferência, dados o centro e o raio:

a) $C(2, 1)$ e $r = 1$

b) $C(0, 0)$ e $r = 6$

c) $C(-3, 2)$ e $r = 2$

70. Determine as coordenadas do centro e a medida do raio das circunferências de equações:

a) $x^2 + y^2 + 12y - 13 = 0$

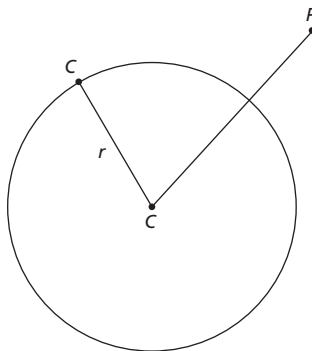
b) $x^2 + y^2 + 10x + 8y + 25 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$

Posição de um ponto em relação a uma circunferência

Dados um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma circunferência C de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, existem três posições possíveis para o ponto P em relação a C :

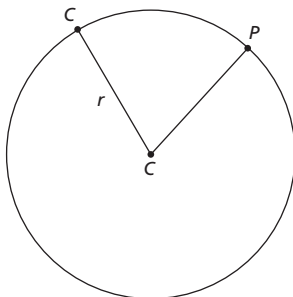
– P é exterior a C



Nesse caso, $d_{CP} > r$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > r^2$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 > 0$$

– P pertence a C

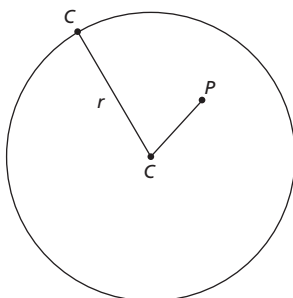


Nesse caso, $d_{CP} = r$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$$

– P é interior a C



Nesse caso $d_{CP} < r$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 < 0$$

Atividades resolvidas

R30. Verifique a posição relativa dos pontos $P(-6,3)$, $Q(-5,4)$ e $S(0,1)$ em relação à circunferência C de equação $x^2 + y^2 + 12x - 12y + 63 = 0$.

Resolução

Basta substituir cada ponto na equação da circunferência para verificarmos sua posição relativa:

$$P(-6,3) \Rightarrow (-6)^2 + 3^2 + 12 \cdot (-6) - 12 \cdot 3 + 63 = 36 + 9 - 72 - 36 = 0 \Rightarrow P \text{ pertence a } C$$

$$Q(-5,4) \Rightarrow (-5)^2 + 4^2 + 12 \cdot (-5) - 12 \cdot 4 + 63 = 25 + 16 - 60 - 48 + 63 = -4 < 0 \Rightarrow Q \text{ é interior a } C$$

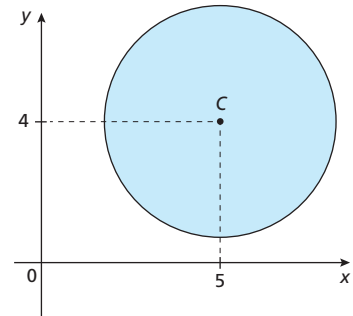
$$S(0,1) \Rightarrow (0)^2 + 1^2 + 12 \cdot (0) - 12 \cdot 1 + 63 = 1 - 12 + 63 = 52 > 0 \Rightarrow S \text{ é exterior a } C$$

R31. Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos $P(x,y)$ tais que $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 \leq 9$. Discuta o significado geométrico da representação obtida.

Resolução

Os pontos que satisfazem a relação $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 \leq 9$ são interiores à circunferência de centro $C(5,4)$ e raio igual a 3:

Esse conjunto de pontos (circunferência e seu interior) define o **círculo** de centro $C(5,4)$ e raio igual a 3.



Atividades

71. Determine a posição de cada ponto a seguir em relação à circunferência C de equação $x^2 + y^2 + 2x - 20y - 20 = 0$.

a) $L(5, 0)$

c) $N(0, 0)$

b) $M(9, 5)$

d) $P(10, 10)$

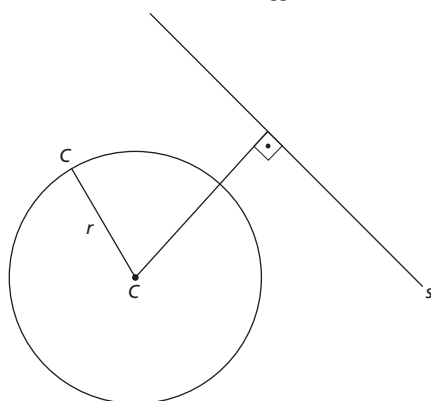
72. Obtenha o valor de k para que o ponto $P(k,2)$ pertença à circunferência $x^2 + (y - 1)^2 = 4$.

73. Represente graficamente o conjunto de pontos que satisfaz à sentença $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$.

Posição de uma reta em relação a uma circunferência

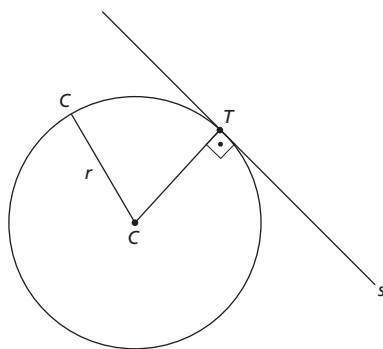
Dadas uma reta s e uma circunferência C , de centro C e raio r , há três posições possíveis para a reta s em relação à circunferência C . Essas posições são determinadas comparando-se a distância d_{Cs} do centro C à reta s com o raio r da circunferência.

– A reta s **não cruza** a circunferência C . Então, $d_{Cs} > r$.



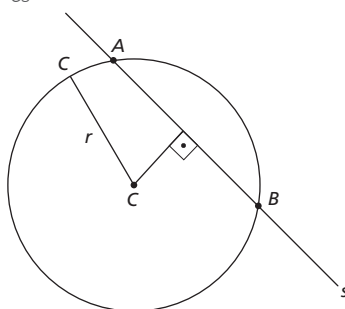
$$d_{Cs} > r \Leftrightarrow s \cap C = \emptyset$$

– A reta s é tangente a C . Então, $d_{Cs} = r$.



$$d_{Cs} = r \Leftrightarrow s \cap C = \{T\}$$

– A reta s é secante a C . Então, $d_{Cs} < r$.



$$d_{Cs} < r \Leftrightarrow s \cap C = \{A, B\}$$

Atividades resolvidas

R32. Determine a posição da reta (s) $2x + y + 1 = 0$ em relação à circunferência (C) $x^2 + y^2 = 16$.

Resolução

Determinamos, inicialmente, o centro e o raio da circunferência:

$x^2 + y^2 = 16$ tem centro $C(0,0)$ e raio $r = 4$.

Em seguida, calculamos a distância do centro C à reta r e a comparamos com o raio:

$$d_{Cs} = \frac{|2 \cdot 0 + 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

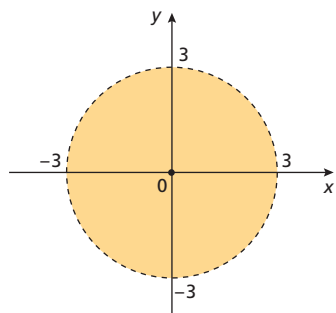
Como $\frac{\sqrt{5}}{5} < 4$, temos $d_{Cs} < r$, o que significa que a reta s é secante à circunferência C .

R33. Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos $P(x, y)$ que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ x + y \geq 3 \end{cases}$$

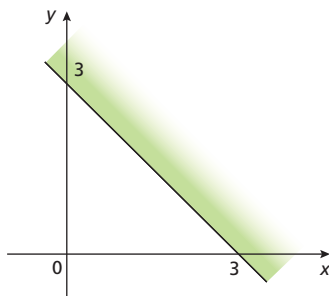
Resolução

Os pontos que satisfazem a relação $x^2 + y^2 < 9$ são interiores à circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio $r = 3$:

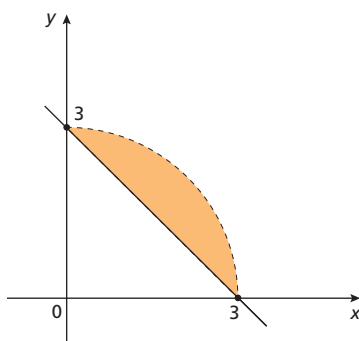


Para a relação $x + y \geq 3$, que também pode ser escrita como $y \geq -x + 3$, teremos o seguinte conjunto de pontos, obtidos atribuindo-se os valores $x = 0$ e $y = 0$ na equação da reta $y = -x + 3$:

$$x = 0 \Rightarrow y = 3 \quad y = 0 \Rightarrow x = 3$$



O sistema de inequações será, então, representado pela intersecção das duas regiões planas encontradas:



Atividades

74. Para cada reta dada, determine sua posição em relação à circunferência C de equação $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 64$.

a) (s) $3x + 4y + 40 = 0$

b) (t) $3x + 4y + 32 = 0$

75. Determine a posição da reta (s) $4x + 3y - 12 = 0$ em relação à circunferência cuja equação é dada por $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 47 = 0$.

76. Obtenha, caso existam, os pontos de intersecção da reta s com a circunferência C nos seguintes casos:

a) (s) $x - y - 1 = 0$ e (C) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

b) (s) $y - 1 = 0$ e (C) $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 16$

77. Determine as equações das retas tangentes à circunferência $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$ que passam pelo ponto $P(5,2)$.

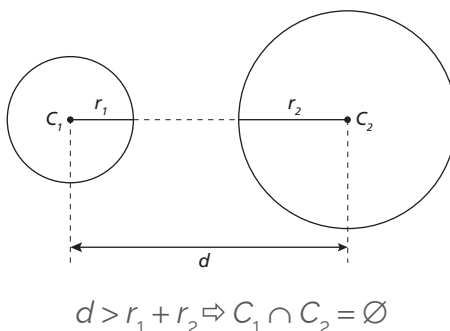
78. Obtenha as equações das retas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = 1$ que sejam paralelas à reta de equação $y = 2x$.

79. Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos $P(x, y)$ que satisfazem o sistema:

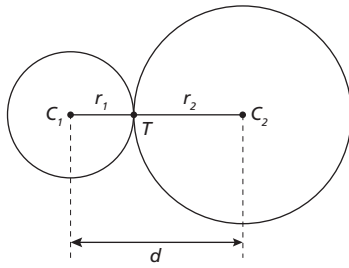
Posições relativas de duas circunferências

Para analisar as posições relativas das circunferências de centro C_1 e raio r_1 e de centro C_2 e raio r_2 , devemos comparar a distância $d = C_1C_2$ entre seus centros com os valores de $r_1 + r_2$ ou de $|r_1 - r_2|$. Há cinco posições relativas possíveis para duas circunferências:

– circunferências externas



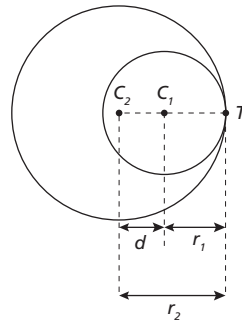
– circunferências tangentes externamente



$$d = r_1 + r_2$$

$$C_1 \cap C_2 = \{T\}$$

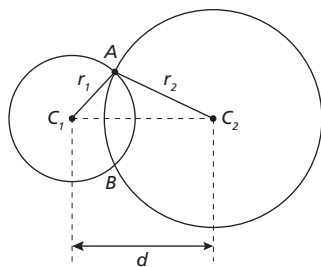
– circunferências tangentes internamente



$$d = |r_1 - r_2|$$

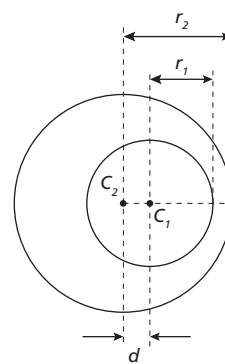
$$C_1 \cap C_2 = \{T\}$$

– circunferências secantes



$$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2 \Rightarrow C_1 \cap C_2 = \{A, B\}$$

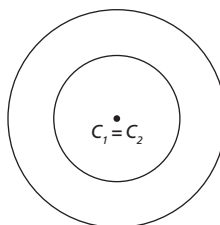
– uma circunferência interior a outra



$$0 \leq d < |r_1 - r_2|$$

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset$$

Um caso particular em que uma circunferência é interior a outra é aquele em que $C_1 = C_2$, ou seja, $d = 0$. Nesse caso, dizemos que as circunferências são concêntricas.



Atividades resolvidas

R34. Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos $P(x, y)$ que satisfazem a sentença: $9 < x^2 + y^2 < 25$. Discuta o significado geométrico da representação obtida.

Resolução

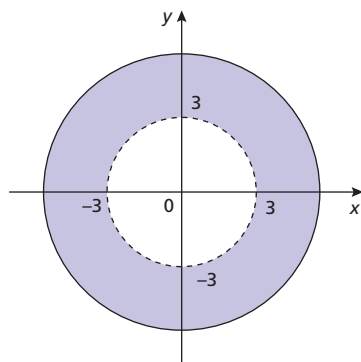
A sentença $9 < x^2 + y^2 < 25$ é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 9 < x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 < 25 \end{cases}$$

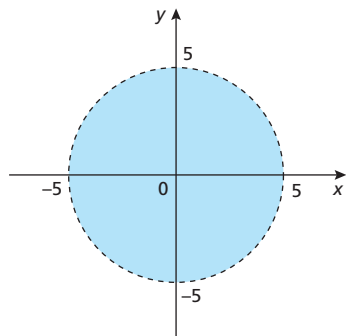
que pode ser escrito como:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 9 \\ x^2 + y^2 < 25 \end{cases}$$

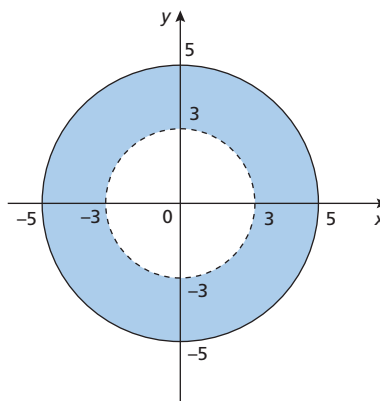
Os pontos que satisfazem à relação $x^2 + y^2 > 9$ são exteriores à circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio $r = 3$:



Os pontos que satisfazem a relação $x^2 + y^2 < 25$ são interiores à circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio $r = 5$:



O sistema de inequações será, portanto, representado pela intersecção das duas regiões:



A região encontrada equivale a uma coroa circular resultante de dois círculos concêntricos de raios 3 e 5.

Atividades

80. Analise, em cada caso, as posições relativas das circunferências C_1 e C_2 :

a) $(C_1) x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ e $(C_2) x^2 + y^2 - 4y = 0$

b) $(C_1) x^2 + y^2 - 10x - 24y + 168 = 0$ e $(C_2) x^2 + y^2 - 225 = 0$

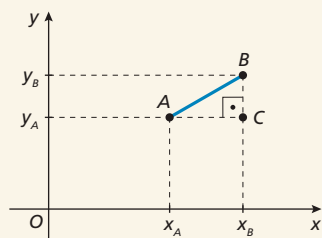
81. Caso existam, obtenha os pontos de intersecção das circunferências:

a) $(C_1) x^2 + y^2 - 16x - 16y + 63 = 0$ e $(C_2) x^2 + y^2 - 1 = 0$

b) $(C_1) x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ e $(C_2) x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$

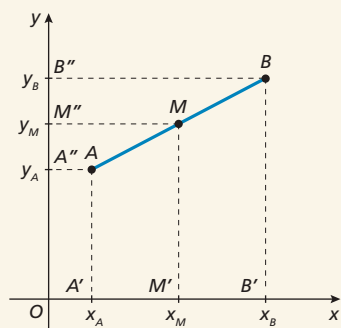
Resumo

Distância entre dois pontos



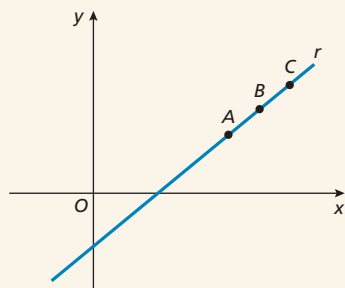
$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Ponto médio de um segmento AB



$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Alinhamento de três pontos

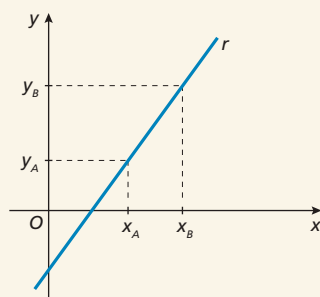


$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

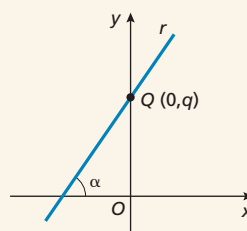
Área de um triângulo ABC

$$S = \frac{1}{2} |D| \Rightarrow S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Coefficiente angular



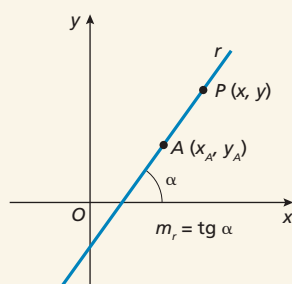
Equação reduzida da reta



$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

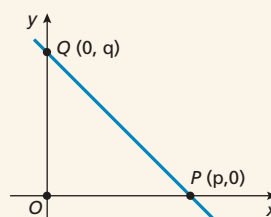
$$y = mx + q$$

Equação fundamental da reta



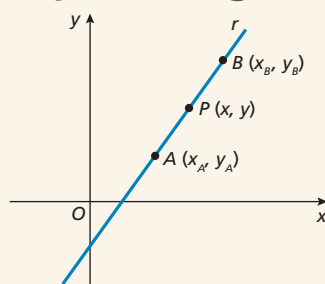
$$m_r = \frac{y - y_A}{x - x_A} \Rightarrow y - y_A = m_r(x - x_A)$$

Equação segmentária da reta



$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

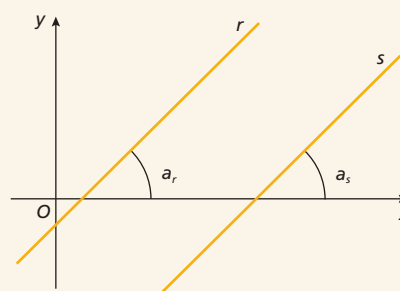
Equação geral da reta



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ax + by + c = 0$$

Posições relativas de duas retas

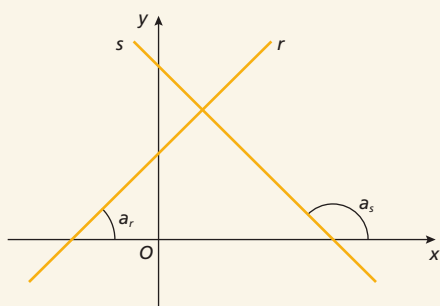
– Retas paralelas



$$m_r = m_s \Leftrightarrow$$

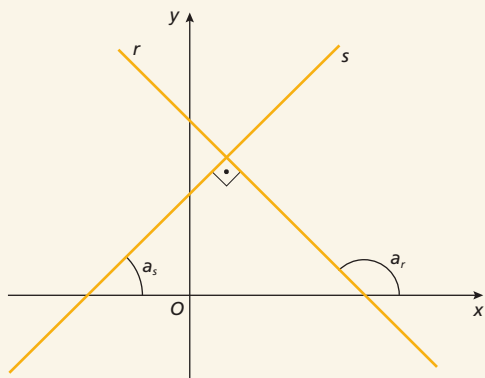
$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \right.$$

– Retas concorrentes



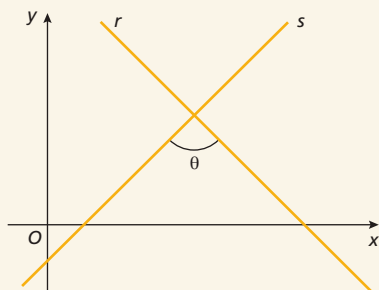
$$m_r \neq m_s \Leftrightarrow -\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$$

– Retas perpendiculares



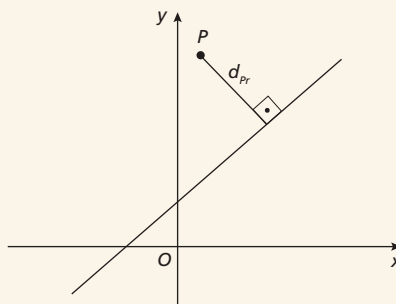
$$r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

Ângulo entre duas retas



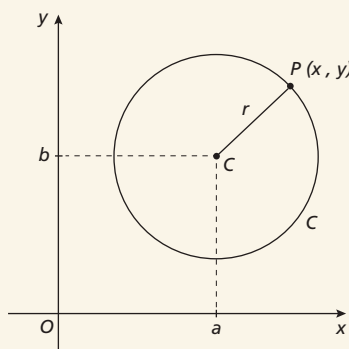
$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \right|$$

Distância de ponto a reta



$$d_{Pr} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Equação reduzida da circunferência



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Equação geral da circunferência

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Avalie o que aprendeu

1. O ponto $P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é médio de $\overline{AB}$. Dado $A(4, 2)$, calcule as coordenadas de B .

- a) $B(0, 0)$
- b) $B(-2, -2)$
- c) $B(-1, -1)$
- d) $B(2, 2)$
- e) $B(1, 1)$

2. Calcule a área de um quadrado, sabendo que os pontos $(1, 1)$ e $(4, 5)$ são as coordenadas de dois vértices consecutivos.

- a) $S = 10$ u.a.
- b) $S = 15$ u.a.
- c) $S = 20$ u.a.
- d) $S = 25$ u.a.
- e) $S = 30$ u.a.

3. Os pontos $A(4, 7)$ e $B(-2, 1)$ são as extremidades de uma diagonal de um quadrado. Calcule a medida do lado desse quadrado.

- a) 3
- b) 4
- c) 5
- d) 6
- e) 7

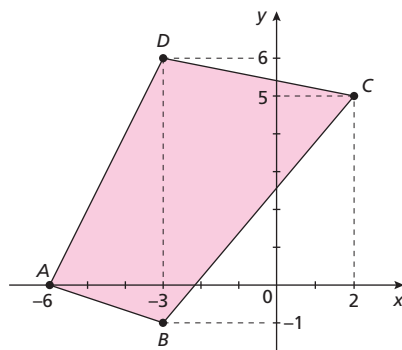
4. Para que valores de k o coeficiente angular da reta de equação $-2kx + y - 12 = 0$ é igual a -8 ?

- a) $k = -2$
- b) $k = -4$
- c) $k = -8$
- d) $k = -10$
- e) $k = -12$

5. Calcule o valor de k , sabendo que o ponto $(6, 3k)$ pertence à reta de equação $2y - 3x - 6 = 0$.

- a) $k = 4$
- b) $k = 6$
- c) $k = 8$
- d) $k = 10$
- e) $k = 12$

6. Calcule a área do polígono $ABCD$.



a) 12 u.a.

c) 20 u.a.

e) 28 u.a.

b) 16 u.a.

d) 24 u.a.

7. Determine as coordenadas do centro e o raio de uma circunferência de equação $(x - 3)^2 + y^2 = 3$.

a) $C(0, 3); r = \sqrt{3}$

d) $C(5, 0); r = \sqrt{5}$

b) $C(3, 0); r = \sqrt{3}$

e) $C(0, 5); r = \sqrt{5}$

c) $C(3, 3); r = \sqrt{3}$

8. Determine a área de um círculo limitado por uma circunferência de centro $(2, 1)$ e que passa pelo ponto $(1, 1)$.

a) $S = 3$ u.a.

d) $S = 2\pi$ u.a.

b) $S = 2$ u.a.

e) $S = \pi$ u.a.

c) $S = 3\pi$ u.a.

9. O ponto $Q(2, k)$ pertence à circunferência de centro $(1, 2)$ e de raio $\sqrt{5}$. Calcule o valor de k .

a) $k = 0$ ou $k = 2$

d) $k = 4$ ou $k = 6$

b) $k = 0$ ou $k = 4$

e) $k = 6$ ou $k = 8$

c) $k = 2$ ou $k = 4$

10. Determine a equação da reta paralela ao eixo das abscissas que tangencia a circunferência de equação $x^2 + (y - 2)^2 = 16$.

a) $y = 6$

d) $y = 9$

b) $y = 7$

e) $y = 10$

c) $y = 8$



AdobeStock

Os fractais são criados graças aos estudos de teorias matemáticas e modernas tecnologias.

Capítulo 6

Polinômios e equações polinomiais

A interseção entre as funções polinomiais e suas raízes abre um universo criativo e tecnológico fascinante. Através dessa compreensão matemática, é possível não apenas explorar os princípios fundamentais das equações polinomiais, mas também desencadear aplicações inovadoras. A programação de aplicativos de computador ou o desenvolvimento de inteligências artificiais pode permitir a criação de fractais complexos e visualmente intrigantes, semelhantes aos mostrados na imagem. Esses fractais são produtos diretos da manipulação e variação das raízes das funções polinomiais, oferecendo uma plataforma única para a expressão artística e a exploração matemática. Essa convergência entre matemática e tecnologia ressalta a profunda relação entre os conceitos teóricos e suas manifestações práticas, ilustrando como a compreensão das raízes polinomiais pode impulsionar a criatividade e a inovação em um mundo cada vez mais digital.

Neste capítulo, vamos explorar o que são as funções polinomiais e as equações polinomiais. Vamos descobrir como usar as principais operações matemáticas nesse contexto, além de desvendar o que está por trás dessas ideias matemáticas e como podem nos ajudar a resolver problemas do dia a dia.

Funções polinomiais

Uma função $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, em que $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ são números reais fixos com $a_n \neq 0$, é denominada função polinomial de grau n ($n \in \mathbb{N}$).

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

- x é a variável do polinômio
- $n \in \mathbb{N}$ é o grau de $p(x)$ ($a_n \neq 0$)
- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ são os coeficientes do polinômio
- a_0 é o coeficiente independente ou termo independente

No polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, se $a_n \neq 0$, temos $\text{gr}(p) = n$.

Notação:

$\text{gr}(p) = n$ indica que o grau do polinômio p é n

Definimos valor numérico de um polinômio $p(x)$ ao número real que se obtém substituindo a variável x por um número α . Quando esse valor acarretar em $p(\alpha) = 0$, dizemos que α é um zero do polinômio ou uma raiz da equação $p(x) = 0$.

Igualdade de polinômios

Dois polinômios são iguais, ou idênticos, se e somente se todos os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais.

Dados: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$, temos:

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = b_n \\ a_{n-1} = b_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 = b_1 \\ a_0 = b_0 \end{cases}$$

Atividades resolvidas

R1. Nos polinômios seguintes, indique a variável, os coeficientes e o grau de $p(x)$, se possível:

a) $p(x) = 3x^2 + 2x - 4$

b) $p(x) = 3x + 1$

Resolução

a) $p(x) = 3x^2 + 2x - 4$

- x é variável
- 3, 2, -4 são coeficientes
- $\text{gr}(p) = 2$

b) $p(x) = 3x + 1$

- x é variável
- 3, 1 são coeficientes
- $\text{gr}(p) = 1$

R2. Discuta o grau do polinômio $p(x) = (k + 1)x^2 + 3x + 2$ em função de $k \in \mathbb{R}$.

Resolução

Vamos analisar o coeficiente do termo de maior grau.

$$k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$$

Se $k \neq -1$, então $\text{gr}(p) = 2$.

Se $k = -1$, então $\text{gr}(p) = 1$.

R3. Em $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$, determine o valor numérico de $p(x)$ par a:

a) $x = 2$ b) $x = 0$

Resolução

a) $x = 2 \Rightarrow p(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 \Rightarrow p(2) = 3$

b) $x = 0 \Rightarrow p(0) = 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 \Rightarrow p(0) = 1$

R4. Determine a , b e c para que o polinômio $p(x) = (a + b - 5)x^2 + (a - b - 1)x + c + 4$ seja identicamente nulo.

Resolução

Se $p(x) = 0$, então todos os coeficientes são nulos:

$$\begin{cases} a + b - 5 = 0 & \text{(I)} \\ a - b - 1 = 0 & \text{(II)} \\ c + 4 = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (III), temos: $c = -4$

De (I) e (II), temos: $\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ e } b = 2$

Logo, $a = 3$, $b = 2$ e $c = -4$.

Atividades

1. Determine o grau dos polinômios a seguir:

a) $p(x) = 3x^3 + 2x - 1$

b) $p(x) = x$

c) $p(x) = 2x^7 - 3x^2 + 1$

d) $p(x) = 4 + x - 2x^2 + 3x^4$

2. Discuta o grau dos polinômios em função de $k \in \mathbb{R}$:

a) $p(x) = (2k + 6)x^3 + (3 + k)x + 1$

b) $p(x) = (k^2 - 4)x^2 + (k - 2)x - 3$

3. Determine o valor de k para que o polinômio $p(x) = (k - 4)x^3 + (k^2 - 16)x^2 + (k + 4)x + 4$ seja de grau 2.

4. Dado o polinômio $p(x) = 3x^5 - x^2 + 3$, calcule:

a) $p(0)$

b) $p(1)$

5. Dado o polinômio $p(x) = 2x^2 + kx - 2$, determine k , sabendo que $p(2) = 6$.

6. No polinômio $p(x) = x^3 - kx^2 + x + 1$, determine k se:

a) $p(1) = 0$

b) $p(3) = 1$

7. Determine k para que $x = 3$ seja raiz do polinômio $p(x) = kx^3 + x^2 + 2x + 1$.

8. Mostre que 1 e 3 são raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

9. Determine a , b e c para que os seguintes polinômios sejam nulos:

a) $p(x) = (a + 2)x^3 + (b - 2)x + (c^2 - 9)$

b) $p(x) = (a + b)x^3 + (a + 2c)x^2 + (b + c)x$

10. Determine o valor de a e b em cada caso:

a) $p(x) = ax^2 + bx$ e $p(x) = 0$

b) $p(x) = ax^2 + bx + 2$, $p(2) = 4$ e $p(3) = 6$

c) $p(x) = ax^3 - 4x + b$, $p(1) = -2$ e $p(-1) = 5$

11. Determine a e b , sabendo que os números 2 e -2 são raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$.

Adição e subtração de polinômios

Para somar dois polinômios, adicionamos os coeficientes dos termos de mesmo grau. Da mesma forma, para obter a diferença de dois polinômios, subtraímos os coeficientes dos termos de mesmo grau.

Atividades resolvidas

R5. Adicione os polinômios $p(x)$ e $q(x)$:

$$p(x) = 4x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 1$$

$$q(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 7$$

Resolução

$$p(x) + q(x) = 4x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 1 + x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 7$$

$$p(x) + q(x) = 4x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 8$$

Note que, nesse caso, temos:

$$\left. \begin{array}{l} \text{gr}(p) = 5 \\ \text{gr}(q) = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{gr}(p + q) = 5$$

Nos casos de adição e subtração de polinômios, o polinômio resultante terá grau igual ou menor ao polinômio de maior grau.

R6. Obtenha a diferença $p(x) - q(x)$ dos polinômios:

$$p(x) = 6x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1$$

$$q(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 1$$

Resolução

$$p(x) - q(x) = 6x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1 - 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$$

$$p(x) - q(x) = 3x^4 - x^3 + 3x^2 + 2 \text{ e o grau do polinômio obtido é 4.}$$

Multiplicação de polinômios

Para obter o produto de dois polinômios, multiplicamos cada termo de um deles por todos os termos do outro, somando os termos de mesmo grau.

O grau do polinômio-produto $p(x) \cdot q(x)$ é a soma dos graus de $p(x)$ e $q(x)$, se nenhum deles for o polinômio nulo: $\text{gr}(p \cdot q) = \text{gr}(p) + \text{gr}(q)$.

Atividades resolvidas

R7. Vamos multiplicar os polinômios:

$$p(x) = 3x^2 + 2x$$

$$q(x) = x^3 - x^2 + 5$$

Resolução

$$p(x) \cdot q(x) = (3x^2 + 2x)(x^3 - x^2 + 5)$$

$$p(x) \cdot q(x) = 3x^2(x^3 - x^2 + 5) + 2x(x^3 - x^2 + 5)$$

$$p(x) \cdot q(x) = 3x^5 - 3x^4 + 15x^2 + 2x^4 - 2x^3 + 10x$$

$$p(x) \cdot q(x) = 3x^5 - x^4 - 2x^3 + 15x^2 + 10x$$

Observe o grau do polinômio-produto:

$$\left. \begin{array}{l} \text{gr}(p) = 2 \\ \text{gr}(q) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{gr}(p \cdot q) = 5$$

R8. Dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ têm graus n e m , respectivamente. Sabendo que o grau de $p(x) \cdot q(x)$ é 7 e que $m - n = -1$, determine o grau de $p(x)$ e $q(x)$.

Resolução

$$\text{gr}(p \cdot q) = 7 \Rightarrow m + n = 7$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m + n = 7 \\ m - n = -1 \end{array} \right. \Rightarrow m = 3 \text{ e } n = 4$$

Logo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{gr}(p) = 4 \\ \text{gr}(q) = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{gr}(p \cdot q) = 7$$

Atividades

12. Dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ têm o mesmo grau n . Analise o grau da soma $p(x) + q(x)$, sabendo que o grau de $p(x) \cdot q(x) = 8$.

13. Dados os polinômios $p(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 1$, $q(x) = 3x^5 + 1$ e $t(x) = 4x^2 - 1$, obtenha:

a) $p(x) + q(x)$

c) $q(x) - t(x)$

b) $q(x) \cdot t(x)$

d) $t(x) \cdot p(x) - q(x)$

Observação: $(t(x))^2 = t(x) \cdot t(x)$ e $(q(x))^2 = q(x) \cdot q(x)$

14. Verifique se cada afirmação é verdadeira ou falsa:

a) Se o grau do polinômio p é 5, então o grau do polinômio $2p$ é 10.

b) Se o grau do polinômio p é m e do polinômio q é n , com $m > n$, então o grau do polinômio $p + q$ é m .

Divisão de polinômios

Considere os polinômios $p(x)$ e $d(x)$, não nulos, tais que o grau de $p(x)$ seja maior ou igual ao grau de $d(x)$. Nessas condições, podemos efetuar a divisão de $p(x)$ por $d(x)$, encontrando dois polinômios, $q(x)$ e $r(x)$, que satisfazem as seguintes condições:

- $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$
- $r(x) = 0$ ou $\text{gr}(r) < \text{gr}(d)$

$p(x)$: dividendo

$d(x)$: divisor

$q(x)$: quociente

$r(x)$: resto

Se $r(x)$ for o polinômio nulo, dizemos que $p(x)$ é divisível por $d(x)$.

A divisão de dois polinômios pode ser feita por dois métodos: o método da chave e o método de Descartes.

Método da chave

– Ordenamos $p(x)$ e $d(x)$ segundo as potências decrescentes de x e montamos a chave:

$$\begin{array}{r|l} p(x) & d(x) \\ r(x) & q(x) \end{array}$$

- Dividimos o primeiro termo de $p(x)$ pelo primeiro de $d(x)$, obtendo o primeiro termo de $q(x)$.
- Multiplicamos o termo obtido pelo divisor $d(x)$ e subtraímos de $p(x)$.
- Continuamos o processo até obter um resto de grau menor que o de $d(x)$ ou resto nulo.

Método de Descartes

Consiste basicamente na determinação dos coeficientes do quociente e do resto a partir da identidade:

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Atividades resolvidas

R9. Divida $p(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 3$ por $d(x) = x^2 - 3x + 2$ pelo método de Descartes.

Resolução

Devemos encontrar $q(x)$ e $r(x)$ tais que:

$$x^3 - 4x^2 + 7x - 3 = (x^2 - 3x + 2) \cdot q(x) + r(x)$$

Vamos analisar o grau de $q(x)$ e de $r(x)$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{gr}(p) = 3 \\ \text{gr}(d) = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{gr}(q) = \text{gr}\left(\frac{p}{d}\right) = 1$$

Como $\text{gr}(r) < \text{gr}(d)$, devemos impor $\text{gr}(r) = \text{gr}(d) - 1 \Rightarrow \text{gr}(r) = 2 - 1 \Rightarrow \text{gr}(r) = 1$.

Assim, temos: $q(x) = ax + b$ e $r(x) = cx + d$

$$\underbrace{x^3 - 4x^2 + 7x - 3}_{p(x)} = \underbrace{(x^2 - 3x + 2)}_{d(x)} \underbrace{(ax + b)}_{q(x)} + \underbrace{(cx + d)}_{r(x)}$$

Efetuando as operações e agrupando os termos semelhantes, obtemos:

$$x^3 - 4x^2 + 7x - 3 = ax^3 + (-3a + b)x^2 + (2a - 3b + c)x + 2b + d$$

Para que haja igualdade, devemos ter:

$$\left. \begin{array}{l} a = 1 \\ -3a + b = -4 \\ 2a - 3b + c = 7 \\ 2b + d = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow a = 1 \quad b = -1 \quad c = 2 \quad d = -1$$

Assim, $q(x) = x - 1$ e $r(x) = 2x - 1$.

R10. Determine o valor de k para que a divisão de $p(x) = 4x^3 - 3x^2 + kx + 3$ por $d(x) = x^2 - 1$ seja exata.

Resolução

A divisão $\frac{p(x)}{d(x)}$ é exata se $r(x) = 0$.

Como o grau de $q(x)$ é 1, pois $\text{gr}(q) = \text{gr}\left(\frac{p}{d}\right)$,

temos:

$$4x^3 - 3x^2 + kx + 3 = (x^2 - 1)(ax + b)$$

$$4x^3 - 3x^2 + kx + 3 = ax^3 + bx^2 - ax - b$$

Comparando, obtemos:

$$\left. \begin{array}{l} 4 = a \\ -3 = b \\ k = -a \\ 3 = -b \end{array} \right\} \Rightarrow a = 4, b = -3 \text{ e } k = -4$$

Atividades

15. Efetue a divisão de $p(x)$ por $d(x)$ em cada item:

a) $p(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 5$ e $d(x) = x^2 - 2x + 1$

b) $p(x) = x^3 + 5x^2 - 7x + 4$ e $d(x) = x + 1$

c) $p(x) = 5x^5 - 2x^4 - 4x^3 - 4x$ e $d(x) = x^2 + x$

d) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ e $d(x) = x^2 + 2x - 1$

16. Calcule o valor de m e n para que a divisão de $p(x) = 8x^4 + mx^3 + 2x^2 - nx + 1$ por $d(x) = 4x^2 + 3x - 1$ seja exata.

17. Determine os valores de p e q para que o polinômio $x^3 + px + q$ seja divisível por $x^2 + 2x + 5$.

18. Dividindo um polinômio $p(x)$ por $d(x) = x^2 - 4x + 1$, obtém-se quociente $q(x) = x + 4$ e resto $r(x) = 15x + 1$. Determine $p(x)$.

19. Determine um polinômio $p(x)$ cuja divisão por $d(x) = 2x - 6$ resulta um quociente $q(x) = -x^3 - 2x^2 + 1$ e resto 6.

Teorema do resto

O resto $r(x)$ da divisão de um polinômio $p(x)$ por um binômio do primeiro grau $d(x) = ax + b$ é igual ao valor numérico de $p(x)$ para $x = -\frac{b}{a}$ ($a \neq 0$).

$$p(x) = \underbrace{(ax + b)}_{d(x)} \cdot q(x) + r(x)$$

Como o grau de $d(x)$ é 1, então o grau de $r(x)$ é zero. Logo, $r(x)$ é um polinômio constante, ou seja, $r(x) = k$.

Para $x = -\frac{b}{a}$, temos:

$$p\left(-\frac{b}{a}\right) = \underbrace{\left(-a \cdot \frac{b}{a} + b\right)}_0 \cdot q\left(-\frac{b}{a}\right) + k.$$

$$\text{Logo, } r(x) = p\left(-\frac{b}{a}\right).$$

Em particular, quando a divisão de $p(x)$ por $d(x) = ax + b$ é exata, o resto será $r(x) = p\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$, ou seja, $-\frac{b}{a}$ é o zero do polinômio $p(x) = 0$.

Teorema de D'Alembert

Um polinômio $p(x)$ é divisível por $d(x) = ax + b$ se e somente se $p\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$.

Se $p(x) = d(x) \cdot q(x) = (ax + b) \cdot q(x)$, então:

$$p\left(-\frac{b}{a}\right) = \left[a \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) + b\right] \cdot q\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \cdot q\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$$

E reciprocamente, se $p(x) = (ax + b) \cdot q(x) + k$, então:

$$0 = p\left(-\frac{b}{a}\right) = \left[a \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) + b\right] \cdot q\left(-\frac{b}{a}\right) + k = 0 \cdot q\left(-\frac{b}{a}\right) + k \Rightarrow k = 0$$

Atividades resolvidas

R11. Sem efetuar a divisão, determine o resto da divisão de $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 1$ por $d(x) = x - 2$.

Resolução

Pelo teorema do resto, temos:

$$\left. \begin{array}{l} p(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 1 \\ d(x) = x - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow r(x) = p(2)$$

$$r(x) = 3 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 1 \Rightarrow r(x) = 11$$

R12. Dividindo um polinômio $p(x)$ por $x - 2$, obtém-se resto 5 e, dividindo por $x + 1$, obtém-se resto -2 . Determine o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - 2) \cdot (x + 1)$.

Resolução

O grau do divisor $d(x) = (x - 2) \cdot (x + 1)$ é 2, então o grau de $r(x)$ é 1 e, portanto, $r(x) = ax + b$.

$$p(x) = (x - 2)(x + 1)q(x) + ax + b$$

Como $p(2) = 5$ e $p(-1) = -2$, temos:

$$p(2) = 5 \Rightarrow 2a + b = 5$$

$$p(-1) = -2 \Rightarrow -a + b = -2$$

Resolvendo o sistema, encontramos: $a = \frac{7}{3}$ e $b = \frac{1}{3}$.

Logo, o resto é $r(x) = \frac{7}{3}x + \frac{1}{3}$.

Atividades

20. Calcule o valor de t , sabendo que o resto da divisão de $p(x) = 4x^3 + 2x^2 - tx + 5$ por $x + 2$ é 1.

21. Determine o resto $r(x)$ das divisões de $p(x)$ por $d(x)$ em cada caso a seguir:

a) $p(x) = 2x^4 - 3x^3 + 1$ e $d(x) = 2x - 1$

b) $p(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2$ e $d(x) = x - 1$

c) $p(x) = x^2 - 5x + 6$ e $d(x) = x - 3$

22. Calcule o valor de m para que o resto da divisão de $p(x) = x^3 - 2x^2 + mx + m - 1$ por $d(x) = x - 2$ seja 5.

23. Determine o valor de a para que o resto da divisão de $p(x) = 4x^2 - ax + 1$ por $d(x) = 2x - 6$ seja igual a -5 .

24. Calcule k para que o polinômio $p(x) = 2x^3 - kx^2 + 5x - 1$ seja divisível por $x - 1$.

25. Determine os valores de a e b , sabendo que os polinômios $p(x) = -x^2 + (a - b)x$ e $t(x) = 2x^3 - ax^2 - ax + 2b$ são ambos divisíveis por $x + 1$.

26. Obtenha o resto $r(x)$ da divisão de um polinômio $p(x)$ por $(x + 2)(x - 2)$, sabendo que os restos das divisões de $p(x)$ por $(x + 2)$ e por $(x - 2)$ são, respectivamente, -1 e 3 .

27. Obtenha o resto $r(x)$ da divisão de um polinômio $p(x)$ por $(x^2 - 9)$, sabendo que os restos da divisão de $p(x)$ por $(x + 3)$ e por $(x - 3)$ são, respectivamente, 2 e -1 .

Algoritmo de Briot-Ruffini

O algoritmo de Briot-Ruffini consiste em um dispositivo prático para efetuar a divisão de um polinômio $p(x)$ por um binômio $d(x) = x - a$.

Considere $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Podemos descrever esse dispositivo pelos seguintes passos:

- Dispõem-se todos os coeficientes de $p(x)$ na chave:

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ \hline \end{array}$$

- Coloca-se à esquerda a raiz de $d(x) = x - a = 0$:

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ \hline \end{array}$$

- Abaixa-se o primeiro coeficiente (a_n), que corresponde ao primeiro coeficiente de $q(x)$. Em seguida, multiplica-se a_n pela raiz a e soma-se o resultado ao segundo coeficiente de $p(x)$, obtendo-se o segundo coeficiente de $q(x)$:

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ \hline a & a_n & a_n \cdot a & a_n \cdot a + a_{n-1} & \dots & \dots \end{array}$$

- Multiplica-se por a o resultado obtido para o segundo coeficiente de $q(x)$ e soma-se esse resultado ao terceiro coeficiente de $p(x)$, e assim sucessivamente.

Divisão de $p(x)$ por $x - a$:

$$\begin{array}{c|cc} a & \text{coeficiente de } p(x) & \\ \hline & \text{coeficiente de } q(x) & \text{resto } r(x) \end{array}$$

Para $d(x) = ax + b$, devemos tomar o seguinte cuidado para obter o quociente:

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$$

$$p(x) = (ax + b) \cdot q(x) + r(x)$$

$$p(x) = a \left(x + \frac{b}{a} \right) \cdot q(x) + r(x)$$

$$p(x) = \left(x + \frac{b}{a} \right) \cdot a q(x) + r(x)$$

$$p(x) = \left(x + \frac{b}{a} \right) \cdot q_1(x) + r(x)$$

$$q_1(x) = a q(x) \Rightarrow q(x) = \frac{q_1(x)}{a}$$

$$\begin{array}{c|cc} -\frac{b}{a} & \text{coeficiente de } p(x) & \\ \hline & \text{coeficiente de } q(x) & \\ \hline & \underbrace{\hspace{10em}}_{q_1(x)} & q_1(x) \end{array}$$

Atividades resolvidas

R13. Divida $p(x)$ por $d(x)$ usando o algoritmo de Briot-Ruffini:

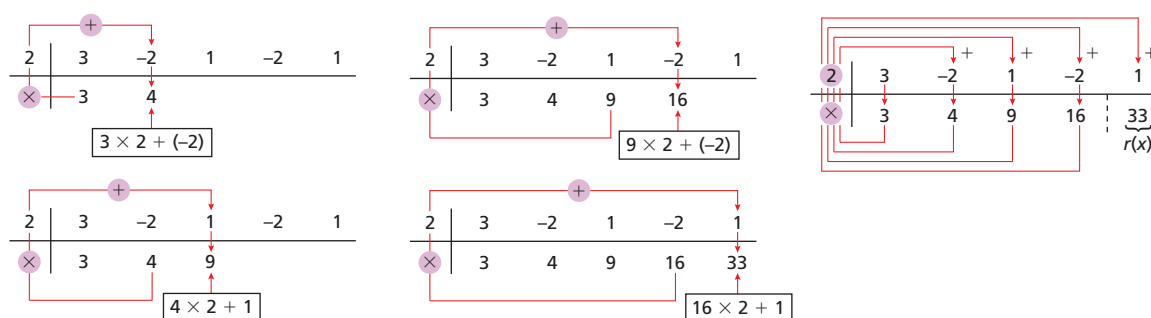
a) $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$ por $d(x) = x - 2$

b) $p(x) = x^3 - 2x + 1$ por $d(x) = x + 3$

c) $p(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 2$ por $d(x) = 2x - 1$

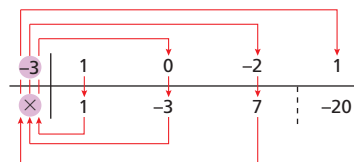
Resolução

a)



Como $\text{gr}(p) = 4$ e $\text{gr}(d) = 1$, teremos $\text{gr}(q) = 3$, $q(x) = 3x^3 + 4x^2 + 9x + 16$ e $r(x) = 33$.

b) Para dividir $p(x) = x^3 - 2x + 1$ por $d(x) = x + 3$, inicialmente escrevemos $p(x)$ na forma completa: $p(x) = x^3 - 0x^2 - 2x + 1$. Depois, indicamos os coeficientes no algoritmo.



$q(x) = x^2 - 3x + 7$ e $r(x) = -20$

c) Para dividir $p(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 2$ por $d(x) = 2x - 1$, devemos utilizar o algoritmo de Briot-Ruffini com $d_1(x) = x - \frac{1}{2}$. Para obtermos o quociente, dividimos o quociente q_1 obtido por 2:

-2	a	b	c	d
	1	-2	3	2

$$q(x) = \frac{q_1(x)}{2} \Rightarrow q(x) = 2x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \text{ e } r(x) = \frac{9}{4}$$

Atividades

28. Determine o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ das divisões de $p(x)$ por $d(x)$:

a) $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 1$ e $d(x) = x - 1$

b) $p(x) = x^5 - 4x^4 + 3$ e $d(x) = x + 2$

c) $p(x) = 5x^2 - 3x - 1$ e $d(x) = x + 1$

d) $p(x) = x^5 - 1$ e $d(x) = x - 1$

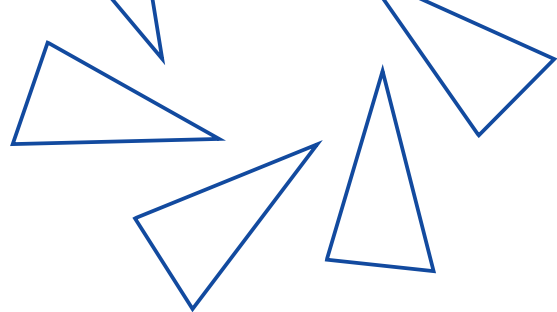
29. Determine o resto da divisão:

$$\left(3x^4 - 2x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \right) : (x + 2).$$

30. No algoritmo abaixo, foi aplicado o algoritmo de Briot-Ruffini. Determine o dividendo $p(x)$, o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$.

-2	0	b	c	d
	1	-2	-3	2

Equações polinomiais



Equação polinomial ou equação algébrica é toda equação do tipo $p(x) = 0$, em que:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ são números reais;
- n é número natural;
- x é variável complexa;
- o grau da equação polinomial é o grau do polinômio $p(x)$.

A raiz da equação polinomial $p(x) = 0$ é todo número $\alpha \in \mathbb{C}$, tal que $p(\alpha) = 0$.

Teorema fundamental da Álgebra

O teorema fundamental da álgebra é uma proposição que pode ser enunciada da seguinte forma: Toda equação polinomial de grau n , com $n \geq 1$, possui pelo menos uma raiz complexa.

Com base nesse teorema, podemos mostrar que toda equação polinomial de grau n , com $n \geq 1$, possui exatamente n raízes complexas.

Além disso, podemos mostrar que todo polinômio de grau n , com $n \geq 1$, pode ser decomposto em fatores do 1º grau da seguinte maneira:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$p(x) = a_n (x - \alpha_1) (x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{n-1}) (x - \alpha_n)$$

em que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são as raízes de $p(x)$.

Atenção

Até agora, o conjunto universo utilizado na resolução de problemas e equações foi o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Vimos também que algumas equações não tinham solução no conjunto dos reais. É o caso, por exemplo, da equação $x^2 + 1 = 0$:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

Logo, $S = \emptyset$, visto que não existe número real cujo quadrado é igual a -1 .

Chamamos de unidade imaginária o número i , tal que:

$$i^2 = -1, \text{ ou seja, } i = \sqrt{-1}$$

Assim, no conjunto dos números complexos, as equações do 2º grau com $\Delta < 0$ possuem solução não vazia.

Assim, a solução da equação será:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-1} \Rightarrow x = \pm i$$

Logo, $S = \{-i, i\}$.

O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos é aquele formado pelos números que podem ser expressos na forma $z = a + bi$, em que $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$, ou seja:

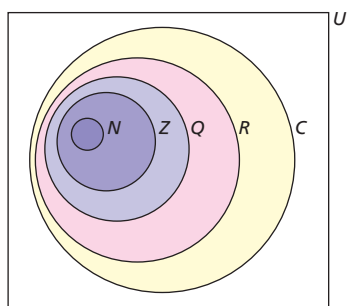
$$\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

A forma $z = a + bi$ é denominada forma algébrica de um número complexo, em que a é a parte real e b , a parte imaginária.

Tomando um número complexo $z = a + bi$, temos:

$$\left. \begin{array}{l} a = 0 \\ b \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow z = bi \text{ (imaginário puro)}$$

$$b = 0 \Rightarrow z = a \text{ (real)}$$



Multiplicidade de uma raiz

Dada a equação polinomial $p(x) = 0$ de grau n , dizemos que α é raiz de multiplicidade k se, das n raízes da equação, somente k forem iguais a α .

Atividades resolvidas

R14. Verifique se os valores 2 e 5 são raízes da equação polinomial $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Resolução

$$2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 0 \text{ e } 5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 0$$

Logo, 2 e 5 são raízes de $x^2 - 7x + 10 = 0$.

R15. Verifique se i , $-i$ e -2 são raízes da equação $p(x) = 0$, em que $p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$.

Resolução

$$p(i) = i^3 + 2i^2 + i + 2 = -i - 2 + i + 2 = 0$$

$$p(-i) = (-i)^3 + 2(-i)^2 + (-i) + 2 = i - 2 - i + 2 = 0$$

$$p(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 + (-2) + 2 = -8 + 8 - 2 + 2 = 0$$

Como $p(i) = 0$, $p(-i) = 0$ e $p(-2) = 0$, temos que i , $-i$ e -2 são raízes da equação $p(x)$.

R16. Sabendo que -2 e 3 são os zeros do polinômio $p(x) = 2x^2 - 2x - 12$, escreva-o como produto de fatores de 1º grau:

Resolução

$$p(x) = 2[x - (-2)](x - 3) \Rightarrow p(x) = 2(x + 2)(x - 3)$$

R17. Qual é a multiplicidade das raízes da equação $(x - 2)(x + 3)(x + 3) = 0$?

Resolução

-3 é raiz de multiplicidade 2 ou raiz dupla, e o número 2 é raiz de multiplicidade 1.

R18. Uma das raízes da equação $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ é o número 2. Determine as outras duas raízes.

Resolução

Se 2 é raiz, então $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ é divisível por $(x - 2)$.

Efetuando a divisão, temos:

-2	0	b	c	d
	1	-2	-3	2

$$p(x) = (x - 2)(x^2 - 2x - 3)$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \text{ ou } x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Atividades

31. Determine quantas e quais são as soluções das seguintes equações:

a) $(x + 1)(x - 1)(x + 2) = 0$

b) $(x + 2)(x - 2i)(x - 2i) = 0$

32. Mostre que o número 2 é raiz da equação $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$.

33. Determine as raízes das equações:

a) $(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 0$

b) $3(x + 2i)(x - 2i)(x + 1) = 0$

c) $4(x - 3)(x + 2)(x + i) = 0$

34. Sabendo que -3 é uma das raízes da equação $x^3 + 4x^2 + 3x = 0$, determine as outras raízes.

35. Determine as outras raízes do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$, sabendo que $p(1) = 0$.

36. Resolva a equação $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$, sabendo que o número 2 é raiz dupla.

37. Mostre que -2 é raiz de multiplicidade 3 da equação $x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 20x + 8 = 0$.

38. Determine a multiplicidade da raiz 1 na equação $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$.

Resumo

Polinômios

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, em que:

- x é a variável do polinômio
- $n \in \mathbb{N}$
- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ são coeficientes do polinômio
- a_0 coeficiente independente
- grau do polinômio p é n : $\text{gr}(p) = n$

Valor numérico

É o valor que se obtém substituindo a variável x por um número α .

Zero de um polinômio

É o número α tal que $p(\alpha) = 0$

Igualdade de polinômios

Dados:

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$, temos:

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = b_n \\ a_{n-1} = b_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 = b_1 \\ a_0 = b_0 \end{cases}$$

Adição e subtração de polinômios

Para somar dois polinômios, adicionamos os coeficientes dos termos de mesmo grau. Da mesma forma, para obter a diferença de dois polinômios, subtraímos os coeficientes dos termos de mesmo grau.

Multiplicação de polinômios

Para obter o produto de dois polinômios, multiplicamos cada termo de um deles por todos os termos do outro, somando os termos de mesmo grau.

O grau do polinômio-produto $p(x) \cdot q(x)$ é a soma dos graus de $p(x)$ e $q(x)$ se nenhum destes for o polinômio nulo: $\text{gr}(p \cdot q) = \text{gr}(p) + \text{gr}(q)$.

Divisão de polinômios

Considerando os polinômios $p(x)$ e $d(x)$, não nulos, tais que o grau de $p(x)$ seja maior ou igual ao grau de $d(x)$, pode-se efetuar a divisão de $p(x)$ por $d(x)$, encontrando dois polinômios, $q(x)$ e $r(x)$, que satisfazem as seguintes condições:

- $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$
- $r(x) = 0$ ou $\text{gr}(r) < \text{gr}(d)$

Se $r(x)$ for um polinômio nulo, dizemos que $p(x)$ é divisível por $d(x)$.

Método da chave

Ordena-se $p(x)$ e $d(x)$ segundo as potências decrescentes de x e monta-se a chave:

$$p(x) \overline{)d(x)}$$

$$r(x) \quad q(x)$$

Método de Descartes

Consiste basicamente na determinação dos coeficientes do quociente e do resto a partir da identidade:

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Teorema do resto

$$p(x) = \underbrace{(ax + b)}_{d(x)} \cdot q(x) + r(x)$$

$$r(x) = p\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Teorema de d'Alembert

Um polinômio $p(x)$ é divisível por

$$d(x) = ax + b \text{ se e somente se } p\left(-\frac{b}{a}\right) = 0.$$

Algoritmo de Briot-Ruffini

Divisão de $p(x)$ por $x - \alpha$:

α	coeficiente de $p(x)$	
	coeficiente de $q(x)$	resto $r(x)$

Equações polinomiais

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

em que:

- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ são números reais;
- n é número natural;
- x é variável complexa;
- o grau da equação polinomial é o grau do polinômio $p(x)$.

Avalie o que aprendeu

1. Determine os valores de k para que o polinômio $p(x) = (3k + 5)x^3 - (2 + k)x^2 - x + 3$ tenha grau 3.

- a) $gr(p) = 3 \Rightarrow k \neq -\frac{5}{3}$ c) $gr(p) = 4 \Rightarrow k \neq -\frac{5}{4}$ e) $gr(p) = 9 \Rightarrow k \neq -\frac{5}{9}$
b) $gr(p) = 3 \Rightarrow k \neq -\frac{3}{5}$ d) $gr(p) = 7 \Rightarrow k \neq -\frac{5}{7}$

2. Dado $p(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 3$, calcule $p(0) + p(-1) - 3p(1)$.

- a) -7 b) 7 c) -9 d) 9 e) 13

3. Sabe-se que $p(x) = 2x^3 - 3ax + b$, $p(1) = -8$ e $p(-1) = 6$. Obtenha os coeficientes a e b .

- a) $a = 0$ e $b = 0$ c) $a = 2$ e $b = 0$ e) $a = 4$ e $b = 0$
b) $a = 1$ e $b = -1$ d) $a = 3$ e $b = -1$

4. Calcule os coeficientes a , b , c e d para que o polinômio $p(x) = (a - 3)x^4 + (2b + 6)x^2 + (c - 2)x - d$ seja identicamente nulo.

- a) $a = 2$; $b = -3$; $c = 5$; $d = 2$ d) $a = 3$; $b = -3$; $c = 5$; $d = 1$
b) $a = 3$; $b = -4$; $c = 2$; $d = 0$ e) $a = 5$; $b = -3$; $c = 7$; $d = 6$
c) $a = 3$; $b = -3$; $c = 2$; $d = 0$

5. Dados $A = x^2 - x + 2$, $B = x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ e $C = x - 2$, calcule $A + B - 3C$:

- a) $x^3 - 6x^2 - x + 3$ c) $x^3 - 4x^2 - 2x + 6$ e) $x^3 - 2x^2 - 3x + 9$
b) $x^3 - 5x^2 - x + 5$ d) $x^3 - 3x^2 - 2x + 7$

6. Determine o valor de k , sabendo que os restos das divisões de $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + kx + 1$ por $(x - 1)$ e $(x + 1)$ são iguais.

- a) $k = 0$ b) $k = 2$ c) $k = 4$ d) $k = 6$ e) $k = 8$

7. Um polinômio $p(x)$ dividido por $(x + 3)$ dá resto 2, e dividido por $(x - 2)$ dá resto 5. Determine o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - 2)(x + 3)$.

- a) $r(x) = \frac{x}{3} + \frac{17}{5}$ c) $r(x) = \frac{x}{3} + \frac{19}{3}$ e) $r(x) = \frac{3x}{5} + \frac{19}{5}$
b) $r(x) = \frac{3x}{5} + \frac{19}{3}$ d) $r(x) = \frac{7x}{5} + \frac{17}{5}$

8. Na divisão de um polinômio $p(x)$ pelo binômio $(x - 3)$, usou-se o dispositivo prático de Briot-Ruffini, como mostra o esquema abaixo. Determine os valores de a, b, c, d e e .

3	1	b	c	7	e
	a	2	4	d	59

a) $a = 2; b = -2; c = -2; d = 11; e = 21$

d) $a = 2; b = -3; c = -5; d = 11; e = 2$

b) $a = 1; b = -1; c = -2; d = 19; e = 2$

e) $a = 3; b = -1; c = -2; d = 8; e = 2$

c) $a = 1; b = -4; c = -2; d = 19; e = 2$

9. Sabendo que o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + 3x + b$ é divisível por $(x - 3)^2$, determine $a + b$.

a) 0

c) 4

e) 16

b) 2

d) 8

10. Uma das raízes da equação $x^3 - x^2 - 2x + 6k = 0$ é 3. Determine as outras.

a) $-1 + \sqrt{10}i$ e $-1 - \sqrt{10}i$

d) $-1 + \sqrt{3}i$ e $-1 - \sqrt{3}i$

b) $-1 + \sqrt{7}i$ e $-1 - \sqrt{7}i$

e) $-1 + \sqrt{2}i$ e $-1 - \sqrt{2}i$

c) $-1 + \sqrt{5}i$ e $-1 - \sqrt{5}i$

11. Dada a equação $x^3 + (k + 1)x^2 + (k + 9)x + 9 = 0$ e sabendo que uma das raízes dessa equação é -1 , determine k para que as outras raízes sejam iguais.

a) $k = \pm 6$

c) $k = \pm 4$

e) $k = \pm 2$

b) $k = \pm 5$

d) $k = \pm 3$

12. Determine o conjunto-solução da equação $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$, sabendo que 3 é raiz dupla.

a) $S = \{-1, 0, 1\}$

c) $S = \{1, -2, 3\}$

e) $S = \{-1, -2, -3\}$

b) $S = \{-1, 2, 3\}$

d) $S = \{1, 0, -1\}$

13. Determine as raízes da equação $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$, sabendo que uma delas é o quádruplo da outra.

a) $S = \{1, 5, 7\}$

d) $S = \{2, 5, 9\}$

b) $S = \{2, 7, 9\}$

e) $S = \{1, 3, 5\}$

c) $S = \{3, 3, 3\}$

14. Encontre o conjunto-solução da equação $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$, sabendo que o produto de duas raízes é igual a 1.

a) $S = \left\{0, \frac{5}{2}, 3\right\}$ c) $S = \left\{2, -\frac{3}{2}, -4\right\}$ e) $S = \left\{-2, \frac{3}{2}, 4\right\}$

b) $S = \left\{1, -\frac{1}{2}, -2\right\}$ d) $S = \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$

15. Calcule o comprimento da diagonal d de um paralelepípedo reto-retangular, sabendo que suas dimensões, em centímetro, são dadas pelas raízes da equação $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1$.

a) $d = \frac{61}{12}$ c) $d = \frac{97}{13}$ e) $d = \frac{\sqrt{91}}{15}$

b) $d = \frac{\sqrt{61}}{12}$ d) $d = \frac{\sqrt{97}}{13}$

16. Sendo $p(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 6x + a$ e $q(x) = x + b$, com $b > 1$. Ao efetuar a divisão de $p(x)$ por $q(x)$, aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, obteve-se:

	1	2	-8	-6	a
-b	1	2	c	-6	-10

Complete o dispositivo e determine o valor de $a + b + c$.

- a) -30 c) -20 e) -10
b) -25 d) -15

17. (UM-SP) Se $p(x) = 2x^2 + kx + 2$ é divisível por $x + 2$, então 2^k vale:

- a) 32 c) 8 e) 4
b) 16 d) 64

18. (FGV-SP) A equação $x^3 - 3x^2 + 4x + 28 = 0$ admite -2 como raiz. As outras raízes satisfazem a equação:

- a) $x^2 - 4x + 14 = 0$ c) $x^2 - 6x + 14 = 0$ e) $x^2 - 8x + 14 = 0$
b) $x^2 - 5x + 14 = 0$ d) $x^2 - 7x + 14 = 0$

19. (Fuvest-SP) Dividindo-se o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por $(x - 1)$, obtém-se resto igual a 2. Dividindo-se $P(x)$ por $(x + 1)$, obtém-se resto igual a 3. Sabendo que $P(x)$ é divisível por $(x - 2)$, tem-se que o valor de $\frac{ab}{c}$ é igual a:

- a) -6 c) 4 e) 9
b) -4 d) 7

20. (EPCAR-MG) O resto da divisão do polinômio $p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1$ por $x + 1$ é um número:

a) ímpar menor que 5.

c) primo maior que 5.

b) par menor que 6.

d) primo menor que 7.

Referências

AABOE, Asger. Episódios da história antiga da Matemática. Brasília: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

ARAGÃO, Maria José. História da Matemática. Rio de Janeiro: Editora Interferência, 2009.

BARBETTA, Pedro Alberto. Estatística aplicada às ciências sociais. 5. ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 2003

BONOLA, Roberto. Geometrias no Euclidianas. Buenos Aires: Espasa-Calpe Argentina, 1951.

BOYER, Carl B. História da matemática. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher/Edusp,

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Base nacional comum curricular: educação é a base (BNCC). Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <<http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>>. Acesso em: 11 set. 2023.

COSTA, S. F. Introdução ilustrada à Estatística. São Paulo: Harbra, 1994.

CRESPO, A. A. Estatística fácil. 19. ed. São Paulo: Saraiva, 2009.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. A experiência Matemática. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira; SOUZA, Eliane Reame de. Álgebra: das variáveis às equações. 2. ed. São Paulo: CAEM/IME – USP, 1996.

ENZENSBERGER, Hans Magnus. O diabo dos números. São Paulo: Cia das Letras, 2009.

MORGADO, A. C. de O.; CARVALHO, P. C. P. Matemática discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

POZO, J. I. (org.). A solução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 1998.

VILLELLA, J. Uno, dos, tres...Geometria outra vez. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2008.

SECRETARIA DE
EDUCAÇÃO

