

SECRETARIA DE
EDUCAÇÃO



GOVERNO
DO ESTADO
DO PARÁ

CORREÇÃO DE FLUXO

MATEMÁTICA E SUAS TECNOLOGIAS



ENSINO MÉDIO
MATERIAL DO PROFESSOR

ELIAS J. BECHARA SOARES JUNIOR
GLEIDSON DIEGO DOS REIS MONTEIRO
LUANA CRISTINA DOS SANTOS SILVA



2º VOLUME

HELDER ZAHLUTH BARBALHO
Governador do Estado do Pará

HANNA GHASSAN TUMA
Vice-governadora do Estado do Pará

RICARDO NASSER SEFER
Secretário de Estado da Educação

JÚLIO CÉSAR MEIRELES DE FREITAS
Secretário Adjunto de Educação Básica – SAEB

SILVANEY FERREIRA FONSECA SEABRA
Diretoria de Ensino Fundamental II e Ensino Médio

HIGOR KYUZO DA SILVA OKADA
Coordenadoria de Ensino Médio

REALIZAÇÃO

Coordenação de Ensino Médio (COEM)/ Diretoria de Ensino Fundamental II, Médio e Profissional/ Secretaria Adjunta de Educação Básica (SAEB)/ Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC/PA).

EQUIPE DE ELABORAÇÃO DE CONTEÚDO

ELIAS JORGE BECHARA SOARES JUNIOR – SEDUC/PA
GLEIDSON DIEGO DOS REIS MONTEIRO – SEDUC/PA
LUANA CRISTINA DOS SANTOS SILVA – SEDUC/PA

EQUIPE DE REVISÃO DE CONTEÚDO

MARILÉIA CORRÊA LIMA – SEDUC/PA
SORAYA PAULA FRACINETH SOUZA COUTINHO – SEDUC/PA

CRÉDITOS DE DESIGN

CAPA E ABERTURAS DE CAPÍTULOS – Gleidson Diego dos Reis Monteiro / SEDUC/PA
DIAGRAMAÇÃO – Gleidson Diego dos Reis Monteiro / SEDUC/PA

FICHA CATALOGRÁFICA

PARÁ. Secretaria de Estado de Educação. Correção de Fluxo – Matemática e Suas Tecnologias – Ensino Médio – 2º Bimestre – Material do Professor. Secretaria de Estado de Educação: Belém, 2026.

O PROGRAMA DE CORREÇÃO DE FLUXO

A Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC-PA) instituiu, a partir de 01 de agosto de 2024, o Programa de Correção de Fluxo “Acelere o Saber” como uma ação estratégica de grande alcance, integrante do Planejamento Estratégico da SEDUC para o quadriênio 2023–2026, destinada a enfrentar o desafio da distorção idade/ano em nossa rede estadual de ensino.

Em sua fase inicial, o Programa atendeu 30.653 estudantes em 328 escolas, organizados em 977 turmas específicas, com foco em turmas do Ensino Fundamental (6º ao 8º ano) e do 2º ano do Ensino Médio. Naquele momento, os estudantes permaneceram vinculados às suas turmas regulares de matrícula, frequentando o mesmo turno, contudo, com um atendimento pedagógico complementar e diferenciado, focado na aceleração dos estudos e na recomposição das aprendizagens essenciais.

O programa surgiu com objetivos alinhados às premissas da educação como direito, a saber:

1. Garantir os direitos de aprendizagem com equidade, oferecendo mais a quem mais precisa.
2. Estimular a continuidade dos estudos, rompendo o ciclo da repetência sistemática.
3. Combater o abandono escolar, criando condições reais de progressão e sucesso.

A proposta pedagógica do Programa fundamenta-se na crença inegociável de que todos os estudantes são capazes de aprender e de realinhar sua trajetória escolar. Para isso, propõe uma abordagem que:

- Respeita os diferentes ritmos e formas de aprendizagem.
- Adapta o currículo, selecionando os conhecimentos fundamentais e essenciais para a progressão no ciclo ou nível de ensino.
- Organiza as turmas como espaços de aprendizagens significativas, priorizando o desenvolvimento de habilidades e competências.
- Assegura o acesso ao conhecimento socialmente elaborado, em consonância com a matriz curricular e as diretrizes da rede estadual.

Para operacionalizar essa proposta, em todos os processos de implementação do Programa, a Secretaria de Educação tem fornecido material didático-pedagógico específico, organizado por área de conhecimento e nível de ensino. Neste ano de 2026, está coleção será mais utilizada pelos alunos que aderirem ao programa, podendo até mesmo ser o principal material pedagógico destinado às turmas de Correção de fluxo.

O Programa de Correção de fluxo sob o Olhar do Professor

Apresentada a estrutura formal do Programa, importa agora refletir sobre seu significado prático e potencial a partir da perspectiva de quem atua na linha de frente da educação: o professor. Essa mudança de lente, da instituição para a sala de aula, é crucial para compreendermos o programa não apenas como um conjunto de normas, mas como uma nova forma de oferta do ensino para um público específico que, pelos mais diversos motivos, não avançaram como esperado em sua trajetória escolar.

A primeira constatação, ao analisar os números, é de um compromisso em escala. Atender milhares de estudantes, em centenas de escolas, sinaliza que a SEDUC-PA reconhece a correção de fluxo como uma política estruturante. Como educador, devemos enxergar essa amplitude com um duplo significado: é um reconhecimento da magnitude do problema da distorção idade/ano, e, ao mesmo tempo, uma assunção de responsabilidade para enfrentá-lo de maneira sistemática. Não se trata de “turmas de atraso”, mas sim de turmas para o avanço escolar e pessoal dos nossos alunos; é um acerto

pedagógico e psicossocial. Evita a estigmatização do “aluno atrasado”, e estimula esse aluno a continuar.

A equidade, a continuidade dos estudos, o combate à repetência e ao abandono ecoam com precisão as angústias que testemunhamos diariamente. Em nossas salas de aula do 6º ao 9º ano e do Ensino Médio, convivemos com adolescentes cuja história escolar é marcada por lacunas acumuladas, reprovações sucessivas e, por vezes, um profundo desencanto com a instituição escolar. Eles estão fisicamente presentes, mas seu engajamento intelectual e emocional está, muitas vezes, comprometido. O Programa de Correção de fluxo se propõe a intervir nesse ciclo limitador. A palavra-chave que salta aos olhos é recomposição. Não se trata de uma “recuperação” tradicional, rápida e superficial, nem de um simples “acelerar” conteúdos de forma mecânica. A ideia de recompor aprendizagens sugere um processo mais profundo e orgânico: identificar quais são os alicerces cognitivos que faltam, quais conceitos-chave não foram consolidados, e reconstruir, tijolo a tijolo, uma base sólida sobre a qual o estudante possa prosseguir. É um trabalho de arquitetura pedagógica, que exige diagnóstico apurado e intervenção intencional.

Em conclusão, sob o olhar do professor, o Programa de Correção de fluxo se apresenta como uma janela de oportunidade. Oportunidade para milhares de estudantes reconstruírem sua relação com a escola e com o saber. Oportunidade para a rede estadual demonstrar que é possível ofertar um ensino diferenciado, com equidade, sem perder o rigor. Oportunidade, sobretudo, para nós, educadores, reavaliarmos nossas certezas e nos dedicarmos a uma das tarefas mais nobres da profissão: garantir que nenhum estudante seja deixado para trás, e que todos tenham, de fato, o direito de realinhar sua trajetória e seguir em frente. O sucesso do programa dependerá, em grande medida, de como essa oferta de ensino será absorvida, adaptada e vivida no chão da escola, na relação entre professor e aluno. É um grande desafio, mas, hoje, temos esse instrumento dedicado e estruturado para enfrentá-lo. Convidamos a todos a enfrentar esse desafio de fazê-lo funcionar.

DIÁLOGO COM O PROFESSOR

Pensar o currículo em um programa de correção de fluxo exige mais do que selecionar conteúdos; exige tomar decisões estratégicas que impactem diretamente a trajetória dos estudantes. Em um contexto como o do Programa “Acelere o Saber”, em que o tempo é reduzido e as lacunas de aprendizagem são significativas, priorizar unidades curriculares torna-se uma necessidade pedagógica e também um compromisso com o direito de aprender.

Nesse cenário, dois campos da Matemática são priorizados neste material: **Análise Combinatória** e **Trigonometria**. Ambas dialogam diretamente com habilidades estruturantes da etapa do Ensino Médio, possuem ampla aplicabilidade em contextos reais e ocupam lugar em avaliações em larga escala, como o ENEM e vestibulares. Mais do que conteúdos isolados, essas unidades representam ferramentas cognitivas que ampliam a capacidade de raciocínio, interpretação e resolução de problemas.

Análise Combinatória: desenvolver o pensamento estratégico

A habilidade (EM13MAT310) propõe que os estudantes resolvam e elaborem problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamentos, utilizando princípios como o multiplicativo e o aditivo, além de estratégias como diagramas de árvore. Essa habilidade é extremamente potente dentro de um programa de aceleração por diversos motivos.

Primeiro, a Análise Combinatória trabalha diretamente com o **raciocínio lógico e organizacional**. Ao lidar com problemas de contagem, o estudante precisa estruturar o pensamento, identificar possibilidades, evitar repetições indevidas e compreender relações entre elementos. Isso contribui para o desenvolvimento de uma habilidade transversal: a capacidade de planejar e organizar informações.

Segundo, trata-se de uma unidade altamente **contextualizável**. Problemas combinatórios podem ser construídos a partir de situações do cotidiano, como organização de horários, combinações de roupas, possibilidades de trajetos, formação de equipes, entre outros. Essa proximidade com a realidade favorece o engajamento do estudante, especialmente aqueles que já vivenciaram experiências de fracasso escolar.

Terceiro, a Análise Combinatória é frequentemente cobrada em avaliações externas. No ENEM, por exemplo, é comum a presença de questões que envolvem contagem, probabilidade e análise de possibilidades. Essas questões, em geral, não exigem apenas cálculo, mas interpretação cuidadosa e escolha adequada de estratégias.

Para o estudante do programa, dominar esse tipo de habilidade significa não apenas avançar no currículo, mas também **ampliar suas chances de sucesso em avaliações que podem transformar seu futuro**.

Trigonometria: compreender padrões e fenômenos periódicos

A habilidade (EM13MAT306) propõe que os estudantes resolvam e elaborem problemas envolvendo fenômenos periódicos reais, relacionando-os às funções seno e cosseno no plano cartesiano. Essa habilidade é particularmente relevante porque conecta a Matemática a fenômenos naturais e tecnológicos. Ondas sonoras, ciclos da natureza, movimentos repetitivos — tudo isso pode ser descrito por funções trigonométricas.

A importância da Trigonometria no currículo priorizado

A Trigonometria ocupa um lugar estratégico por diversas razões. Primeiro, ela desenvolve a capacidade de **identificar padrões e regularidades**. Em um mundo cada vez mais orientado por dados e informações, reconhecer padrões é uma habilidade essencial.

Segundo, essa unidade promove a **integração entre diferentes representações**: algébrica, gráfica e contextual. O estudante aprende a transitar entre equações, gráficos e situações reais, fortalecendo sua compreensão.

Terceiro, a Trigonometria é amplamente cobrada em avaliações externas. Questões envolvendo gráficos de funções seno e cosseno, interpretação de fenômenos periódicos e análise de variações são recorrentes.

Assim como na Análise Combinatória, o domínio dessa unidade amplia significativamente as possibilidades do estudante em exames como o ENEM.

Integração entre recomposição e progressão

Um dos desafios do programa é equilibrar a recomposição das aprendizagens com a progressão no currículo atual. Nesse sentido, Análise Combinatória e Trigonometria são unidades que permitem essa integração. Elas retomam conceitos fundamentais (como operações, proporções, interpretação de gráficos) ao mesmo tempo em que avançam para conteúdos do Ensino Médio. Isso torna o processo mais eficiente e significativo.

Em um programa que representa uma oportunidade de recomeço, cada escolha pedagógica importa. E ao investir nessas unidades, você está ajudando a construir caminhos mais sólidos, mais justos e mais promissores para seus estudantes.

SUMÁRIO

ANÁLISE COMBINATÓRIA	8
Mapa de Aprendizagem	9
Contextualização e Motivação	11
Pré-Requisitos	13
Conceitos e Relações Numéricas Básicas	13
De Natureza Ordinal	13
Sobre Propriedades dos Números Naturais	13
Exercício de Aprendizagem	13
Tradução da Linguagem Natural para Linguagem Matemática	14
Exercício de Aprendizagem	14
Cardinalidade X Ordinalidade	14
Elementos e Subconjuntos na Representação de Conjuntos	15
Construindo Conceitos	15
Fatorial Simples	15
Princípios da Contagem	17
Princípio Aditivo	17
Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem	17
Princípio da Inclusão/Exclusão	18
Exercícios Resolvidos	18
Permutação Simples (ou Linear)	21
Permutação com Elementos Repetidos	22
Exercícios Resolvidos	24
Arranjo Simples	25
Combinação Simples (ou Número Binomial)	27
Exercícios Resolvidos	28
Exercitando e Resolvendo Problemas	31
TRIGONOMETRIA	34
Mapa de Aprendizagem	35
Contextualização e Motivação	37
Pré-Requisitos	38
Ângulos	38
Triângulos	42

Teorema de Pitágoras	44
Exercícios Propostos	46
Construindo Conceitos	48
Contexto Histórico	48
Trigonometria no Triângulo Retângulo	49
Seno, Cosseno e Tangente de um Ângulo Agudo	49
Ângulos Notáveis	51
Exercícios Propostos	55
Trigonometria na Circunferência	57
Arcos de Circunferência	57
Relação entre Grau e Radiano	58
Medida de um Arco de Circunferência	59
Circunferência Trigonométrica	59
Arcos Côngruos	60
Associando Ângulos Centrais a Arcos no Ciclo Trigonométrico	64
Seno e Cosseno no Ciclo Trigonométrico	64
Tangente no Ciclo Trigonométrico	66
Redução ao 1º Quadrante	68
Lei dos Senos e Lei dos Cossenos	71
Relação Fundamental da Trigonometria	73
Exercitando e Resolvendo Problemas.....	74
Funções Trigonométricas	77
Conceitos Importantes	78
Função Seno	80
Exercícios Resolvidos	84
Exercícios Propostos	86
Função Cosseno	89
Exercícios Resolvidos	92
Exercícios Propostos	95
Função Tangente	97
Exercícios Resolvidos	101
Exercitando e Resolvendo Problemas	102

ANÁLISE COMBINATÓRIA



MAPA DE APRENDIZAGEM

Este mapa apresenta os objetivos de aprendizagem que orientam o desenvolvimento deste capítulo, bem como as habilidades previstas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e pela Matriz de Referência do Enem. Esses referenciais indicam os conhecimentos e as competências que serão mobilizados ao longo dos estudos, favorecendo o acompanhamento da aprendizagem e o alinhamento entre os conteúdos, as atividades e as formas de avaliação.

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAGEM

PRÉ-REQUISITOS

- Identificar e representar matematicamente conceitos como par e ímpar, sucessor, antecessor e outras relações numéricas simples.
- Compreender e utilizar a tradução da linguagem natural para a linguagem matemática, reconhecendo termos e expressões usuais como dobro, terça parte, etc.
- Compreender e distinguir ordinalidade e cardinalidade, aplicando esses conceitos na organização e contagem de elementos.
- Interpretar e utilizar corretamente os conceitos de elementos e subconjuntos na representação de conjuntos.
- Identificar e distinguir contextos em que a contagem deve ser realizada por adição, por multiplicação ou por exclusão de casos repetidos.

FATORIAL SIMPLES

- Compreender o conceito de fatorial, reconhecendo seu significado e suas propriedades básicas.
- Calcular fatoriais simples, aplicando corretamente a definição matemática.

ESTRATÉGIAS DE CONTAGEM

- Compreender o Princípio Fundamental da Contagem, reconhecendo situações em que se aplicam os princípios aditivo, multiplicativo e excludente.
- Resolver problemas de contagem utilizando adequadamente os princípios aditivo e multiplicativo.
- Aplicar o princípio excludente para evitar contagens excessivas, como por exemplo: em situações que envolvem interseção de conjuntos.
- Analisar e validar os resultados obtidos em problemas de contagem, avaliando a coerência das estratégias utilizadas.
- Compreender o conceito de permutação linear como arranjo de todos os elementos de um conjunto.
- Resolver problemas que envolvam permutação linear simples, utilizando o fatorial como ferramenta de cálculo.
- Identificar corretamente o total de elementos e a quantidade de repetições de cada elemento envolvida no problema.
- Reconhecer situações-problema em que a repetição de elementos interfere na contagem total de arranjos possíveis.

- Compreender o conceito de permutação composta como a contagem do número de formas distintas de organizar todos os elementos de um conjunto quando há elementos repetidos.
- Utilizar o fatorial e a fórmula da permutação com repetição de maneira adequada na resolução de problemas.
- Resolver problemas de contagem envolvendo permutação composta, interpretando e validando os resultados obtidos à luz do contexto apresentado.
- Identificar, em situações-problema, quando a ordem dos elementos é relevante (arranjos) ou não relevante (combinações).
- Compreender e diferenciar os conceitos de arranjo simples e combinação simples, reconhecendo o papel da ordem na contagem.
- Utilizar corretamente as fórmulas de arranjos e combinações simples na resolução de problemas de contagem.
- Interpretar e analisar os resultados obtidos em situações de contagem, avaliando a coerência das soluções.

HABILIDADES DE ACORDO COM A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

HABILIDADES DE ACORDO COM A MATRIZ DE REFERÊNCIA DO ENEM

H2 – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 – Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 – Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.



ANÁLISE COMBINATÓRIA

Análise Combinatória é o ramo da Matemática que estuda métodos de contagem, ou seja, técnicas utilizadas para determinar quantas maneiras diferentes um determinado evento pode ocorrer, sem a necessidade de enumerar todas as possibilidades. Em outras palavras, a análise combinatória busca calcular o número de agrupamentos, arranjos ou seleções possíveis de elementos de um conjunto, considerando ou não a ordem dos elementos e a repetição entre eles.

A Análise Combinatória tem origem na necessidade humana de contar, organizar e classificar possibilidades, surgindo de forma intuitiva em problemas práticos ligados a jogos, comércio e organização social. Registros iniciais aparecem na Antiguidade, especialmente na Índia e na China, em contextos relacionados a jogos de azar e agrupamentos numéricos. Um marco importante é o trabalho do matemático indiano Pingala (século III a.C.), que, ao estudar padrões rítmicos na poesia sânscrita, desenvolveu ideias equivalentes ao sistema binário e a estruturas semelhantes ao atual Triângulo de Pascal.

Na Idade Média, a Análise Combinatória ganhou novo impulso no mundo islâmico e europeu, principalmente associada ao estudo de jogos de azar. No século XVII, o tema se consolidou como área matemática com os trabalhos de Blaise Pascal e Pierre de Fermat, que investigaram problemas de contagem e lançaram as bases da Teoria das Probabilidades. Pascal sistematizou coeficientes binomiais por meio do triângulo que hoje leva seu nome, ferramenta central para cálculos combinatórios.

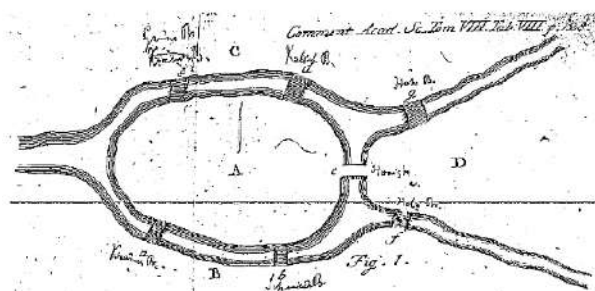
Nos séculos XVIII e XIX, matemáticos como Leonhard Euler ampliaram significativamente a área, conectando a Análise Combinatória à álgebra, teoria dos grafos e funções geradoras. Já no século XX, o campo passou a ter aplicações diretas em estatística, informática, criptografia, genética e pesquisa operacional, tornando-se essencial para o desenvolvimento da ciência e da tecnologia modernas. Atualmente, a Análise Combinatória é ensinada na educação básica como instrumento fundamental para o raciocínio lógico, a resolução de problemas e a modelagem de situações do cotidiano, em consonância com as diretrizes da BNCC.

1. O Problema das Sete Pontes de Königsberg (Leonhard Euler)

Considerado o nascimento da Teoria dos Grafos (um ramo essencial da combinatória moderna), este diagrama ilustra o problema resolvido por Euler sobre se era possível cruzar todas as pontes da cidade sem repetir nenhuma.

O mapa esquemático mostra o rio Pregel e as sete pontes de Königsberg (atual Kaliningrado). A análise de Euler sobre as conexões (vértices e arestas) lançou as bases da topologia e análise combinatória de redes.

Figura 1 - Artigo "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis" (A solução de um problema relacionado à geometria de posição), publicado por Leonhard Euler em 1736.



Fonte: Wikimedia Commons.

2. *Dissertatio de Arte Combinatória* (Gottfried Wilhelm Leibniz)

Leibniz foi um dos primeiros a ver a combinatória como uma ciência formal própria, não apenas como um auxílio para jogos ou cálculos aritméticos.

Página de rosto da dissertação onde Leibniz propõe uma linguagem universal baseada em combinações de conceitos básicos, antecipando a lógica moderna e a ciência da computação.

Figura 3 - Parte da obra do palimpsesto de Arquimedes, reproduzida entre os séculos X e XIII E.C.¹



Fonte: National Geographic Portugal (2019) / Foto: Christie's Images/Corbis.

4. Rodas Combinatórias de Ramon Llull (*Ars Magna*)

Ramon Llull usou a combinatória em um contexto teológico e filosófico, criando máquinas de papel (volvelles) para combinar atributos divinos e lógicos. Diagramas circulares concêntricos que podiam ser girados para alinhar diferentes letras e conceitos, gerando todas as combinações possíveis de argumentos ou atributos.

Figura 5 - Essa imagem representa o Livro "Triângulo Aritmético" (Triangle Arithmétique).



Fonte: University of Cambridge (Universidade de Cambridge).

Figura 2 - Obra sobre Análise Combinatória, de Gottfried Wilhelm Leibniz, Leipzig, 1666.



Fonte: Antiquariat INLIBRIS / AbeBooks.com.

3. O *Stomachion* de Arquimedes

Um dos problemas combinatórios mais antigos conhecidos no ocidente, focado em geometria, o *Stomachion*, era um quebra-cabeça de dissecção (tangram grego) consistindo em 14 peças. O objetivo era determinar de quantas maneiras essas peças poderiam ser montadas para formar um quadrado. A resposta (descoberta recentemente com uso de computadores) é 17.152 combinações.

Figura 4 - Manuscritos do *Ars Magna* (A Grande Arte), iniciado por Ramon Llull por volta de 1305.



Fonte: Wikimedia Commons.

5. Ilustração histórica do triângulo aritmético de Blaise Pascal

Pode aparecer em edições de obras que mostram como o triângulo foi representado em textos clássicos do século XVII.

REFERÊNCIAS

- BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.
- KATZ, Victor J. *A history of mathematics: an introduction*. 3. ed. Boston: Addison-Wesley, 2009.
- LIMA, Elon Lages et al. *A matemática do ensino médio*. v. 2. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- IEZZI, Gelson et al. *Fundamentos de matemática elementar: análise combinatória e probabilidade*. 7. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.
- BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. 3. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.
- ROQUE, Tatiana. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.



CONCEITOS E RELAÇÕES NUMÉRICAS BÁSICAS

1. De natureza ordinal

a) **Sucessor:** número imediatamente maior que um dado número.

Exemplo. Sucessor de n : $n + 1$

b) **Antecessor:** número imediatamente menor que um dado número.

Exemplo. Antecessor de n : $n - 1$

c) **Números consecutivos:** números que se seguem na sequência natural, diferindo de uma unidade.

Exemplo. A sequência 7, 8 e 9

d) **Relações de ordem entre números:** Dados dois números distintos em um mesmo conjunto numérico, um número pode ser **Maior do que** ($>$), **Menor do que** ($<$), **Maior do que ou igual a** ($\geq$) ou **Menor do que ou igual a** ($\leq$) outro número dado.

Exemplo: No conjunto dos números naturais,

$$5 > 3$$

$$21 < 39$$

$$105 \geq 105$$

2. Sobre propriedades dos números naturais

- **Número par:** número inteiro divisível por 2 (Forma geral: $2k$, com $k \in \mathbb{Z}$).
- **Número ímpar:** número inteiro não divisível por 2 (Forma geral: $2k+1$, com $k \in \mathbb{Z}$).
- **Múltiplo:** número obtido pela multiplicação de um número inteiro por outro.

Exemplo: 12 é múltiplo de 3 e 4, pois $3 \times 4 = 12$.

- **Divisor:** número que divide outro de forma exata.

Exemplo: 3 é divisor de 12, pois $12 \div 3 = 4$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM 1

Questão 01: Considere o número 18 e responda com V para as afirmações que você julgar verdadeiras e F para as falsas.

- a) (_) É par, pois é divisível por 2;
- b) (_) É ímpar, pois vem depois de um número natural ímpar
- c) (_) Seu antecessor é 17 e seu sucessor é 19;
- d) (_) 17, 18 e 19 são números consecutivos;
- e) (_) 18 é maior do que 15 e menor do que 20;
- f) (_) O dobro de 18 é 36 e a metade é 9;
- g) (_) 8 é divisor de 18;
- h) (_) 18 é múltiplo de 2, 3, 6 e 9;
- i) (_) 9 é múltiplo de 18.

a) V, b) F, c) V, d) V, e) V, f) V, g) F, h) V, i) F

Questão 02: Considere a frase “Uma biblioteca recebeu 24 livros novos” e responda com V para

as afirmações verdadeiras e F para as afirmações falsas.

- a) (_) 24 é um número par;
- b) (_) Se chegar mais um livro, o total será 25 (sucessor);
- c) (_) Se dois livros forem retirados, restarão 22;
- d) (_) a terça parte de 24 é 6;
- e) (_) O dobro da quantidade inicial seria 48 livros;
- f) (_) A metade da quantidade inicial seria 12 livros;
- g) (_) É possível dividir igualmente entre 9 pessoas;
- h) (_) 24 é múltiplo de 3, logo os livros podem ser organizados em 3 prateleiras com 8 livros cada.

a) V, b) V, c) V, d) F, e) V, f) V, g) F, h) V

3. Tradução da Linguagem Natural para a Linguagem Matemática

Traduzir da linguagem natural para a matemática significa interpretar palavras e expressões do cotidiano e representá-las por símbolos, operações ou expressões algébricas.

Exemplos: Algumas expressões usuais

- A expressão “a mais” é traduzida como **soma**.
- A expressão “a menos” é traduzida como **subtração**.
- A expressão “dobro de uma quantidade¹” significa multiplicar por 2: $2x$.
- A expressão “triplo de uma quantidade” significa multiplicar por 3: $3x$.
- A expressão “metade de uma quantidade” significa dividir por 2: $\frac{x}{2}$.
- A expressão “terça parte de uma quantidade” significa dividir por 3: $\frac{x}{3}$.
- A expressão “quatro sétimos de uma quantidade” pode ser representada por $\frac{4x}{7}$.

Exemplo. Chamando de x a quantidade total de lâmpadas produzidas por uma indústria, qual a expressão matemática que representa a quantidade de lâmpadas defeituosas, correspondente a três quintos do total produzido?

Solução. A quantidade aqui é o total de lâmpadas, ou seja, x ; desta forma, com a expressão “três quintos”, temos que a quantidade de lâmpadas defeituosas é $\frac{3x}{5}$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM 2

Questão 01: “O dobro de um número mais 5 é igual a 21.”

Tradução matemática: $2x + 5 = 21$

$$2x = 21 - 5$$

$$2x = 16$$

$$x = 16/2$$

$$x = 8$$

Questão 02: “O dobro da idade de Ana, junto a idade de Maria, sua irmã de 5 anos, é 21.”

Tradução matemática:

$$2A + 5 = 21 \therefore A = 8$$

Logo, Ana possui 8 anos

4. Cardinalidade x Ordinalidade

Cardinalidade: indica quantos elementos há em um conjunto.

Responde a pergunta: Quantos?

Ordinalidade: indica a posição ou ordem de um elemento, respondendo à pergunta: Qual a posição?

Exemplo. Numa chamada de sala há 28 alunos e João é o 5º da lista:



¹ O termo **quantidade** refere-se a um número que mensura idade, salário, grupo de pessoas, de animais ou de objetos, produção, tempo, massa, volume, etc.

- ✓ “há 28 alunos” → cardinalidade;
- ✓ “João é o 5º da lista” → ordinalidade.

Exemplo. Dentre os 25 corredores, Lando Norris dominou o GP de São Paulo 2025 no autódromo de Interlagos, vencendo a corrida sprint e a prova principal, crucial na disputa do título. Verstappen, mesmo largando dos boxes, recuperou-se para terminar em 3º. O evento consolidou o formato sprint, com grandes disputas e forte presença de público.

- ✓ Cardinalidade → 25 corredores (quantidade).
- ✓ Ordinalidade → 3º lugar (posição).

Nenhum dos dois, pois 2025 está sendo usado como marcador temporal (ano do evento), identificação/calendário, não como quantidade (*quantos?*), nem como posição ou ordem (*em que lugar?*), ou seja, não indica cardinalidade (não está contando algo) e não indica ordinalidade (não está classificando ou ordenando).



5. Elementos e subconjuntos na representação de conjuntos

Conceitos:

- **Elemento:** cada objeto pertencente a um conjunto.
 - Notação: Se x é elemento de A , então $x \in A$ (lê-se: x pertence ao conjunto A); se não é elemento de A , então $x \notin A$ (lê-se: x não pertence ao conjunto A).
- **Subconjunto:** conjunto cujos elementos pertencem a outro conjunto.
 - Notação: Se A e B são esses conjuntos e todo elemento de B é também elemento de A , então $B \subset A$ (lê-se: B está contido em A); se pelo menos um elemento de B não é elemento de A , então $B \not\subset A$ (lê-se: B não está contido em A).

Esses conceitos são fundamentais para organização, classificação e contagem.

Exemplo 1: Considere o conjunto $A = \{2, 4, 6, 8\}$

- ✓ O número 4 é elemento de A : $4 \in A$
- ✓ O conjunto $B = \{2, 6\}$ é subconjunto de A : $B \subset A$
- ✓ O número 5 não pertence a A : $5 \notin A$

Exemplo 2: Se A representa os alunos de uma turma:

- ✓ Cada aluno é um elemento;
- ✓ O grupo de alunos que participa da olimpíada é um subconjunto da turma.

CONSTRUINDO CONCEITOS

FATORIAL SIMPLES

Seja n um número inteiro não negativo. Definimos o fatorial de n (indicado pelo símbolo $n!$) como sendo

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$



Exemplo 1

a) $2! = 2 \cdot 1 = 2$

b) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

c) $4 \cdot 3! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

d) $\frac{9!}{7!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 9 \cdot 8 = 72$

e) $\frac{45!}{44!} = \frac{45 \cdot 44!}{44!} = 45$

f) $\frac{(x+1)!}{x!} = \frac{(x+1) \cdot x!}{x!} = x+1$

Observação: Por convenção, para $n = 0$ teremos $0! = 1$ e, para $n = 1$ teremos $1! = 1$.

O valor $0! = 1$ decorre do conceito de produto vazio (igual a 1) e da interpretação combinatória como o número de permutações do conjunto vazio” (Graham, Knuth & Patashnik; Rosen).

Exemplo 2. (BJ) Em uma escola pública, a coordenação pedagógica registra diariamente a formação de grupos de alunos para atividades extracurriculares. Em determinado dia, por motivo de força maior, decidiu-se não formar nenhum grupo, sendo necessário ainda assim registrar essa decisão no sistema.

Considerando que havia 6 alunos disponíveis, o número de maneiras distintas de registrar a escolha de nenhum aluno para a atividade é

- a) 0.
- b) 1.
- c) 6.
- d) $6!$.
- e) depende do número de alunos.

Solução: [B]

Registrar “não escolher ninguém” é escolher 0 elementos de um conjunto com 6, isto é, 1 só forma.

Exemplo. (BJ) Um pesquisador organiza arquivos digitais contendo resultados de experimentos. Cada arquivo corresponde a uma organização possível dos dados coletados. Em um dia específico, nenhum dado foi coletado, resultando em um arquivo vazio.

O número de maneiras distintas de organizar os dados desse arquivo vazio é igual a

- a) 0.
- b) 1.
- c) indefinido.
- d) maior que 1.
- e) igual ao número de experimentos.

Solução: [B]

Mesmo sem dados, existe uma única configuração possível: o arquivo vazio. Matematicamente, isso corresponde a $0! = 1$.

DUPLO FATORIAL

O produto de todos os inteiros de 1 até algum inteiro não negativo n que tem a mesma paridade de n é chamado de **duplo fatorial** ou **semifatorial** de n , e é denotado por $n!!$.

i. Se n for PAR, então: $n!! = n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots 4 \cdot 2$
Ex.: $8!! = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384$

ii. Se n for ÍMPAR, então: $n!! = n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots 3 \cdot 1$
Ex.: $7!! = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105$

Utilizando exemplos numéricos, verifique para $n > 1$, que $n!!$ é diferente de $(n!)!$.



CURIOSIDADE

O **semifatorial** é uma ferramenta matemática essencial para simplificar cálculos em contextos onde a variação ocorre de dois em dois passos, sendo utilizado na **combinatória** para determinar o número de maneiras de organizar elementos em pares perfeitos, na **Estatística** para calcular os momentos de uma distribuição normal e na **Física Quântica** para normalizar funções de onda. Além disso, ele desempenha um papel crucial no cálculo integral, especialmente nas **Integrais de Wallis**, e na geometria avançada para definir o volume de hipersfera em múltiplas dimensões, servindo como um “atalho” elegante para fórmulas que, de outra forma, seriam extremamente extensas e complexas.

PRINCÍPIOS DA CONTAGEM

Se determinado acontecimento ocorre em k etapas diferentes, e se a primeira etapa pode ocorrer de k_1 maneiras diferentes, a segunda de k_2 maneiras diferentes, e assim sucessivamente, então o número total T de maneiras de ocorrer o acontecimento é dado por

I. Princípio Aditivo (ou)

Se um evento pode ocorrer de **duas ou mais maneiras diferentes**, e essas maneiras são **mutuamente exclusivas** (ou seja, não acontecem ao mesmo tempo), então o número total de possibilidades é a **soma** das possibilidades de cada caso.

$$T = k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n$$

Obs.: O princípio aditivo só pode ser usado quando não há sobreposição entre os casos e, se houver elementos em comum, é necessário ajustar a contagem (evitar contar duas vezes).

Exemplo: (BJ) Durante a Semana Cultural, uma escola organizou diferentes oficinas para seus alunos. Ao todo, foram disponibilizadas 5 oficinas de teatro, 7 de música e 8 de artes visuais. Cada estudante pode se inscrever em apenas uma dessas atividades.

Considerando essa situação, o número total de escolhas possíveis para um aluno é

- a) 9. b) 14. c) 20. d) 30. e) 120.

Solução: [C]

O aluno deve escolher uma única oficina entre teatro, música ou artes visuais. Como se trata de alternativas (teatro ou música ou artes), aplicamos o Princípio Aditivo

$$5 + 7 + 8 = 20$$

II. Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem (e)

Se um evento é realizado em **etapas sucessivas e independentes**, então o número total de possibilidades é o **produto** do número de opções em cada etapa.

$$T = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \dots \cdot k_n$$

Exemplo: (BJ) Mariana abriu o guarda-roupas para se arrumar. Observando as possibilidades, ela constatou que há disponível 2 calças, nas cores preto e azul, e 3 blusas, nas cores verde, branco e marrom, por estar indecisa, Mariana decide analisar todas as combinações possíveis de 1 calça e 1 blusa.

De quantas maneiras diferentes Mariana pode se vestir?

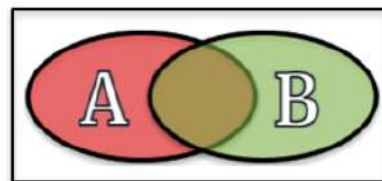
- a) 3 b) 5 c) 6 d) 8 e) 9

Solução: [C]



III. Inclusão / Exclusão (+ / -)

Ao somar as cardinalidades de A e B temos um número maior que a cardinalidade da união, já que estamos somando a intersecção duas vezes, sendo assim é necessário subtraí-la para termos o resultado correto.



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Exemplo: Em uma feira de tecnologia do ensino médio, cada estudante deve montar um “kit de apresentação” composto por

1 camiseta personalizada, optando entre:

- 4 modelos com tema de Robótica;
- 3 modelos com tema de Programação.

1 boné personalizado, podendo escolher entre:

- 2 modelos com tema de Robótica;
- 2 modelos com tema de Programação.

Alguns modelos possuem tema híbrido (Robótica e Programação ao mesmo tempo), como 1 modelo de camiseta e 1 modelo de boné.

A organização deseja saber de quantas maneiras diferentes um estudante pode montar seu kit escolhendo ao menos um item exclusivamente de Robótica (ou seja, não híbrido e não apenas de Programação). O número de maneiras distintas de montar o kit atendendo à condição proposta é

- a) 20. b)22. c)23. d)24. e)2

Solução: [C]

Vamos ao total de possibilidades, sem restrição

- Camisetas: 3 exclusivamente de Robótica, 1 híbrida e 3 exclusivamente Programação, perfazendo assim um total de 7 camisetas
- Bonés: 2 exclusivamente de Robótica, 1 híbrido e 2 exclusivamente Programação, perfazendo assim um total de 5 bonés

Total geral: $7 \times 5 = 35$

Agora, não exclusivamente robótica

- Camisetas: 3 Programação e 1 híbrida, perfazendo assim um total de 4 camisetas
- Bonés: 2 Programação e 1 híbrido, perfazendo assim um total de 3 bonés

Total restrito: $4 \times 3 = 12$

Logo, pelo princípio da inclusão e exclusão (PIE), temos

$$35 - 12 = 23 \text{ formas de montar o kit}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Questão 1. (BJ) Em uma feira gastronômica, após realizar sua refeição, o visitante tem direito a escolher apenas uma sobremesa. Estão disponíveis 7 tipos diferentes de sorvete, 3 variedades de pudim e 2 opções de mousse.

O número total de maneiras distintas de escolher essa sobremesa é

- a) 7. b) 10. c) 12. d) 21. e) 42.

Solução: [C]

O visitante escolherá uma sobremesa, podendo ser sorvete, pudim ou mousse. Como é uma escolha alternativa

$$7 + 3 + 2 = 12$$

Questão 2. (BJ) Uma biblioteca comunitária permite que cada leitor retire apenas um livro por vez. No momento, encontram-se disponíveis 8 exemplares de literatura brasileira e 5 exemplares de literatura estrangeira para empréstimo imediato.

Quantas possibilidades distintas de escolha existem para o leitor?

- a) 3 b) 5 c) 8 d) 13 e) 40

Solução: [D]

O leitor pode escolher um livro brasileiro ou um livro estrangeiro. Como as opções são excludentes

$$8 + 5 = 13$$

Questão 3. (BJ) Uma empresa abriu processo seletivo para jovens aprendizes, oferecendo vagas em três setores distintos. São 6 vagas para programação, 4 para suporte técnico e 5 para o setor administrativo. Cada candidato pode se inscrever para concorrer a apenas uma dessas áreas.

O número total de possibilidades de inscrição para um candidato é

- a) 14. b) 15. c) 30. d) 60. e) 120.

Solução: [B]

O candidato pode optar por programação, suporte ou administrativo. Aplicando o Princípio Aditivo

$$6 + 4 + 5 = 15$$

Questão 4. (BJ) Durante um festival estudantil, os alunos podem participar de apenas uma atividade competitiva. As opções incluem 3 modalidades de esportes coletivos, 4 tipos de jogos de tabuleiro, 5 desafios matemáticos e 2 apresentações musicais.

O total de escolhas possíveis para um estudante é

- a) 12. b) 14. c) 24. d) 48. e) 60.

Solução: [B]

O estudante deve escolher uma atividade entre quatro categorias possíveis. Como a escolha é alternativa

$$3 + 4 + 5 + 2 = 14$$

Questão 5. (BJ) Uma universidade promove, no início do ano letivo, uma Semana de Integração destinada aos novos estudantes. Durante o evento, são oferecidas atividades culturais e acadêmicas distribuídas em quatro grandes áreas: Linguagens, Ciências Humanas, Ciências da Natureza e Matemática.

Na área de Linguagens, estão disponíveis 4 oficinas distintas; em Ciências Humanas, há 5 mesas-redondas temáticas; em Ciências da Natureza, são oferecidos 3 mini cursos experimentais; e na área de Matemática, estão disponíveis 6 desafios lógicos diferentes.

Cada estudante inscrito pode participar de apenas uma atividade durante o turno da manhã, devendo escolher uma única opção dentre todas as oferecidas.

Considerando que um estudante participará de somente uma atividade, o número total de escolhas possíveis é

- a) 360. b) 120. c) 72. d) 24. e) 18.

Solução: [E]

O estudante deve escolher uma única atividade, podendo optar por:

— uma das 4 oficinas de Linguagens,

- ou uma das 5 mesas-redondas de Ciências Humanas,
- ou um dos 3 mini cursos de Ciências da Natureza,
- ou um dos 6 desafios de Matemática.

As opções são alternativas (ocorre uma ou outra), portanto aplicamos o Princípio Aditivo

$$4 + 5 + 3 + 6 = 18$$

Questão 6. (Ufrgs) Tomando os algarismos ímpares para formar números com quatro algarismos distintos, a quantidade de números

divisíveis por 5 que se pode obter é

- a) 12. b) 14. c) 22. d) 24. e) 26

Solução: [D]

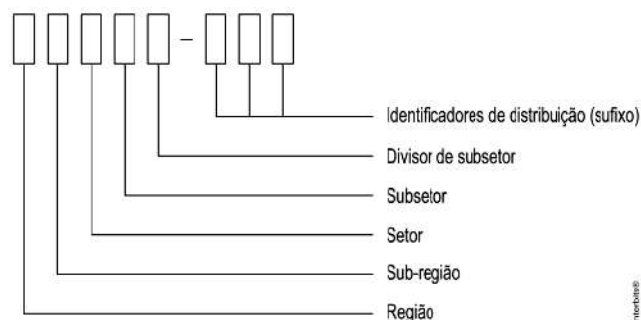
Como os números devem ser divisíveis por 5, o último algarismo deve ser 5.

Então devemos formar números com 3 algarismos distintos escolhidos dentre os números do conjunto {1, 3, 7, 9}.

Assim, pelo princípio multiplicativo, temos

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Questão 7. (Enem (Libras)) O Código de Endereçamento Postal (CEP) é um código numérico constituído por oito algarismos. Seu objetivo é orientar e acelerar o encaminhamento, o tratamento e a distribuição de objetos postados nos Correios. Ele está estruturado segundo o sistema métrico decimal, sendo que cada um dos algarismos que o compõem codifica região, sub-região, setor, subsetor, divisor de sub setor e identificadores de distribuição conforme apresenta a ilustração.



O Brasil encontra-se dividido em dez regiões postais para fins de codificação. Cada região foi dividida em dez sub-regiões. Cada uma dessas, por sua vez, foi dividida em dez setores. Cada setor, dividido em dez subsetores. Por fim, cada subsetor foi dividido em dez divisores de subsetor. Além disso, sabe-se que os três últimos algarismos após o hífen são denominados de sufixos e destinam-se à identificação individual de localidades, logradouros, códigos especiais e unidades dos Correios.

A faixa de sufixos utilizada para codificação dos logradouros brasileiros inicia em 000 e termina em 899.

Disponível em: www.correios.com.br Acesso em: 22 ago. 2017 (adaptado).

Quantos CEPs podem ser formados para a codificação de logradouros no Brasil?

- a) $5.0 + 9.10^2$ d) 9.10^2
b) $10^5 + 9.10^2$ e) 9.10^7
c) $2.9.10^7$

Solução: [E]

Pelo Princípio Multiplicativo, segue que o resultado é $10.10.10.10.10.900 = 9.10^7$.

Questão 8. (Uece 2017) Quantos números inteiros positivos pares, com três dígitos distintos, podemos formar com os algarismos 3, 4, 5, 6 e 7?

- a) 24 b) 28 c) 32 d) 36 e) 40

Solução: [A]

Para a última casa decimal, temos 2 possibilidades (4 ou 6), já que o número é par. Como o número é formado por algarismos distintos, temos 4 possibilidades para a primeira casa decimal e 3 possibilidades para a segunda casa decimal. Portanto, o total de números inteiros positivos que podemos formar será dada por

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

Questão 9. (Upf) As portas de acesso de todos os quartos de certo hotel são identificadas por meio de números ímpares formados com 3 elementos do conjunto $S = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Nessas condições, é correto afirmar que o número máximo de quartos deste hotel é

- a) 18. b) 27. c) 90. d) 108. e) 216.

Solução: [D]

Opções (op) = $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

op₁ op₂ op₃

Terminar com 3, 5 ou 7 (nº ímpares)
Total de $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$ possibilidades

Questão 10. (Fac. Albert Einstein - Medicina) Um patrão tem 6 tarefas diferentes para serem distribuídas entre 3 empregados. Ele pode delegar todas elas a um só empregado, ou delegar apenas para alguns, ou ainda garantir que cada empregado receba pelo menos uma tarefa.

O número de maneiras distintas de distribuir essas tarefas é

- a) 639. b) 714. c) 729. d) 864. e) 910.

Solução: [C]

Como cada tarefa pode ser distribuída de três modos distintos, podemos concluir, pelo Princípio Multiplicativo, que o resultado é $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$

Questão 11. (Pucsp) Uma pessoa dispõe das seguintes cores de tinta: amarela, azul, verde, vermelha e branca, e irá utilizá-las para pintar um pote. Nesse pote serão pintadas a tampa, a lateral e uma lista na lateral, de modo que a tampa e a lateral poderão ter a mesma cor ou cores diferentes.

O número de maneiras distintas de pintar esse pote é

- a) 100. b) 80. c) 60. d) 40. e) 20.

Solução: [A]

Pelo enunciado pode-se deduzir que a cor da listra e a da lateral precisam ser diferentes para que a lista seja visível. Assim, a listra só precisa ser de uma cor distinta da cor da lateral, logo as possibilidades são: 5 possibilidades de cor na tampa, 5 possibilidades de cor na lateral e 4 possibilidades de cor na lista. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, tem-se

$$5 \cdot 5 \cdot 4 = 100 \text{ possibilidades}$$

Questão 12. Em uma civilização antiga, o alfabeto tinha apenas três letras. Na linguagem dessa civilização, as palavras tinham de uma a quatro letras.

Quantas palavras existiam na linguagem dessa civilização?

- a) 4 b) 12 c) 16 d) 40 e) 120

Solução: [E]

Como as palavras têm até quatro letras temos a seguinte situação: palavras com uma, duas, três ou quatro letras. Logo

$$3 + (3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3) + (3 \times 3 \times 3 \times 3) = 120$$

Questão 13. Uma escola realizou uma pesquisa com 200 alunos do ensino médio para identificar o interesse em participar de três clubes extracurriculares: Clube de Matemática, Clube de Física e Clube de Robótica.

Os resultados mostraram que 90 alunos demonstraram interesse pelo Clube de Matemática, 80 pelo Clube de Física e 70 pelo Clube de Robótica. Verificou-se ainda que 40 alunos têm interesse simultâneo em Matemática e Física, 30 em Matemática e Robótica, e 25 em Física e Robótica. Além disso, 15 alunos manifestaram interesse pelos três clubes.

Sabendo que todos os alunos pesquisados manifestaram interesse em pelo menos um

desses clubes, o número de alunos que demonstraram interesse exclusivamente por apenas um dos clubes é

- a) 65. b) 75. c) 85. d) 95. e) 105.

Solução: [D]

$$90 + 80 + 70 = 240$$

Subtraindo as interseções duplas:

$$240 - (40 + 30 + 25) = 240 - 95 = 145$$

Somando a interseção tripla:

$$145 + 15 = 160$$

Logo, o total correto da união é 160 alunos.

Isso mostra que 40 alunos não demonstraram interesse por nenhum clube, embora o total pesquisado seja 200.

Agora vamos calcular os que têm interesse exclusivamente em apenas um clube.

$$\text{Apenas Matemática: } 90 - 40 - 30 + 15 = 35$$

$$\text{Apenas Física: } 80 - 40 - 25 + 15 = 30$$

$$\text{Apenas Robótica: } 70 - 30 - 25 + 15 = 30$$

$$\text{Somando: } 35 + 30 + 30 = 95$$

PERMUTAÇÕES SIMPLES (ou LINEAR)

Permutações simples de n elementos distintos são os agrupamentos formados com todos os n elementos e que diferem uns dos outros pela ordem de seus elementos. O número total de permutações simples de n elementos distintos é dado por $n!$, isto é,

$$P_n = n!$$

Demonstração

Considere a construção de uma ordenação preenchendo sucessivamente as posições.

Primeira posição
Para a posição 1, qualquer um dos n elementos disponíveis podem ser escolhido.
Logo, existem n possibilidades.

Segunda posição
Após escolher o primeiro elemento, restam $n - 1$ elementos disponíveis.
Assim, existem $n - 1$ possibilidades para a segunda posição.

Terceira posição
Escolhidos dois elementos, restam $n - 2$ elementos.
Logo, existem $n - 2$ possibilidades para a terceira posição.

Continuação do processo
— quarta posição → $n - 3$ escolhas;
— penúltima posição → 2 escolhas;
— última posição → 1 escolha.

Aplicação do Princípio Fundamental da Contagem
$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Por definição, esse produto é o fatorial de n :
$$P_n = n!$$

Fonte: Gerado no ChatGPT

Exemplo 1: Com os elementos A, B, C quais são as possíveis permutações?

Solução:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA.

Exemplo 2: (Enem digital) Eduardo deseja criar um e-mail utilizando um anagrama exclusivamente com as sete letras que compõem o seu nome, antes do símbolo @.

O e-mail terá a forma *****@site.com.br e será de tal modo que as três letras “edu” apareçam sempre juntas e exatamente nessa ordem.

Ele sabe que o e-mail eduardo@site.com.br já foi criado por outro usuário e que qualquer outro agrupamento das letras do seu nome forma um e-mail que ainda não foi cadastrado.

De quantas maneiras Eduardo pode criar um e-mail desejado?

a) 59

b) 60

c) 118

d) 119

e) 120

Solução: [D]

O número de anagramas em que as letras “edu” estejam juntas e nessa ordem é dado pela permutação das 4 letras com o bloco composto pelas três letras que devem permanecer juntas, ou seja,

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Descontando a sequência “eduardo”, teremos $120 - 1 = 119$ maneiras

PERMUTAÇÕES COM ELEMENTOS REPETIDOS (ou COMPOSTA)

Dado um conjunto com os elementos $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, de maneira que x_1 aparece R_1 vezes entre os elementos do conjunto, x_2 aparece R_2 vezes, x_3 aparece R_3 vezes, ..., x_k aparece R_k vezes, totalizando n elementos ao todo. O total de permutações possíveis para esses elementos é dado por

$$P_n^{R_1, R_2, R_3, \dots, R_k} = \frac{n!}{R_1! \cdot R_2! \cdot R_3! \cdots R_k!}$$

Demonstração. Considere um conjunto com n elementos no total, com **elementos aparecendo uma ou mais vezes no conjunto**. Suponha que

- R_1 elementos de um tipo;
- R_2 elementos de outro tipo;
- R_3 elementos de outro tipo;
- ...
- R_k elementos de outro tipo.

De modo que: $R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_k = n$.

Ideia inicial

Se todos os elementos fossem distintos, o número de ordenações possíveis seria $n!$, pois existem n escolhas para a primeira posição, $n - 1$ para a segunda, e assim sucessivamente.

Problema causado pelas repetições

Quando existem elementos iguais, muitas dessas ordenações contadas em $n!$ são indistinguíveis, pois trocar elementos iguais não produz uma nova ordenação. Assim, o valor $n!$ realiza uma contagem em excesso das permutações.

Correção da contagem

Considere os R_1 elementos de um mesmo tipo. Entre si, eles podem ser permutados de $R_1!$ maneiras, sem alterar a ordenação observável.

Logo, cada agrupamento foi contado $R_1!$ vezes a mais. Da mesma forma

- os R_2 elementos iguais podem ser trocados de $R_2!$ maneiras;
- os R_3 elementos iguais podem ser trocados de $R_3!$ maneiras;
- ...
- os R_k elementos iguais podem ser trocados de $R_k!$ maneiras.

Assim, o número de permutações distintas é contado $R_1! \cdot R_2! \cdot R_3! \cdots R_k!$ vezes a mais.

Número correto de permutações

Para eliminar essa contagem em excesso, dividimos $n!$ por esse produto:

$$P_n^{R_1, R_2, R_3, \dots, R_k} = \frac{n!}{R_1! \cdot R_2! \cdot R_3! \cdots R_k!}$$

Exemplo 1: (Ufms) O Sr. Asdrúbal se preocupa muito com a segurança na internet, por isso troca mensalmente a senha de seu correio eletrônico. Para não esquecer a senha, ele utiliza o ano de nascimento de seu gato e a palavra *pet* para formar sua senha, totalizando 7 caracteres. No momento de alterar a senha, ele apenas inverte a ordem da palavra e dos números.

Sabendo que o gato nasceu no ano de 2009 e que as letras da palavra *pet* são mantidas juntas e nessa mesma ordem, quantas senhas distintas o Sr. Asdrúbal consegue formar?

P	E	T	2	0	0	9
---	---	---	---	---	---	---

- a) 5 040 b) 72 c) 720 d) 120 e) 60

Solução: [E]

Considerando as letras da palavra *pet* como uma única letra, o resultado corresponde ao número de permutações de cinco objetos nem todos distintos, ou seja,

$$P_5^{(2)} = \frac{5!}{2!} = 60.$$

Exemplo 2: (Imed) Desenvolvido em 1835, pelo pintor e inventor Samuel Finley Breese Morse, o Código Morse é um sistema binário de representação a distância de números, letras e sinais gráficos, utilizando-se de sons curtos e longos, além de pontos e traços para transmitir mensagens. Esse sistema é composto por todas as letras do alfabeto e todos os números. Os caracteres são representados por uma combinação específica de pontos e traços [...]

Fonte: FRANCISCO, Wagner de Cerqueria e. "Código Morse", Brasil Escola.
Disponível em <<http://brasilecola.uol.com.br/geografia/codigo-morse.htm>>. Acesso em 03 de outubro de 2017.

Considerando o exposto no texto e um conjunto de sinais composto de 2 traços e 3 pontos, quantas mensagens podem ser representadas usando todos os elementos do conjunto?

- a) 10 mensagens c) 30 mensagens e) 200 mensagens
b) 20 mensagens d) 120 mensagens

Solução: [A]

A questão não é muito clara no enunciado, pois “mensagens” poderia ser entendido como formação de palavras/números. Assim, seria necessário primeiro verificar quantas letras e/ou números podem ser escritos com 2 traços e 3 pontos. Como não são todas as combinações de símbolos que possuem significado no Código Morse, essa interpretação torna a questão sem resolução.

Assim, a solução alternativa seria verificar quantas representações gráficas seria possível fazer com 2 traços e 3 pontos. Trata-se de um problema de permutação com repetição.

Calculando

$$P_5^{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

OBSERVAÇÃO

Denomina-se ANAGRAMA a toda sequência de letras (ou de símbolos) formada pela reorganização das letras de uma palavra dada, utilizando todas as letras, podendo ou não formar uma palavra com sentido na linguagem comum.

Um anagrama corresponde a uma **permutação das letras** de uma palavra.

Se a palavra possuir

— n letras todas diferentes, o número de anagramas é: $n!$

— n letras, sendo $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ as quantidades de que cada letra aparece, então: $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$

Exemplos 1: De quantas maneiras distintas, podemos obter uma sequência de anagramas utilizando as letras da palavra AMOR?

Solução:

Há 4 letras disponíveis, sendo todas distintas, logo $P_4 = 4! = 24$ anagramas.

(Possibilidades: AMOR, ROMA, MORA, OMAR, RAOM, ...)

Exemplos 2: De quantas maneiras distintas, podemos obter uma sequência de anagramas utilizando as letras da palavra BALA?

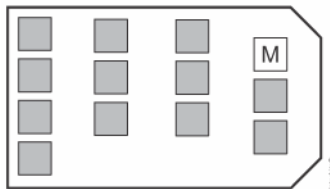
Solução:

Há 4 letras disponíveis, sendo duas delas repetidas: $P_4^2 = 4!/2! = 24/2 = 12$ anagramas.

(Possibilidades: BALA, ALAB, BLAA, AALB, ABLA, ...)

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Questão 1. (Fmp) A figura abaixo mostra o desenho de uma van. O lugar do motorista está assinalado com M e os lugares dos passageiros são os quadradinhos sombreados.



A van está, inicialmente, vazia e Bruno e Ana serão os primeiros a entrar. Eles desejam sentar juntos (um ao lado do outro), mas Ana não quer ficar ao lado do motorista.

Considerando esse contexto, de quantas maneiras esse casal pode se sentar nessa van?

- a) 6 c) 30 e) 15
b) 14 d) 7

Solução: [E]

O número de possibilidades é dado por:

$$\underbrace{1}_{1^{\text{a}} \text{ fileira}} + \underbrace{2 \cdot 2}_{2^{\text{a}} \text{ e } 3^{\text{a}} \text{ fileiras}} + \underbrace{3 \cdot 2}_{4^{\text{a}} \text{ fileira}} = 1 + 8 + 6 = 15 \text{ maneiras}$$

Questão 2. (Unicamp) Cinco pessoas devem ficar em pé, uma ao lado da outra, para tirar uma fotografia, sendo que duas delas se recusam a ficar lado a lado.

O número de posições distintas para as cinco pessoas serem fotografadas juntas é igual a

- a) 48. b) 72 c) 96 d) 120

Solução: [B]

As cinco pessoas podem ser fotografadas de $P_5 = 5! = 120$ maneiras. Dentre estas, as duas pessoas que se recusam a ficar lado a lado podem aparecer juntas de $P_4 \cdot P_2 = 4! \cdot 2! = 48$ modos. Portanto, segue que a resposta é

$$120 - 48 = 72.$$

Questão 3. (Acafe) Um grupo de seis amigos, sendo dois meninos e quatro meninas, estão comemorando a formatura do Ensino Médio. O fotógrafo solicitou ao grupo que se sentasse em um banco de seis lugares e que os meninos se sentassem nas extremidades do banco.

Com essa configuração, o número de maneiras distintas que o grupo pode se sentar é de:

- a) 720 b) 24 c) 48 d) 120

Solução: [C]

Existem duas escolhas para a primeira extremidade e uma escolha para a segunda extremidade. Ademais, as meninas podem ser dispostas de $P_4 = 4! = 24$ maneiras.

Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é

$$2 \cdot 1 \cdot 24 = 48.$$

Questão 4. (S1 - ifce) Listando todos os anagramas da palavra NATURAL e excluindo aqueles em que as letras T, U e R aparecem juntas, em qualquer ordem, sobram

- a) 2 520 palavras. d) 1 860 palavras.
b) 2 480 palavras. e) 1 385 palavras.
c) 2 160 palavras.

Solução: [C]

Calculando, inicialmente, o número de anagramas da palavra NATURAL

$$P_7^2 = \frac{7!}{2!} = 2520.$$

Calculando, agora, o número de anagramas da palavra NATURAL em que as letras TUR aparecem juntas.

$$P_5^2 \cdot P_3 = \frac{5!}{2!} \cdot 3! = 360.$$

Portanto, listando todos os anagramas da palavra e excluindo aqueles em que as letras aparecem juntas, em qualquer ordem, sobram

$$2\,520 - 360 = 2\,160.$$

Questão 5. (Uemg) Em uma apresentação na escola, oito amigos, entre eles Carlos, Timóteo e Joana, formam uma fila.

Calcule o número de diferentes formas que esta fila de amigos pode ser formada de modo que Carlos, Timóteo e Joana fiquem sempre juntos.

- a) $8!$ c) $6! \cdot 3!$
b) $5! \cdot 3!$ d) $8! \cdot 3!$

Solução: [C]

Carlos, Timóteo e Joana podem ser considerados um único bloco, portanto tem-se permutação de 6 “blocos”. Porém os três amigos também podem ser permutados entre si. Portanto, o número de diferentes formas que esta fila de amigos pode ser formada é de

$$6! \cdot 3!$$

Questão 6. (Espm) A senha bancária da dona Maria era 753213 seguida pelas letras D, D e B, nessa ordem. Acontece que ela só se lembrava da parte numérica, esquecendo-se completamente da sequência de letras. A caixa eletrônica apresentou os 4 botões mostrados na figura abaixo, que ela deveria pressionar exatamente 3 vezes, podendo repeti-los, um para cada letra da senha.



Se ela fizer as escolhas aleatoriamente, a probabilidade de acertar a senha será:

- a) $\frac{9}{32}$ c) $\frac{1}{4}$ e) $\frac{3}{16}$
b) $\frac{5}{16}$ d) $\frac{3}{8}$

ARRANJOS SIMPLES

Dado um conjunto com n elementos, chama-se arranjo simples de taxa k (com $k \leq n$), a todo agrupamento de k elementos distintos dispostos numa certa ORDEM. Dois arranjos diferem entre si, pela ordem de colocação dos elementos. Assim, no conjunto $E = \{a, b, c\}$, teremos:

- a) arranjos de taxa 2: ab, ac, bc, ba, ca, cb.
b) arranjos de taxa 3: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Solução: [A]

1ª letra $\Rightarrow$ possibilidades de acerto:

BCD; CDE e DEF $\Rightarrow$ 3 possibilidades

2ª letra $\Rightarrow$ possibilidades de acerto:

BCD; CDE e DEF $\Rightarrow$ 3 possibilidades

3ª letra $\Rightarrow$ possibilidades de acerto:

ABC e BCD $\Rightarrow$ 2 possibilidades

$$P(X) = \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{18}{64} = \frac{9}{32}$$

Questão 7. (Fac. Albert Einstein - Medicina) Oito adultos e um bebê irão tirar uma foto de família. Os adultos se sentarão em oito cadeiras, um adulto por cadeira, que estão dispostas lado a lado e o bebê sentará no colo de um dos adultos.

O número de maneiras distintas de dispor essas 9 pessoas para a foto é

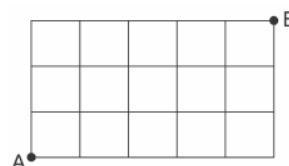
- a) $8 \cdot 8!$ b) $9!$ c) $9 \cdot 8^8$ d) 8^9

Solução: [A]

Existem $P_8 = 8!$ maneiras de acomodar os adultos e 8 maneiras de escolher o colo em que se sentará o bebê. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é

$$8 \cdot 8!.$$

Questão 8. (Upf) Na figura a seguir, as linhas horizontais e verticais representam ruas e os quadrados representam quarteirões.



A quantidade de trajetos de comprimento mínimo ligando A a B é

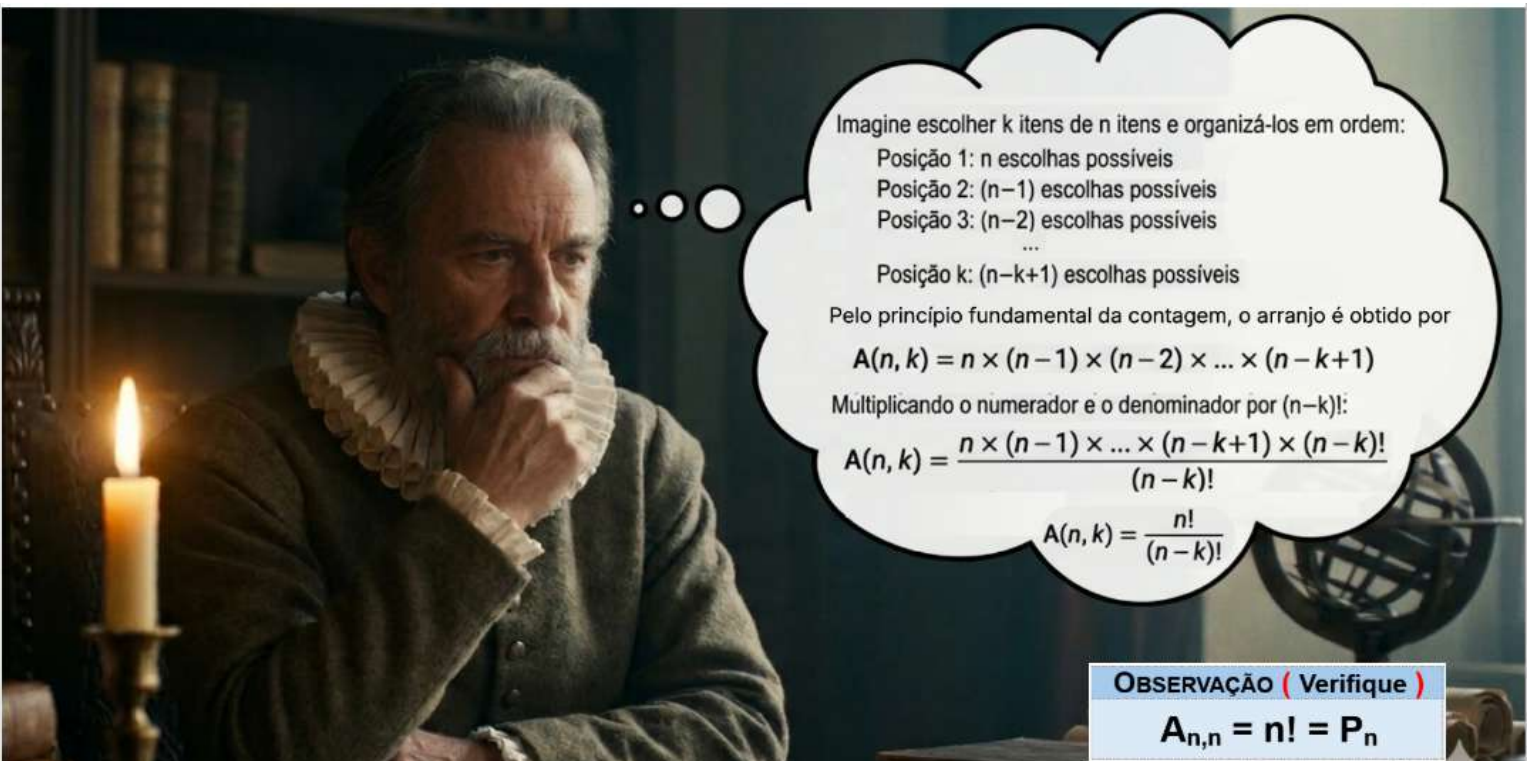
- a) 40 320. c) 256. e) 56.
b) 6 720. d) 120.

Solução: [E]

$$P_n^{\alpha, \beta, \theta, \dots} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \theta! \dots} \Rightarrow P_8^{5,3} = \frac{8!}{5! 3!} = 56$$

Representando o número total de arranjos de n elementos tomados k a k por $A_{n,k}$ ou A_n^k , teremos a seguinte fórmula:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$



Imagine escolher k itens de n itens e organizá-los em ordem:

Posição 1: n escolhas possíveis
 Posição 2: $(n-1)$ escolhas possíveis
 Posição 3: $(n-2)$ escolhas possíveis
 ...
 Posição k : $(n-k+1)$ escolhas possíveis

Pelo princípio fundamental da contagem, o arranjo é obtido por

$$A(n, k) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-k+1)$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $(n-k)!$:

$$A(n, k) = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) \times (n-k)!}{(n-k)!}$$

$$A(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

OBSERVAÇÃO (Verifique)

$$A_{n,n} = n! = P_n$$

Exemplo 1: (Enem PPL) Um determinado campeonato de futebol, composto por 20 times, é disputado no sistema de pontos corridos. Nesse sistema, cada time joga contra todos os demais times em dois turnos, isto é, cada time joga duas partidas com cada um dos outros times, sendo que cada jogo pode terminar empatado ou haver um vencedor.

Sabendo-se que, nesse campeonato, ocorreram 126 empates, o número de jogos em que houve ganhador é igual a

- a) 64. b) 74. c) 254. d) 274. e) 634.

Solução: [C]

O número total de partidas é dado por:

$$A_{20,2} = \frac{20!}{18!} = 380.$$

Portanto, se ocorreram 126 empates, então houve ganhador em $380 - 126 = 254$ jogos.

Exemplo 2: (Enem) Uma pessoa produzirá uma fantasia utilizando como materiais: 2 tipos de tecidos diferentes e 5 tipos distintos de pedras ornamentais. Essa pessoa tem à sua disposição 6 tecidos diferentes e 15 pedras ornamentais distintas.

A quantidade de fantasias com materiais diferentes que podem ser produzidas é representada pela expressão

- a) $\frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{15!}{10! \cdot 5!}$ c) $\frac{6!}{2!} + \frac{15!}{5!}$ e) $\frac{21!}{7! \cdot 14!}$
- b) $\frac{6!}{4! \cdot 2!} + \frac{15!}{10! \cdot 5!}$ d) $\frac{6!}{2!} \cdot \frac{15!}{5!}$

Solução: [A]

Existem $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!}$ maneiras de escolher os tecidos e $\binom{15}{5} = \frac{15!}{5! \cdot 10!}$ modos de escolher as pedras. Logo, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é

$$\frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot \frac{15!}{5! \cdot 10!}.$$

COMBINAÇÕES SIMPLES (ou Número Binomial)

Denominamos combinações simples de n elementos distintos tomados k a k (com $k \leq n$), aos subconjuntos formados por k elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados. Observe que duas combinações são diferentes quando possuem elementos distintos, *NÃO importando a ORDEM* em que os elementos são colocados.

Representando por $C_{n,k}$ o número total de combinações de n elementos tomados k a k , temos a seguinte fórmula:

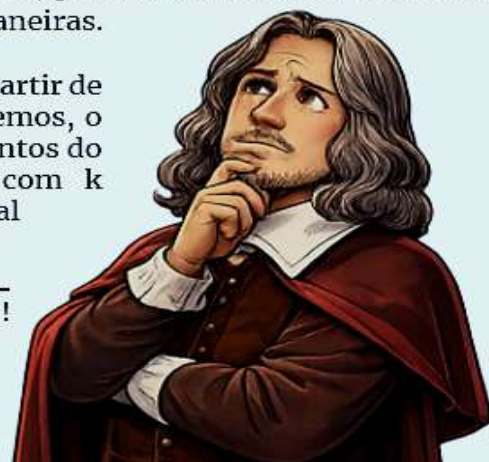
$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{ou} \quad C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{ou} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Demonstração

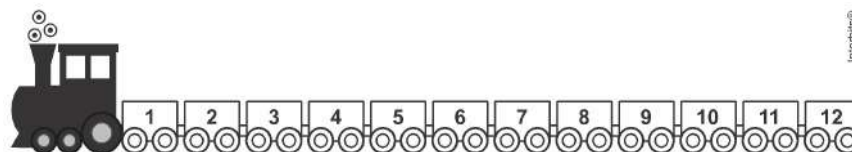
Para obter uma fórmula geral para $C_{n,k}$, podemos contar quantos são os conjuntos de k elementos, escolhidos dentre n elementos distintos dados. Podemos montar um tal conjunto de k elementos sorteando seus elementos um a um. Assim, primeiro montamos uma lista ordenada com k elementos, o que pode ser feito de $A_{n,k}$ maneiras.

Acontece que cada conjunto de k elementos será obtido a partir de exatamente $k!$ dessas listas, uma vez que $k!$ é, como sabemos, o número de maneiras de montar uma lista com os k elementos do conjunto. Dessa forma, a quantidade de conjuntos com k elementos, escolhidos dentre os n elementos dados, é igual

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{k!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$



Exemplo. (Enem) Uma empresa confecciona e comercializa um brinquedo formado por uma locomotiva, pintada na cor preta, mais 12 vagões de iguais formatos e tamanhos, numerados de 1 a 12. Dos 12 vagões, 4 são pintados na cor vermelha, 3 na cor azul, 3 na cor verde e 2 na cor amarela. O trem é montado utilizando-se uma locomotiva e 12 vagões, ordenados crescentemente segundo suas numerações, conforme ilustrado na figura.



De acordo com as possíveis variações nas colorações dos vagões, a quantidade de trens que podem ser montados, expressa por meio de combinações, é dada por

a) $C_{12}^4 \times C_{12}^3 \times C_{12}^3 \times C_{12}^2$

c) $C_{12}^4 \times 2 \times C_8^3 \times C_5^2$

e) $C_{12}^4 \times C_8^3 \times C_5^3 \times C_2^2$

b) $C_{12}^4 + C_8^3 + C_5^3 + C_2^2$

d) $C_{12}^4 + 2 \times C_{12}^3 + C_{12}^2$

Solução: [B]

Existem $\binom{12}{4}$ modos de escolher os vagões pintados na cor vermelha, $\binom{8}{3}$ maneiras de escolher os vagões pintados na cor azul, $\binom{5}{3}$ modos de escolher os vagões que serão pintados na cor verde e $\binom{2}{2}$ maneiras de escolher os vagões pintados na cor amarela.

Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é

$$\binom{12}{4} \times \binom{8}{3} \times \binom{5}{3} \times \binom{2}{2}.$$

Exemplo. (Famema) Determinado curso universitário oferece aos alunos 7 disciplinas opcionais, entre elas as disciplinas A e B, que só poderão ser cursadas juntas. Todo aluno desse curso tem que escolher pelo menos uma e no máximo duas disciplinas opcionais por ano.

O número de maneiras distintas de um aluno escolher uma ou mais de uma disciplina opcional para cursar é

a) 21.

b) 18.

c) 16.

d) 13.

e) 11.

Solução: [C]

Calculando

$$\text{total de maneiras} = 6 + C_{5,2}$$

$$C_{5,2} = \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

$$\text{total de maneiras} = 6 + 10 = 16$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Questão 1. (Enem PPL) A prefeitura de uma cidade está renovando os canteiros de flores de suas praças. Entre as possíveis variedades que poderiam ser plantadas, foram escolhidas cinco: amor-perfeito, cravina, petúnia, margarida e lírio. Em cada um dos canteiros, todos com composições diferentes, serão utilizadas somente três variedades distintas, não importando como elas serão dispostas.

Um funcionário deve determinar os trios de variedades de flores que irão compor cada canteiro.

De acordo com o disposto, a quantidade de trios possíveis é dada por

a) 5

c) $\frac{5!}{(5-3)!}$

e) $\frac{5!}{(5-3)!3!}$

b) $5 \cdot 3$

d) $\frac{5!}{(5-3)!2!}$

Solução: [E]

Sabendo que a ordem não importa, a resposta é

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!}.$$

Questão 2. (Enem) Como não são adeptos da prática de esportes, um grupo de amigos resolveu fazer um torneio de futebol utilizando *videogame*. Decidiram que cada jogador joga uma única vez com cada um dos outros jogadores. O campeão será aquele que conseguir o maior número de pontos. Observaram que o número de partidas jogadas depende do número de jogadores, como mostra o quadro:

Quantidade de jogadores	2	3	4	5	6	7
Número de partidas	1	3	6	10	15	21

Se a quantidade de jogadores for 8, quantas partidas serão realizadas?

a) 64

b) 56

c) 49

d) 36

e) 28

Solução: [E]

O número de partidas pode ser calculado pelo número de combinações de jogadores, 2 a 2. Assim:

$$C_{8,2} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 6!} = 28 \text{ partidas}$$

Questão 3. (Enem) O tênis é um esporte em que a estratégia de jogo a ser adotada depende, entre outros fatores, de o adversário ser canhoto ou destro.

Um clube tem um grupo de 10 tenistas, sendo que 4 são canhotos e 6 são destros. O técnico do clube deseja realizar uma partida de exibição entre dois desses jogadores, porém, não poderão ser ambos canhotos.

Qual o número de possibilidades de escolha dos tenistas para a partida de exibição?

- a) $\frac{10!}{2! \times 8!} - \frac{4!}{2! \times 2!}$ d) $\frac{6!}{4!} + 4 \times 4$
 b) $\frac{10!}{8!} - \frac{4!}{2!}$ e) $\frac{6!}{4!} + 6 \times 4$
 c) $\frac{10!}{2! \times 8!} - 2$

Solução: [A]

Desde que o número de maneiras de escolher dois

tenistas quaisquer é $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \times 8!}$, e o número de modos de escolher dois tenistas canhotos é $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!}$, tem-se que o resultado é dado por

$$\frac{10!}{2! \times 8!} - \frac{4!}{2! \times 2!}$$

Questão 4. (Insper) Um dirigente sugeriu a criação de um torneio de futebol chamado Copa dos Campeões, disputado apenas pelos oito países que já foram campeões mundiais: os três sul-americanos (Uruguai, Brasil e Argentina) e os cinco europeus (Itália, Alemanha, Inglaterra, França e Espanha). As oito seleções seriam divididas em dois grupos de quatro, sendo os jogos do grupo A disputados no Rio de Janeiro e os do grupo B em São Paulo.

Considerando os integrantes de cada grupo e as cidades onde serão realizados os jogos, o número de maneiras diferentes de dividir as oito seleções de modo que as três sul-americanas não fiquem no mesmo grupo é

- a) 140. b) 120. c) 70. d) 60. e) 40.

Solução: [D]

Existem 2 maneiras de escolher o grupo que terá

duas seleções sul-americanas, $\binom{3}{2} = 3$ modos de escolher essas duas seleções, e $\binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$

modos de escolher as duas seleções europeias que irão formar o grupo com as duas sul-americanas. Como o segundo grupo é determinado univocamente pelas escolhas do primeiro, segue-se que o resultado pedido, pelo Princípio Fundamental da Contagem, é

$$2 \cdot 3 \cdot 10 = 60.$$

Questão 5. (Uerj) A tabela abaixo apresenta os critérios adotados por dois países para a formação de placas de automóveis. Em ambos os casos, podem ser utilizados quaisquer dos 10 algarismos de 0 a 9 e das 26 letras do alfabeto romano.

País	Descrição	Exemplo de placa
X	3 letras e 3 algarismos, em qualquer ordem	M3MK09
Y	um bloco de 3 letras, em qualquer ordem, à esquerda de outro bloco de 4 algarismos, também em qualquer ordem	YBW0299

Considere o número máximo de placas distintas que podem ser confeccionadas no país X, igual a n e no país Y igual a p . A razão n/p corresponde a

a) 1 b) 2 c) 3 d) 6

Solução: [B]

Escolhendo 3 lugares para as letras $C_{6,3} = 20$

$$x = C_{6,3} \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 20 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$

$$y = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$

$$\frac{x}{y} = \frac{20 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = 2$$

Logo,

Questão 6. (Fcmsscsp) Ana, Beatriz e Carina são médicas intensivistas. Diana, Elisa, Fernanda, Gabriela, Helena, Inês e Júlia são enfermeiras da unidade de terapia intensiva (UTI). No sábado, haverá plantão de duas médicas intensivistas e quatro enfermeiras nessa UTI. No domingo, o plantão será feito pela médica intensivista que não fez plantão no sábado e por cinco enfermeiras, sendo que três delas não fizeram plantão no sábado.

O total de combinações diferentes que esse cronograma de trabalho do fim de semana

permite é igual a

- a) 840. b) 245. c) 420. d) 490. e) 630.

Solução: [E]

No sábado, devemos escolher 2 médicas dentre 3 e 4 enfermeiras dentre 7. Logo,

$$C_{3,2} \cdot C_{7,4} = 3 \cdot 35 = 105$$

No domingo, temos apenas 1 médica possível. E como as 3 enfermeiras que não fizeram plantão no sábado devem estar entre as escolhidas, basta escolhermos 2 dentre as 4 que trabalharam no sábado. Logo,

$$C_{1,1} \cdot C_{4,2} = 1 \cdot 6 = 6$$

Portanto, o total de possibilidades equivale a:

$$105 \cdot 6 = 630$$

Questão 7. (Fac. Pequeno Príncipe - Medicina)

Uma pessoa quer criar uma *playlist* de músicas favoritas para ouvir e tem a seu dispor uma biblioteca contendo 50 músicas, divididas em 5 grandes gêneros: rock, dance, pop, blues e clássica. Há 10 músicas em cada gênero. Hoje ela fará uma *playlist* em que vai escutar 25 músicas da seguinte forma: 5 músicas de cada um dos 5 gêneros, sendo que músicas de um mesmo gênero devem ser tocadas em seguida até se esgotarem as músicas daquele gênero. Em uma *playlist*, nenhuma música pode se repetir e a ordem com a qual elas são tocadas faz diferença.

É correto afirmar que o número total de *playlists* possíveis será de

- a) 2 500. d) 3 0240⁵
b) 6 048. e) 120 x 3 0240⁵
c) 30 240.

Solução: [E]

Existem 5! = 120 modos de ordenar os gêneros.

O número de maneiras de arranjar 5 músicas em cada gênero é dado por

$$A_{10,5} = \frac{10!}{5!} = 30240.$$

Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é 120 . 3 0240⁵.

Questão 8. (Fcmmg) Um hospital possui 5 salas de cirurgias eletivas, utilizadas diariamente por 8 médicos cirurgiões. Duas dessas salas destinam-se apenas aos procedimentos ortopédicos, sendo ocupadas, em todos os momentos de funcionamento do hospital, por 1 dos 2 ortopedistas que compõem a equipe.

Em certo momento, o número de possibilidades de organizações para a ocupação das salas é de:

- a) 120. b) 240. c) 336. d) 6720.

Solução: [B]

Se os ortopedistas podem ocupar apenas as salas destinadas aos procedimentos ortopédicos e, em qualquer momento, apenas um ortopedista irá ocupar essas duas salas, então o número de maneiras de ocupá-las é

$$\binom{2}{1} = 2.$$

Ademais, como as outras 3 salas podem ser

ocupadas de $A_{6,3} = \frac{6!}{3!} = 120$ modos, segue que a resposta, pelo Princípio Multiplicativo, é $2 \cdot 120 = 240$.

Questão 9. (Uemg) Observe a tirinha abaixo:



Passando por uma sorveteria, Magali resolve parar e pedir uma casquinha. Na sorveteria, há 6 sabores diferentes de sorvete e 3 é o número máximo de bolas por casquinha, sendo sempre uma de cada sabor.

O número de formas diferentes com que Magali poderá pedir essa casquinha é igual a

- a) 20. b) 41. c) 120. d) 35.

Solução: [B]

Como uma casquinha pode ter no máximo 3 bolas e os sabores devem ser distintos, segue-se que o resultado pedido é dado por

$$\begin{aligned} \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} &= 6 + \frac{6!}{2! \cdot 4!} + \frac{6!}{3! \cdot 3!} \\ &= 6 + 15 + 20 \\ &= 41. \end{aligned}$$

EXERCITANDO E RESOLVENDO PROBLEMAS



Questão 01

(Fuvest) Atualmente, no Brasil, coexistem dois sistemas de placas de identificação de automóveis: o padrão Mercosul (o mais recente) e aquele que se iniciou em 1990 (o sistema anterior, usado ainda pela maioria dos carros em circulação). No sistema anterior, utilizavam-se 3 letras (em um alfabeto de 26 letras) seguidas de 4 algarismos (de 0 a 9). No padrão Mercosul adotado no Brasil para automóveis, são usadas 4 letras e 3 algarismos, com 3 letras nas primeiras 3 posições e a quarta letra na quinta posição, podendo haver repetições de letras ou de números. A figura ilustra os dois tipos de placas.

padrão Mercosul



sistema anterior



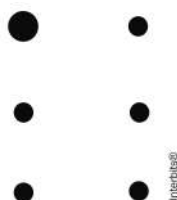
L - letra
N - número

Dessa forma, o número de placas possíveis do padrão Mercosul brasileiro de automóveis é maior do que o do sistema anterior em

- a) 1,5 vezes. c) 2,6 vezes. e) 3 vezes.
b) 2 vezes. d) 2,8 vezes.

Questão 02. (Enem) A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais.

Por exemplo, a letra A é representada por



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braille é

- a) 12. b) 31. c) 36. d) 63. e) 720.

Questão 03. (Enem) O código de barras, contido na maior parte dos produtos industrializados, consiste num conjunto de várias barras que

podem estar preenchidas com cor escura ou não. Quando um leitor óptico passa sobre essas barras, a leitura de uma barra clara é convertida no número 0 e a de uma barra escura, no número 1. Observe a seguir um exemplo simplificado de um código em um sistema de código com 20 barras.



- Se o leitor óptico for passado da esquerda para a direita irá ler: 01011010111010110001
- Se o leitor óptico for passado da direita para a esquerda irá ler: 10001101011101011010

No sistema de código de barras, para se organizar o processo de leitura óptica de cada código, deve-se levar em consideração que alguns códigos podem ter leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, como o código 00000000111100000000, no sistema descrito acima.

Em um sistema de códigos que utilize apenas cinco barras, a quantidade de códigos com leitura da esquerda para a direita igual à da direita para a esquerda, desconsiderando-se todas as barras claras ou todas as escuras, é

- a) 14. b) 12. c) 8. d) 6. e) 4.

Questão 04. (Enem PPL) A bandeira de um estado é formada por cinco faixas, A, B, C, D e E, dispostas conforme a figura.

A	B
	C
D	
E	

Deseja-se pintar cada faixa com uma das cores verde, azul ou amarelo, de tal forma que faixas adjacentes não sejam pintadas com a mesma cor.

O cálculo do número de possibilidades distintas de se pintar essa bandeira, com a exigência acima, é

- a) $1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2$. d) $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2$.
b) $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2$. e) $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.
c) $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 3$.

Questão 05. (Upe-ssa) Leia o seguinte trecho do romancista francês Maurice Leblanc:

"Nervoso e confiante, folheou imediatamente o álbum. Um pouco adiante, outra surpresa o esperava. Era uma página que estampava letras maiúsculas, seguidas por uma linha de algarismos. Nove dessas letras e três desses algarismos haviam sido retirados cuidadosamente. Sholmes escreveu-os na sua caderneta, seguindo as lacunas pela ordem, e obteve o seguinte resultado:

CDEHNOPRS237

[...] a princípio isso não significa muita coisa. Seria possível, misturando aquelas letras e usando todas elas, formar uma, ou duas, ou três palavras completas?"

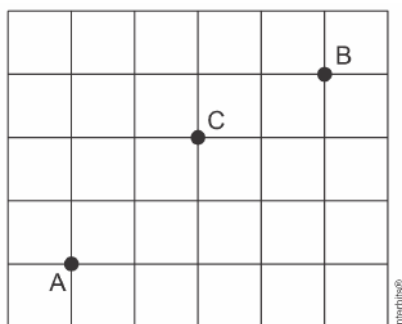
Maurice Leblanc, Arsène Lupin contra Herlock Sholmes, SP: Tricaju, 2021.

O detetive testou alguns dos anagramas que poderia obter com aquela sequência de letras e números.

Quanto anagramas podem ser assim obtidos, desde que os algarismos sempre fiquem juntos?

- a) $9! \cdot 3!$ c) $12!$ e) $9! \cdot 3! \cdot 2!$
b) $10! \cdot 3!$ d) $(9 \cdot 3)!$

Questão 06. (Enem) Três amigos, André, Bernardo e Carlos, moram em um condomínio fechado de uma cidade. O quadriculado representa a localização das ruas paralelas e perpendiculares, delimitando quadras de mesmo tamanho nesse condomínio, em que nos pontos A, B e C estão localizadas as casas de André, Bernardo e Carlos, respectivamente.



André deseja deslocar-se da sua casa até a casa de Bernardo, sem passar pela casa de Carlos, seguindo ao longo das ruas do condomínio, fazendo sempre deslocamentos para a direita ($\rightarrow$) ou para cima ($\uparrow$), segundo o esquema da figura.

O número de diferentes caminhos que André poderá utilizar para realizar o deslocamento nas condições propostas é

- a) 4. b) 14. c) 17. d) 35. e) 48.

Questão 07. (BJ) Em muitas famílias brasileiras, é comum que reuniões informais entre crianças aconteçam na casa dos avós, especialmente em finais de semana. Nessas ocasiões, a organização do lanche costuma envolver escolhas que atendam ao gosto variado dos convidados.

Na despensa de dona Oscarina há pacotes de salgadinhos de seis sabores diferentes. Para receber os colegas que estavam reunidos em sua casa, seu neto Gabriel foi encarregado de escolher oito pacotes para serem distribuídos durante o lanche.

Considerando essas condições, de quantas maneiras distintas Gabriel poderá realizar essa escolha?

- a) 14 b) 48 c) 256 d) 1 287 e) 2 574

Questão 08. (Uerj) Em uma reunião, trabalhadores de uma indústria decidiram fundar um sindicato com uma diretoria escolhida entre todos os presentes e composta por um presidente, um vice-presidente e um secretário. O número total de possibilidades de composição dessa diretoria é trinta vezes o número de pessoas presentes nessa reunião.

O número de trabalhadores presentes é

- a) 13. b) 11. c) 9. d) 7.

Questão 09. (Feevale) Em certo bairro, houve um "troca-troca" de livros usados. João levou 10 livros de romance. Pedro levou 15 de poesia, e Marcelo, 7 de ficção. Marcelo quer levar para casa, em troca de seus livros, 4 de romance e 3 de poesia. Assinale a alternativa que representa o número de formas diferentes com que essa escolha pode ser feita.

- a) $C_{10,4} \cdot C_{15,3}$ c) $A_{10,4} \cdot A_{15,3}$ e) $A_{10,4} + A_{15,3}$
b) $C_{10,4} + C_{15,3}$ d) $A_{10,3} \cdot A_{15,4}$

Questão 10. (Fuvest) Um professor precisa elaborar uma prova multidisciplinar que consta de duas questões de Matemática e seis de Física. Ele deve escolher questões de um banco de dados que contém três questões de Matemática e oito de Física.

O número de provas distintas possíveis, sem levar em conta a ordem em que as questões aparecem, é

- a) 42. b) 54. c) 62. d) 72. e) 84.

Questão 11. (Enem) Um prédio, com 9 andares e 8 apartamentos de 2 quartos por andar, está com todos os seus apartamentos à venda. Os apartamentos são identificados por números formados por dois algarismos, sendo que a dezena indica o andar onde se encontra o

apartamento, e a unidade, um algarismo de 1 a 8, que diferencia os apartamentos de um mesmo andar. Quanto à incidência de sol nos quartos desses apartamentos, constatam-se as seguintes características, em função de seus números de identificação:

- naqueles que finalizam em 1 ou 2, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 3, 4, 5 ou 6, apenas um dos quartos recebe sol na parte da manhã;
- naqueles que finalizam em 7 ou 8, ambos os quartos recebem sol apenas na parte da tarde.

Uma pessoa pretende comprar 2 desses apartamentos em um mesmo andar, mas quer que, em ambos, pelo menos um dos quartos receba sol na parte da manhã.

De quantas maneiras diferentes essa pessoa poderá escolher 2 desses apartamentos para compra nas condições desejadas?

- a) $9 \times \frac{6!}{(6-2)!}$ d) $9 \times \frac{2!}{(2-2)! \times 2!}$
- b) $9 \times \frac{6!}{(6-2)! \times 2!}$ c) $9 \times \frac{4!}{(4-2)! \times 2!}$
- e) $9 \times \left(\frac{8!}{(8-2)! \times 2!} - 1 \right)$

Questão 12. (Enem) Uma montadora de automóveis divulgou que oferta a seus clientes mais de 1.000 configurações diferentes de carro, variando o modelo, a motorização, os opcionais e a cor do veículo. Atualmente, ela oferece 7 modelos de carros com 2 tipos de motores: 1.0 e 1.6. Já em relação aos opcionais, existem 3 escolhas possíveis: central multimídia, rodas de liga leve e bancos de couro, podendo o cliente optar por incluir um, dois, três ou nenhum dos opcionais disponíveis.

Para ser fiel à divulgação feita, a quantidade mínima de cores que a montadora deverá disponibilizar a seus clientes é

- a) 8.
b) 9.
c) 11.
d) 18.
e) 24.

Questão 13. (Enem) Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou

minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

Disponível em: www.infowester.com. Acesso em: 14 dez. 2012.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por

- a) 102.262
b) 102.522
c) 102.522.4!.2!
d) 102.262.4!.2!.2!
e) 102.522.4!.2!.2!

GABARITO

01. C, 02. D, 03. D, 04. B, 05. B, 06. C, 07. D, 08. D, 09. A, 10. E, 11. B, 12. B, 13. E.

Referências

Ronald L. Graham; Donald E. Knuth; Oren Patashnik. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science. 2ª ed. Addison-Wesley, 1994.

TRIGONOMETRIA



MAPA DE APRENDIZAGEM

Este mapa apresenta os objetivos de aprendizagem que orientam o desenvolvimento deste capítulo, bem como as habilidades previstas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e pela Matriz de Referência do Enem. Esses referenciais indicam os conhecimentos e as competências que serão mobilizados ao longo dos estudos, favorecendo o acompanhamento da aprendizagem e o alinhamento entre os conteúdos, as atividades e as formas de avaliação.

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAGEM

PRÉ-REQUISITOS

- Reconhecer e classificar ângulos (agudo, reto, obtuso, raso e completo), identificando suas medidas e relações.
- Classificar triângulos quanto aos ângulos e quanto aos lados, reconhecendo suas propriedades.
- Compreender o Teorema de Pitágoras como relação entre os lados do triângulo retângulo.
- Aplicar o Teorema de Pitágoras para determinar medidas desconhecidas em triângulos retângulos.
- Resolver e interpretar situações-problema do cotidiano que envolvam ângulos e triângulos.

TRIGONOMETRIA

- Compreender o conceito de razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) no triângulo retângulo, relacionando-as aos lados do triângulo.
- Identificar corretamente cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa em relação a um ângulo agudo.
- Calcular valores de seno, cosseno e tangente de ângulos agudos em triângulos retângulos.
- Utilizar as razões trigonométricas para determinar medidas desconhecidas de lados ou ângulos.
- Resolver e interpretar situações-problema que envolvam aplicações da trigonometria no contexto geométrico e em situações do cotidiano.
- Identificar os valores de seno, cosseno e tangente de ângulos como 0° , 90° , 180° , 270° e 360° , como também os ângulos notáveis no ciclo trigonométrico bem como o uso dos mesmos para redução ao 1° quadrante.
- Compreender o ciclo trigonométrico como representação dos ângulos em uma circunferência de raio unitário.
- Relacionar a medida de ângulos em graus e em radianos no ciclo trigonométrico.
- Reconhecer os sinais das razões trigonométricas nos diferentes quadrantes.
- Utilizar o ciclo trigonométrico para determinar valores trigonométricos e resolver situações-problema.
- Compreender as funções seno e cosseno como funções trigonométricas associadas ao ciclo trigonométrico.
- Reconhecer o domínio, a imagem, a periodicidade e a amplitude das funções seno e cosseno.
- Analisar e interpretar os gráficos das funções seno e cosseno, identificando máximos, mínimos, zeros e simetrias.

- Compreender e utilizar a relação entre seno e cosseno, reconhecendo deslocamentos de fase (por exemplo, a relação entre $\text{Sen}(x)$ e $\text{Cos}(x)$).
- Relacionar expressões algébricas das funções seno e cosseno aos seus gráficos correspondentes.
- Resolver e interpretar situações-problema que envolvam fenômenos periódicos, utilizando as funções seno e cosseno.
- Identificar situações em que o uso da Lei dos Senos ou da Lei dos Cossenos é adequado, conforme os dados disponíveis.
- Compreender a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos como relações métricas válidas para triângulos quaisquer.
- Aplicar corretamente a Lei dos Senos para determinar lados ou ângulos desconhecidos em triângulos não retângulos.
- Aplicar a Lei dos Cossenos para calcular medidas de lados ou ângulos em triângulos quaisquer, reconhecendo sua relação com o Teorema de Pitágoras.
- Resolver e interpretar situações-problema que envolvam medidas indiretas, analisando a coerência dos resultados obtidos.

HABILIDADES DE ACORDO COM A BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR (BNCC)

(EM13MAT306) Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria.

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

HABILIDADES DE ACORDO COM A MATRIZ DE REFERÊNCIA DO ENEM

H15 – Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H17 – Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 – Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

H19 – Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 – Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 – Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 – Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.



TRIGONOMETRIA

Minecraft: Um jogo de construção e trigonometria!

O Minecraft é um jogo de *sandbox* que permite aos jogadores criar e explorar um mundo de blocos. Com uma mistura de criatividade e sobrevivência, os jogadores podem construir estruturas incríveis, desde casas simples até cidades inteiras.

O que você pode não saber é que o Minecraft é também um jogo de trigonometria. Ao construir estruturas complexas, os jogadores precisam usar conceitos de trigonometria para calcular ângulos, distâncias e alturas.

Figura. Paisagem de um mundo gerado no Minecraft.



Fonte: XBOX

- **Construção de estruturas inclinadas:** Ao criar telhados ou rampas, os jogadores precisam calcular os ângulos e inclinações para que tudo se encaixe perfeitamente;
- **Cálculo de distâncias:** Ao construir pontes ou torres, os jogadores precisam calcular as distâncias e alturas para que tudo se encaixe.
- **Criação de círculos e esferas:** Ao criar estruturas circulares ou esféricas, os jogadores precisam usar conceitos de trigonometria para calcular as coordenadas e criar a forma desejada.

Com a trigonometria, os jogadores podem criar estruturas mais precisas e complexas, tornando o jogo ainda mais desafiador e divertido.



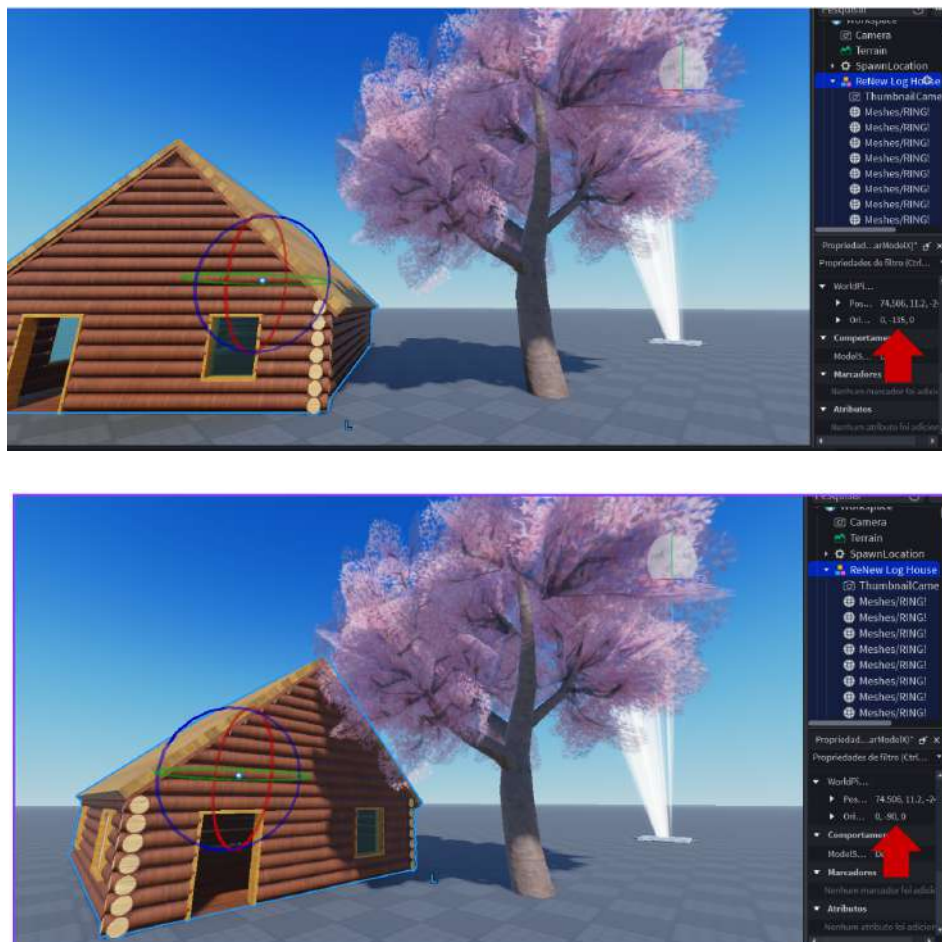
Mas não é só de sobrevivência que o jogo se trata. Minecraft é também sobre exploração e constante evolução. Com o avançar do jogo, é possível automatizar a coleta de praticamente todos os recursos e tornar cada vez menos necessárias tarefas que demandam muito tempo (como a mineração, o plantio, a colheita e a caça de monstros).” (MIRANDA, 2020).

Figura - o jogador se prepara para lançar uma *pérola do fim* no minecraft, a trigonometria é aplicada para encontrar *stronghold* (fortaleza)

Fonte: TIK TOK, 2025

No ROBLOX, os ângulos são fundamentais para criar experiências 3D incríveis. Por exemplo, imagina que você precisa rotacionar uma casa no jogo, no momento que você seleciona o objeto,

aparece três anéis coloridos e quando arrastamos um deles, a casa gira em torno daquele eixo. Como podemos observar nas figuras abaixo:



Veja que o valor indicado pela seta vermelha é o ângulo, que muda conforme a casa gira.

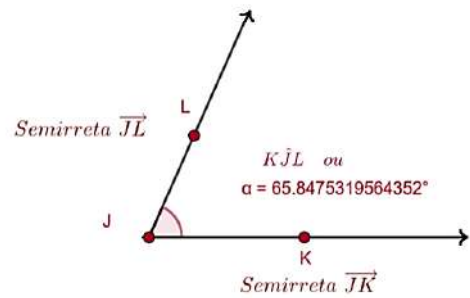
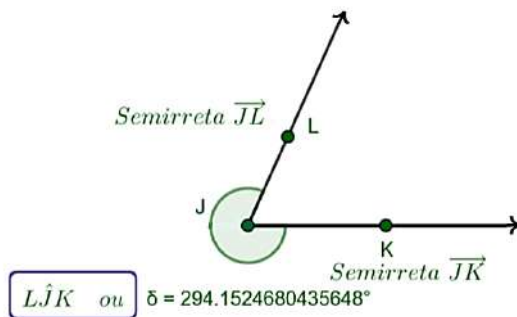
Os ângulos também são usados para criar movimentos de câmera suaves e realistas, fazer objetos girarem ou se inclinarem de forma natural e até criar efeitos de iluminação dinâmicos. No ROBLOX Studio, pode-se usar scripts para trabalhar com ângulos em graus ou radianos, permitindo criar movimentos precisos e interativos. É como ter uma ferramenta poderosa para dar vida ao seu mundo virtual.

PRÉ-REQUISITOS



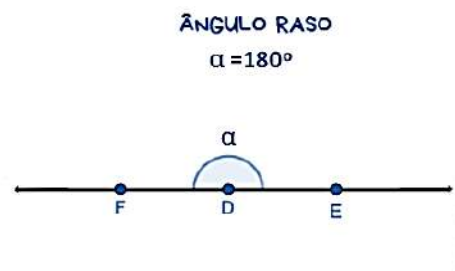
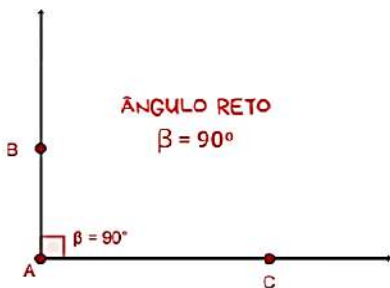
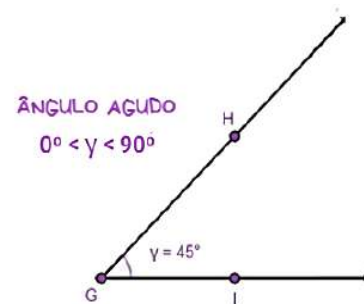
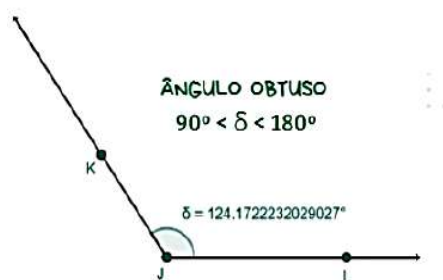
ÂNGULOS

Um ângulo é definido como a reunião de duas semirretas que possuem a mesma origem, desde que não estejam contidas na mesma reta. O ponto de origem comum é chamado de vértice e as semirretas são os lados do ângulo. A região do plano entre essas semi retas é o seu interior (região convexa), enquanto a parte externa é o seu exterior (região côncava). A medida de um ângulo é chamada de amplitude. A unidade principal é o grau ($^{\circ}$), que se divide em minutos (1° corresponde a $60'$) e em segundos ($1'$ corresponde a $60''$ e $1''$ corresponde a $60'''$). Há também o radiano (rad) como outra unidade de medida. O ângulo pode ser representado por letras gregas ou pelos pontos que compõem o ângulo.



Fonte: Elaborado no Geogebra

TIPOS DE ÂNGULOS



Ângulo de 360° ou ângulo de uma volta

Ângulo de 0° ou ângulo nulo

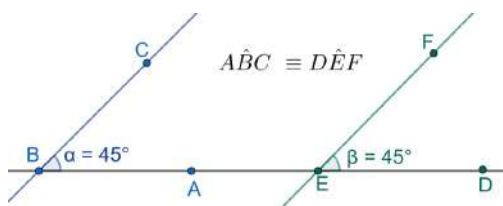


Fonte: Elaborado no Geogebra

Outras Classificações

Ângulos Congruentes

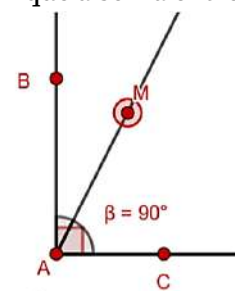
São ângulos que possuem a mesma medida.



Fonte: Elaborado no Geogebra

Ângulos Complementares

São ângulos em que a soma entre eles dá 90°.



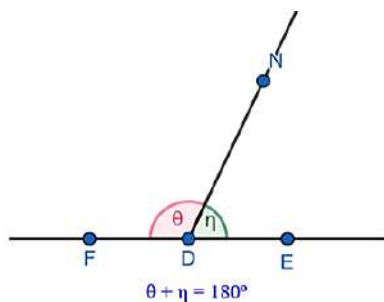
ÂNGULOS COMPLEMENTARES

$$M\hat{A}B + C\hat{A}M = \beta$$

Fonte: Elaborado no Geogebra

Ângulos Suplementares

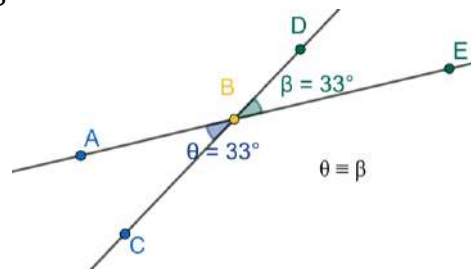
São ângulos em que a soma entre eles dá 180° .



Fonte: Elaborado no Geogebra

Ângulos Opostos Pelo Vértice

São pares de ângulos formados pelo cruzamento de duas retas, em direções opostas da interseção. Ângulos opostos pelo vértice são congruentes.



Fonte: Elaborado no Geogebra

Sentido Horário e anti-horário

• Sentido Anti-horário

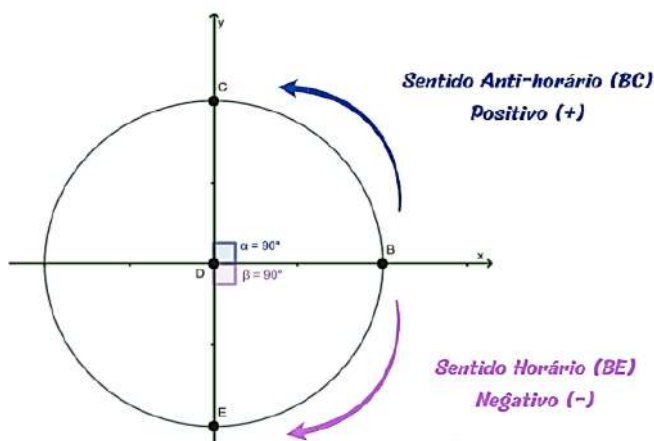
O sentido anti-horário é frequentemente adotado como o padrão para convenções matemáticas:

- **Ângulo de Inclinação:** A inclinação de uma reta no plano cartesiano é medida no **sentido anti-horário**, partindo do eixo Ox positivo até a reta em questão.
- **Numeração de Quadrantes:** Em um sistema de coordenadas cartesianas, os quatro **quadrantes** são **numerados no sentido anti-horário**, iniciando-se pelo quadrante onde as duas coordenadas (x e y) são positivas.

• Sentido Horário

O sentido horário é utilizado principalmente em contextos de navegação e problemas que simulam movimentos do mundo real:

- **Rotas e Conexões:** Questões de vestibular utilizam o sentido horário para definir direções de voos. Por exemplo, um avião pode seguir uma rota que forma um ângulo de 135° no sentido horário em relação a uma linha de referência (como a rota Brasília-Belém).



Fonte: Elaborado no Geogebra

Exemplos

1) Expresse $12,455^\circ$ em graus, minutos e segundos.

Resolução: Para realizar essa conversão, devemos isolar a parte inteira e transformar as frações sucessivamente:

Graus inteiros: A parte inteira é 12° .

Convertendo $0,455^\circ$ para minutos: Multiplicamos por 60 (pois $1^\circ = 60'$). $0,455 \times 60 = 27,3$ minutos. Temos, então, $27'$ inteiros.

Convertendo a fração de minuto para segundos: Multiplicamos a nova parte decimal por 60 (pois $1' = 60''$).

$0,3 \times 60 = 18$ segundos. Temos $18''$.

Logo, $12^\circ 27' 18''$

2) Simplifique a medida $30^\circ 70'$.

Resolução: "Retiremos" grupos de 60 das unidades menores para somar à unidade superior:

Sabemos que $60'$ formam 1° .

Subtraímos 60 de 70: $70' - 60' = 10'$.

O grupo de $60'$ retirado torna-se 1° e é somado aos 30° iniciais: $30^\circ + 1^\circ = 31^\circ$.

Logo, $31^\circ 10'$.

3) Se o complemento de um ângulo mede 35° , qual é a medida do suplemento desse mesmo ângulo?

Resolução: Se o complemento do ângulo é 35° , significa que o ângulo mais 35° é igual a 90° , ou seja:

$$x + 35^\circ = 90^\circ \rightarrow x = 90 - 35 \rightarrow x = 55^\circ$$

O valor do ângulo é 55° , então o seu suplementar é:

$$55^\circ + y = 180^\circ \rightarrow y = 180 - 55 \rightarrow y = 125^\circ$$

Logo, o suplementar do ângulo é 125° .

4) Uma porta está aberta formando um ângulo de 45° . Esse ângulo é agudo, reto, raso ou obtuso?



Fonte: Elaborado no Geogebra

Resolução:

Como o ângulo é menor que 90° e maior que 0° , logo se trata de um ângulo agudo.

5) Desafio do Mapa "Lava Obby"

Um desenvolvedor de jogos está utilizando o Roblox Studio para criar um mapa de obstáculos. Durante a construção, ele posicionou duas vigas de laser que se cruzam em um ponto comum, que chamaremos de vértice. Ao observar o cruzamento, ele notou que os lasers formam quatro ângulos.

a) Dois desses ângulos são opostos pelo vértice (o.p.v.). Se a medida de um deles é expressa por $(2x + 20)^\circ$ e a medida do seu oposto é 80° , determine o valor de x .

b) O desenvolvedor precisa criar uma terceira viga que seja adjacente e suplementar a um desses ângulos de 80° . Qual deve ser a medida desse novo ângulo?

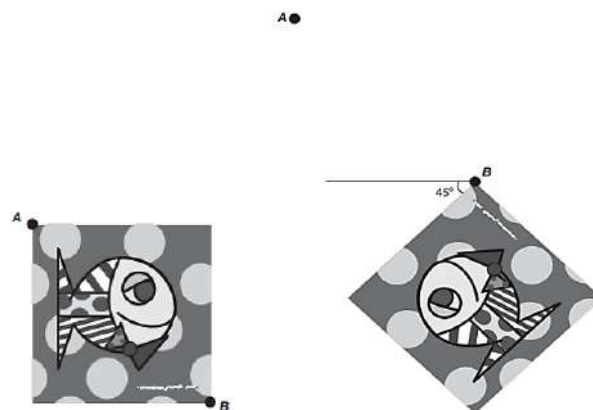
Resolução:

a) Ângulos opostos pelo vértice são sempre congruentes, então:

$$2x + 20^\circ = 80^\circ \rightarrow 2x = 80 - 20 \rightarrow 2x = 60 \rightarrow x = 60 / 2 \rightarrow x = 30$$

Logo, o valor de $x = 30^\circ$ b) Sabendo que ângulos suplementares a soma entre eles dá 180° , temos: $80^\circ + x = 180^\circ \rightarrow x = 180 - 80 \rightarrow x = 100$ Logo, o novo ângulo dessa viga será de 100° .

6) (ENEM 2017) A imagem apresentada na figura é uma cópia em preto e branco da tela quadrada intitulada O peixe, de Marcos Pinto, que foi colocada em uma parede para exposição e fixada nos pontos A e B. Por um problema na fixação de um dos pontos, a tela se desprende, girando rente à parede. Após o giro, ela ficou posicionada como ilustrado na figura, formando um ângulo de 45° com a linha do horizonte.

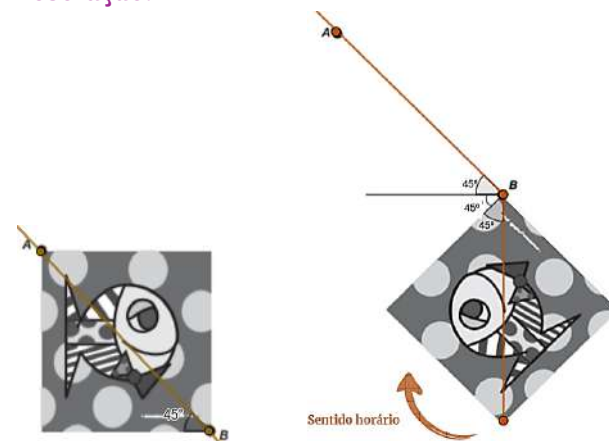


Para recolocar a tela na sua posição original, deve-se girá-la, rente à parede, no menor ângulo possível inferior a 360° .

A forma de recolocar a tela na posição original, obedecendo ao que foi estabelecido, é girando-a em um ângulo de:

- 90° no sentido horário.
- 135° no sentido horário.
- 180° no sentido anti-horário.
- 270° no sentido anti-horário
- 315° no sentido horário

Resolução:

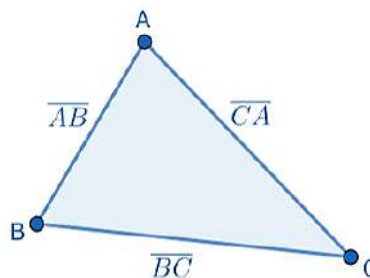


Fonte: Elaborado no Geogebra

Ao se desprender no ponto A, a tela realiza um giro de 135° ($45^\circ + 45^\circ + 45^\circ$) no sentido anti-horário. Assim, para recolocá-la na posição original, deve-se girá-la em um ângulo de medida 135° no sentido horário, ou girá-la em um ângulo de medida 225° ($360^\circ - 135^\circ$) no sentido anti-horário. Portanto, a menor medida de ângulo possível em que se deve girar a tela, para retornar à posição original, é de 135° no sentido horário.

TRIÂNGULOS

É uma figura geométrica elementar definida como a reunião de três segmentos de reta ($\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$) cujas extremidades são três pontos não colineares (A, B e C).

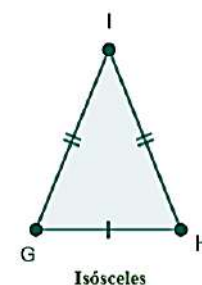
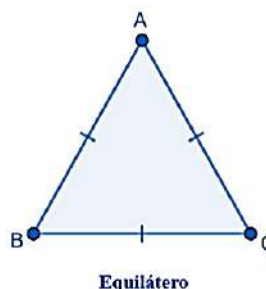
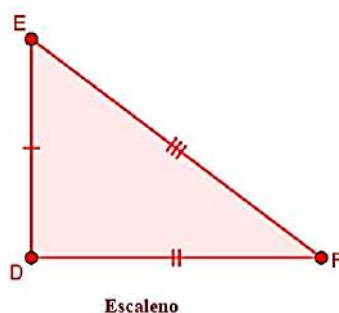


Fonte: Elaborado no Geogebra

Os triângulos são classificados sob dois critérios fundamentais que orientam o estudo de suas propriedades:

Classificação Quanto aos Lados

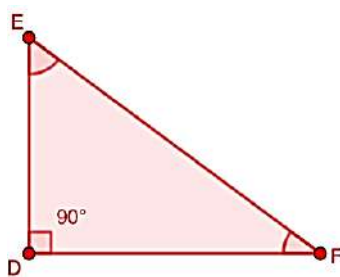
- **Equilátero:** Possui os três lados congruentes. Como propriedade adicional, temos que todo triângulo equilátero é também equiângulo, possuindo cada ângulo interno a medida de 60° ;
- **Isósceles:** Possui pelo menos dois lados congruentes. Um detalhe importante é que todo triângulo equilátero é, por definição, um triângulo isósceles; no entanto, caso o triângulo não seja equilátero, porém isósceles, o lado de medida diferente é chamado de base e o ângulo oposto a ele é o ângulo do vértice.
- **Escaleno:** É o triângulo em que dois quaisquer lados não são congruentes, ou seja, todos os três lados possuem medidas distintas entre si.



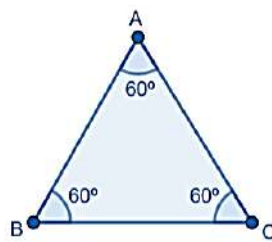
Fonte: Elaborado no Geogebra

Classificação quanto aos Ângulos

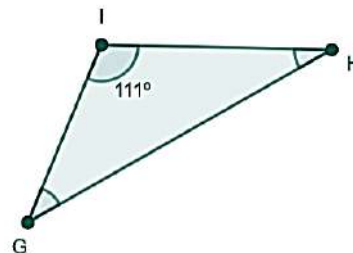
- **Retângulo:** Possui um ângulo reto 90° . O lado oposto ao ângulo reto é a hipotenusa, e os outros dois lados que o formam são os catetos;
- **Acutângulo:** Possui os três ângulos internos agudos (maiores que 0° e menores que 90°);
- **Obtusângulo:** Possui um ângulo interno obtuso (maiores que 90° e menores que 180°).



Retângulo



Acutângulo

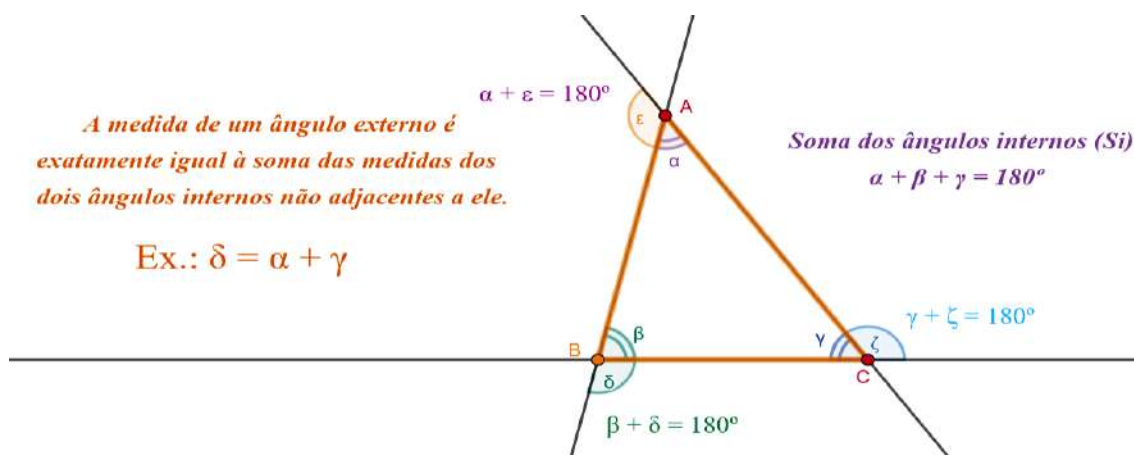


Obtusângulo

Fonte: Elaborado no Geogebra

Propriedades dos Triângulos

- A soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180° . O teorema do ângulo externo afirma que um ângulo externo é igual à soma dos dois internos não adjacentes a ele;
- **Desigualdade Triangular:** A soma de quaisquer dois lados é sempre maior que o terceiro lado;
- **Relação Lado-ângulo:** O maior lado é sempre oposto ao maior ângulo, e o menor lado ao menor ângulo.



Fonte: Elaborado no Geogebra

Exemplos.

1) Dois ângulos de um triângulo medem 30° e 60° . Qual é o tipo do terceiro ângulo?

Quanto mede o ângulo x desse triângulo?

a) 30° b) 60° c) 90° d) 120° e) 180°

Resolução:

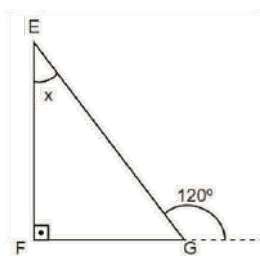
Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , então:

$$30^\circ + 60^\circ + x = 180^\circ \rightarrow 90 + x = 180$$

$$\rightarrow x = 180 - 90 \rightarrow x = 90^\circ$$

Logo, o terceiro ângulo é reto.

2)

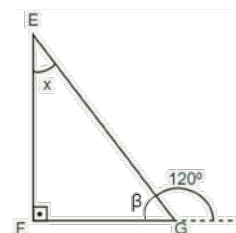


Resolução:

Para resolvermos esse tipo de questão, precisamos lembrar que:

- ➔ Ângulos suplementares a soma entre eles sempre dá 180° ;
- ➔ A soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° ;

A partir disso, temos:



$$120^\circ + \beta = 180^\circ \rightarrow \beta = 180 - 120 \rightarrow \beta = 60^\circ$$

Logo:

$$x + 90^\circ + \beta = 180^\circ \rightarrow x + 90 + 60 = 180$$

$$\rightarrow x + 150 = 180$$

$$\rightarrow x = 180 - 150 \rightarrow x = 30^\circ$$

Portanto, o valor de x é 30° .

3) Um designer de interiores deseja criar uma estante de parede usando três ripas de madeira que sobraram de uma obra. As ripas medem **40 cm, 70 cm e 110 cm**. Ao tentar montar um suporte triangular para a estante, o designer percebeu que não conseguia fechar a forma. Com base na **Desigualdade Triangular**, explique por que o designer não conseguiu formar o triângulo e qual seria o ajuste mínimo necessário na maior ripa para que o triângulo fosse possível?

Resolução:

Pela desigualdade triangular: a soma das medidas de dois lados de um triângulo é maior que o terceiro lado ($b + c > a$). Como podemos notar: $40 + 70 = 110$, logo, " a " precisa ser menor que 110 cm. O designer não consegue criar a estante, pois a propriedade de desigualdade triangular não permite que essas ripas forme um triângulo. Para construir essa estante, ele deverá reduzir o tamanho da ripa maior (ex: 109,9 cm).

4) De acordo com a condição de existência de um triângulo, quais dos seguintes conjuntos de

medidas de lados permitiriam a construção de um triângulo?

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| a) 10 cm, 5 cm e 4 cm | d) 7 cm, 7 cm e 14 cm |
| b) 8 cm, 15 cm e 20 cm | e) 1 cm, 2 cm e 3 cm |
| c) 2 cm, 3 cm e 6 cm | |

Resolução:

Como já vimos, para se obter um triângulo deve-se obedecer a desigualdade triangular, então:

→ A soma da medida de dois lados deve ser maior que a medida do terceiro lado.

Nessa perspectiva, a única alternativa que atende a propriedade é a letra B.

5) Se um triângulo possui dois ângulos internos medindo 45° e 60° , qual deve ser a medida do terceiro ângulo interno?

- | | | |
|----------------|----------------|---------------|
| a) 90° | c) 75° | e) 80° |
| b) 255° | d) 105° | |

Resolução:

Para resolver, precisamos lembrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° , por isso:

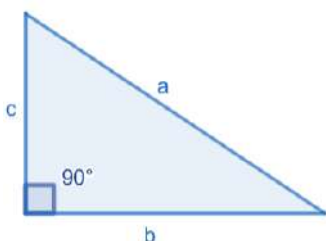
$$45^\circ + 60^\circ + x = 180^\circ \rightarrow 105 + x = 180 \rightarrow x = 180$$

$$-105$$

$$\rightarrow x = 75^\circ$$

Portanto, o terceiro ângulo interno é 75°

TEOREMA DE PITÁGORAS



Teorema de Pitágoras

$$\text{hipotenusa}^2 = \text{cateto}^2 + \text{cateto}^2$$

Considerado a relação métrica mais importante, o **Teorema de Pitágoras** enuncia que "**a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa**". Além disso, o **recíproco do teorema** é uma ferramenta de classificação: se o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois, o triângulo é obrigatoriamente retângulo.



Hipotenusa: Tem origem no grego *hypo-* (abaixo) e *teinein* (alongar). Seus cognatos latinos são *sub* (abaixo) e *tendere* (esticar), que combinados formam a palavra *subtender*. Um cognato nativo do inglês vindo da mesma raiz é o adjetivo *thin* (fino), que descreve um objeto que foi esticado. Geometricamente, a hipotenusa é o lado que "se estende" de um cateto ao outro.

Cateto: Deriva do latim *cathetus*, que por sua vez vem do grego *káthetos*, significando "(linha) perpendicular" ou "caem perpendicularmente". Na geometria, os catetos são definidos como cada um dos dois lados de um triângulo retângulo que são perpendiculares entre si.

Na trigonometria, o teorema é a base da **Relação Fundamental** ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$), vinculando as razões trigonométricas à métrica das áreas no círculo unitário.

Ternos Pitagóricos (Números Inteiros)

Se a , b e c números inteiros positivos com $c < b < a$ dizemos que (c, b, a) é um terço pitagórico se $a^2 = b^2 + c^2$. Assim, $(3, 4, 5)$ e $(5, 12, 13)$ são exemplos de ternos pitagóricos.

Exemplos.

1) Um registro histórico descreve um caso em que, se um retângulo tem um comprimento de 4 unidades e uma diagonal (hipotenusa) de 5 unidades, qual é a sua altura?

Resolução:

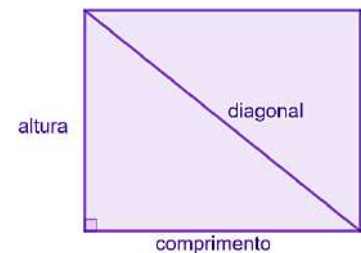
De acordo com o teorema de Pitágoras, temos:

$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto})^2 + (\text{cateto})^2$$

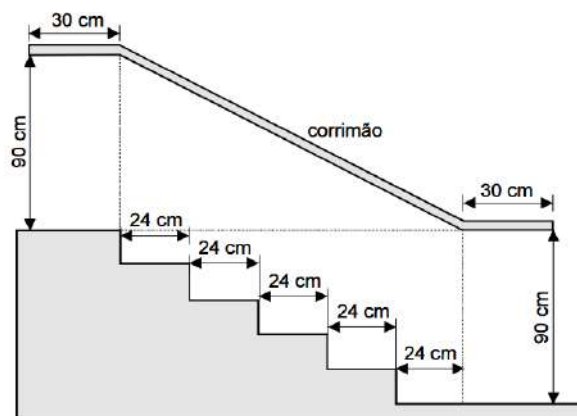
$$5^2 = 4^2 + (\text{altura})^2 \rightarrow 25 = 16 + (\text{altura})^2 \rightarrow 25 - 16 = (\text{altura})^2$$

$$\rightarrow 9 = (\text{altura})^2 \rightarrow \sqrt{9} = \sqrt{(\text{altura})^2} \rightarrow 3 = \text{altura}.$$

Portanto, a altura do retângulo será de 3 unidades.



2) (ENEM 2006)



Na figura acima, que representa o projeto de uma escada com 5 degraus de mesma altura, o comprimento total do corrimão é igual a:

- a) 1,8 m c) 2,0 m e) 2,2 m
b) 1,9 m d) 2,1 m

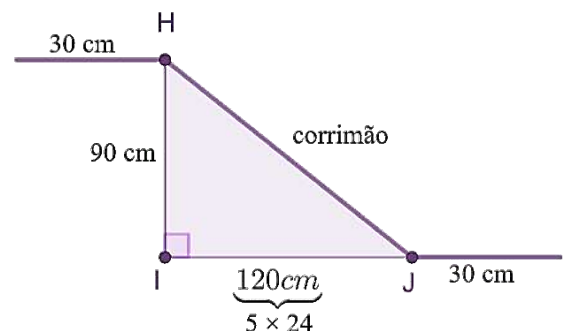
Resolução:

Temos: $\underline{HI} = 90 \text{ cm}$, $\underline{IJ} = 120 \text{ cm}$ (5×24) e $\underline{JH}$.

Usando o Teorema de Pitágoras, podemos resolver assim:

$$\underline{JH}^2 = \underline{IJ}^2 + \underline{HI}^2 \rightarrow \underline{JH}^2 = 90^2 + 120^2 \rightarrow \underline{JH}^2 = 8100 + 14400$$

$$\rightarrow \underline{JH}^2 = 22500 \rightarrow \sqrt{\underline{JH}^2} = \sqrt{22500} \rightarrow \underline{JH} = 150.$$



Para saber o tamanho do corrimão, precisamos adicionar aos 150 cm que achamos os 60 cm restantes (30 cm + 30 cm):

Corrimão = $150 + 60 = 210 \text{ cm}$. Como a resposta está em metros, vamos converter de centímetros para metros, basta dividirmos por 100: $210 \div 100 = 2,1 \text{ m}$.

Portanto, o comprimento total do corrimão é 2,1 m.

3) (BPW - Adaptada). A figura ao lado mostra um portão feito com barras de ferro. Para garantir sua rigidez, foi colocada uma barra de apoio. Qual é a medida dessa barra de apoio?

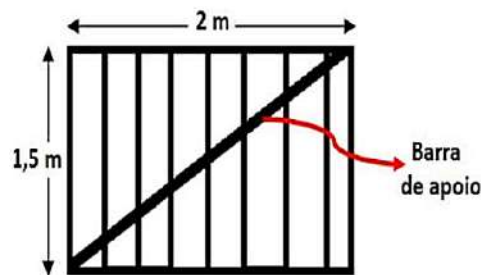
Resolução:

Usaremos o Teorema de Pitágoras para resolver esse problema, então:

$$(\text{barra de apoio})^2 = (1,5)^2 + 2^2 \rightarrow (\text{barra de apoio})^2 = 2,25 + 4 \rightarrow (\text{barra de apoio})^2 = 6,25 \rightarrow$$

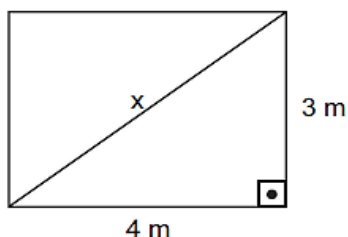
$$\rightarrow \sqrt{(\text{barra de apoio})^2} = \sqrt{6,25} \rightarrow \text{barra de apoio} = 2,5.$$

Portanto, a barra de apoio terá o comprimento de 2,5 metros.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS

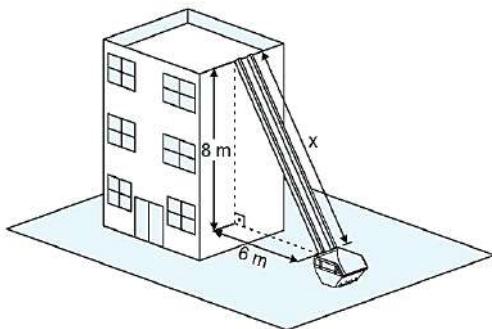
01. (PAEBES) Um serralheiro confeccionou um portão no formato retangular com medidas de comprimento e altura indicadas no desenho abaixo. Para uma melhor sustentação desse portão, uma viga de aço foi colocada na diagonal desse portão.



Qual é a medida do comprimento x da viga desse portão?

- a) $\sqrt{7}$ m b) 5 m c) 7 m d) $\frac{\sqrt{25}}{2}$ m

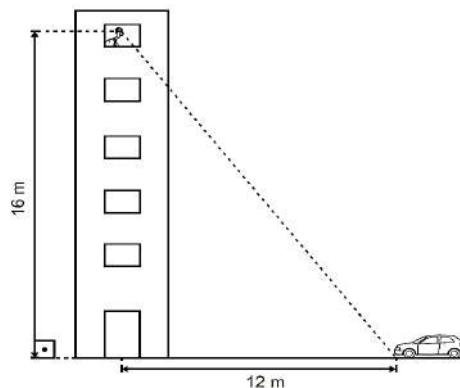
02. (SAEPI) Durante a reforma de uma cobertura, a empreiteira responsável instalou uma rampa de madeira para depositar o entulho da obra diretamente na caçamba, conforme ilustra o desenho abaixo.



Qual é a medida x do comprimento da madeira utilizada para construção dessa rampa?

- a) 10 m b) 14 m c) 50 m c) 100 m

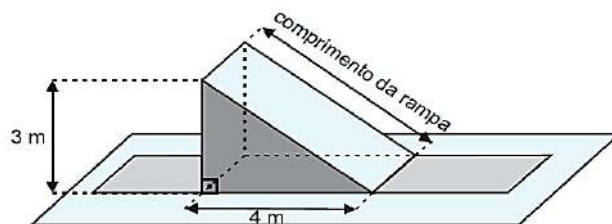
03. (SAEPB) Um observador, da janela de um edifício, avista um carro parado a 12 metros de distância da entrada da portaria do seu prédio, conforme ilustrado no desenho abaixo.



Considerando essa rua plana, a distância, em metros, entre o carro e observador, nesse momento, é

- a) 20. b) 28. c) 96. d) 400.

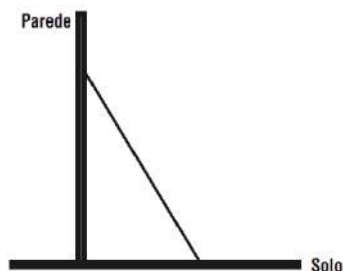
04. (SAEGO) Observe abaixo o esquema de uma rampa inflável para um parque infantil. Essa rampa possui o formato de um prisma reto de base triangular.



De acordo com esse desenho, qual é a medida do comprimento dessa rampa inflável?

- a) 5 m b) 7 m c) 14 m d) 25 m

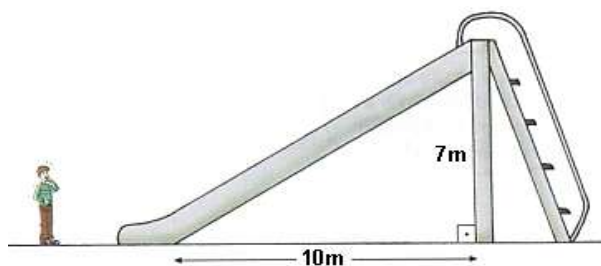
05. Observe a figura abaixo que representa uma escada apoiada em uma parede que forma um ângulo reto com o solo. O topo da escada está a 7 m de altura, e seu pé está afastado da parede 2 m.



A escada mede, aproximadamente,

- a) 5 m. b) 6,7 m. c) 7,3 m. d) 9 m.

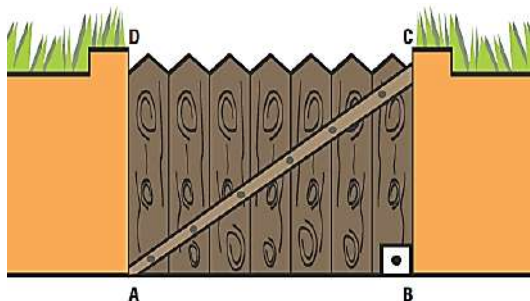
06. Décio viu um grande escorregador no parque de diversões e ficou curioso para saber o seu comprimento.



De acordo com as informações da figura acima, o comprimento do escorregador é, aproximadamente

- a) 17 m. b) 3 m. b) 12,2 m b) 10,5 m.

07. O portão de entrada da casa do Sr. Antônio tem 4 m de comprimento e 3 m de altura.

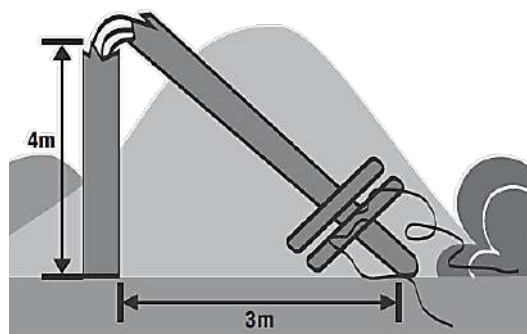


Diante disso, o comprimento da trave de madeira que se estende de A até o ponto C é

- a) 5 m. b) 7 m. c) 6 m. d) 1 m.

08. Em um recente vendaval, um poste de luz quebrou-se à 4 m de distância do solo. A parte do poste acima da fratura inclinou-se e sua

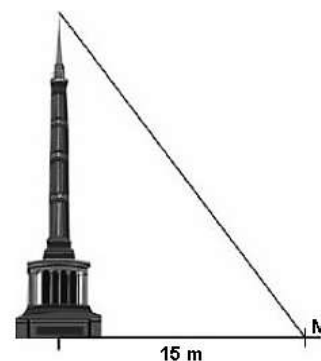
extremidade superior encostou no solo a uma distância de 3 m da base do mesmo.



Logo, a parte que inclinou no solo é

- a) 4 m. b) 5 m. c) 7 m. d) 8 m.

09. Uma torre tem 20 m de altura e uma pomba voou em linha reta do seu topo até o ponto M. A distância do centro da base do monumento até o ponto M é igual a 15 m, como mostra a ilustração abaixo.



A distância percorrida por essa pomba, em metros, é igual a

- a) 15. b) 20. c) 25. c) 35.

10. Um portão retangular precisa de uma nova ripa de madeira para sua sustentação. Na figura ao lado, estão registradas suas medidas em metros.

A medida da ripa a ser trocada está indicada por x. A medida x da ripa a ser trocada deve ser

- a) 5 metros.

- c) 3 metros.

- b) $4\sqrt{2}$ metros.

- d) $3\sqrt{3}$ metros.



GABARITO

Q.01: B, Q.02: A, Q.03: A, Q.04: A, Q.05: C, Q.06: C, Q.07: A, Q.08: B, Q.09: C, Q.10: A.

CONSTRUINDO CONCEITOS



CONTEXTO HISTÓRICO

Antiguidade (Babilônios/Egípcios - ~1900 a.C.)

Uso de tabelas para relações entre ângulos, principalmente para astronomia e construção.



Período Grego (Hiparco e Ptolomeu)

Hiparco de Niceia desenvolveu a "tabela de cordas". Ptolomeu, em sua obra *Almagesto*, avançou a trigonometria esférica, essencial para astronomia.



Índia e Mundo Islâmico (Séculos V-X d.C.)

Matemáticos indianos (como Aryabhata) introduziram o conceito de *jya* (meia-corda), que evoluiu para o *sinus*. Árabes introduziram o cosseno, tangente e cotangente.



Renascimento e Era Moderna

- No século XV, Regiomontanus separou a trigonometria da astronomia.
- Em 1595, Bartholomaeus Pitiscus publicou "Trigonometria", oficializando o nome do campo.
- No século XVIII, Leonhard Euler formalizou a trigonometria analítica, definindo as funções trigonométricas como razões numéricas, não mais apenas comprimentos geométricos.



Atualidades

Hoje, a trigonometria é fundamental para física, engenharia, música, engenharia, computação gráfica, entre outros.



Origem da Palavra Trigonometria

A palavra trigonometria vem do grego (*tri* + *gonos* + *metron*, que significa *três* + *ângulos* + *medida*) e nos remete ao estudo das medidas dos lados, ângulos e outros elementos dos triângulos. Historicamente, a Trigonometria liga-se à Astronomia, tendo em vista a dificuldade natural que esta apresenta com relação ao cálculo de distâncias impossíveis de serem medidas diretamente. Atribuem-se os primeiros métodos de cálculo dessas distâncias a Hiparco, astrônomo grego que viveu no século II a. C. e é considerado o "pai da Trigonometria". Cláudio Ptolomeu (c. 100 – 170 d.C.) também teve influência na trigonometria, "*Almagesto*", por mil anos, foi base para a astronomia e trigonometria. Mas foi somente no século XVIII que o matemático suíço Leonhard Euler conseguiu desvincular a Trigonometria da Astronomia, dando àquela o caráter de ramo independente na Matemática.

Fonte: Elaborado no Canva

Trigonometria é o ramo da matemática dedicado à medição de ângulos e lados de triângulos. Embora sua forma analítica moderna tenha se consolidado a partir do século XVII, o termo em seu sentido literal possui origens que remontam ao segundo ou terceiro milênio antes de Cristo.

A trigonometria é estruturada e ensinada em três níveis de profundidade:

1. Trigonometria no Triângulo Retângulo

Este é o estágio inicial, onde o componente foca nas razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) fundamentadas na semelhança de triângulos e no Teorema de Pitágoras ($a^2 = b^2 + c^2$).

2. Trigonometria na Circunferência

Neste nível, introduz-se o ciclo trigonométrico (circunferência de raio unitário) e a unidade de medida radiano (arco cujo comprimento é igual ao raio). Aqui, as razões trigonométricas são estendidas para arcos de qualquer quadrante, estabelecendo a relação fundamental ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$). Também são estudadas as leis para triângulos quaisquer (que não possuem ângulo reto), conhecidas como Lei dos Senos e Lei dos Cossenos.

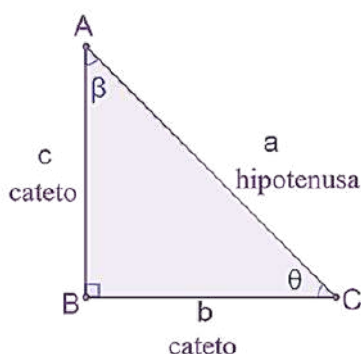
3. Funções Trigonômétricas (Funções Circulares)

A trigonometria evolui para a análise matemática, tratando o seno, cosseno e outras razões como funções de variáveis reais. Matemáticos como Leonhard Euler foram fundamentais nesta transição, definindo o seno não mais como um segmento de reta físico, mas como um número puro e uma relação funcional.

TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Cateto Oposto, Cateto Adjacente e Hipotenusa

No triângulo retângulo, os lados passam a ter novas características, de acordo com o ângulo a ser utilizado. Observe o triângulo ABC:



Fonte: Elaborado no Geogebra

- ❖ segmento $\underline{AC}$ é a hipotenusa;
- ❖ segmento $\underline{AB}$ é oposto a θ e segmento $\underline{BC}$ é oposto a β ;
- ❖ segmento $\underline{AB}$ é adjacente a β e segmento $\underline{BC}$ é adjacente a θ .

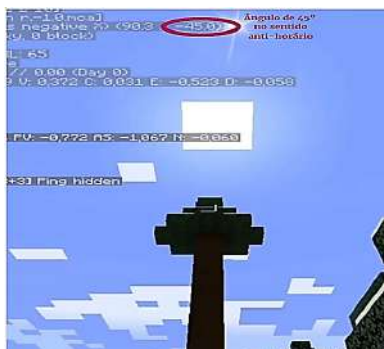
Observações:

- ❖ A hipotenusa é o maior lado (ou seja, é o lado oposto ao ângulo maior, no caso, oposto a 90°);
- ❖ O cateto é oposto quando este está diretamente à frente ao ângulo de referência;
- ❖ O cateto é adjacente quando este é um dos segmentos que compõem o ângulo de referência;
- ❖ Os ângulos de referência são aqueles que contêm a hipotenusa lado do próprio ângulo.

Seno, Cosseno e Tangente de um Ângulo Agudo

Como já mencionamos, Minecraft é um jogo que trabalha com a matemática de várias maneiras. Uma delas é a aplicação da trigonometria, que ajuda a localizar fortalezas ou a determinar a altura de alguma coisa.

Por curiosidade, um jogador quer saber qual é a altura da árvore existente em uma *village* (vila), ou seja, quantos blocos ela tem. Para isso, o jogador posiciona o personagem na base da árvore e move-o até que o ângulo mostrado na parte superior seja de 45° . Feito isso, ele conta quantos blocos há entre a árvore e o personagem (neste caso são 27 blocos). Ao traçar as retas, temos um triângulo com um ângulo de 90° (triângulo retângulo).



Fonte: Matemática em Foco, 2025

Para calcular a altura dessa árvore, o jogador utiliza a razão trigonométrica tangente de 45°, que é igual a 1, e a distância entre a árvore e o personagem. Então temos:

$$tg \theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

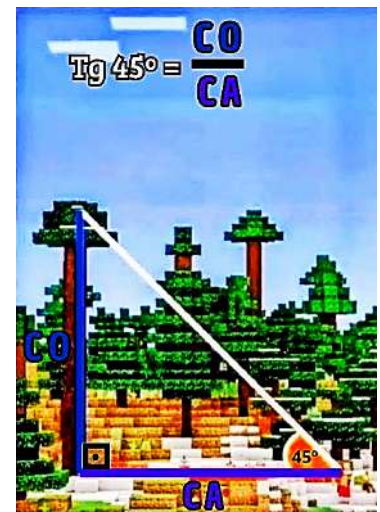
$$tg 45^\circ = \frac{\text{altura}}{\text{distância entre árvore e personagem}}$$

Substituindo os valores e usando a regra de três simples, temos:

$$1 = \frac{\text{altura}}{27} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{\text{altura}}{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{altura} \times 1 = 1 \times 27 \Rightarrow \text{altura} = 27$$

Portanto, a árvore possui 27 blocos.



Fonte: Matemática em Foco

- **SENO ou SINUS (sin):** é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de referência e a medida da hipotenusa;

$$\sin \beta = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \beta}{\text{medida da hipotenusa}}$$

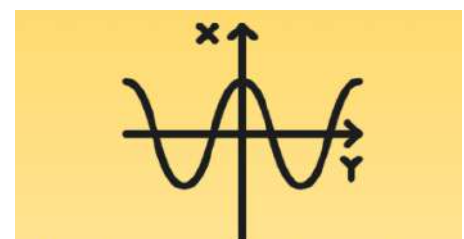
- **COSSENO (cos):** é a razão entre a medida do cateto adjacente ao ângulo de referência e a medida da hipotenusa;

$$\cos \beta = \frac{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \beta}{\text{medida da hipotenusa}}$$

- **TANGENTE (tg):** é a razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo de referência e a medida do cateto adjacente ao mesmo ângulo.

$$tg \beta = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo } \beta}{\text{medida do cateto adjacente ao ângulo } \beta}$$

Neste material, usaremos **sin** para indicar o seno, de acordo com a padronização Internacional, tendo em vista que as linguagens de programação, calculadora e outros utilizam essa simbologia.



A palavra cosseno tem origem no latim *complementi sinus* (**seno do complemento**), abreviada para *cosinus* no século XVII por Edmund Gunter, indicando o seno do ângulo complementar ($90^\circ - x$). O termo evoluiu de traduções árabes de conceitos indianos, onde o seno era "*jiba*" (**corda**), evoluindo para *sinus* e depois adicionando o prefixo *co-* (**complemento**).

Exemplo.

1) Para consertar um telhado, o pedreiro Pedro colocou uma escada de 8 metros de comprimento numa parede, formando com ela um ângulo de 60° .

Sabendo que: $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$ e $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

A altura da parede que o pedreiro apoiou a escada é

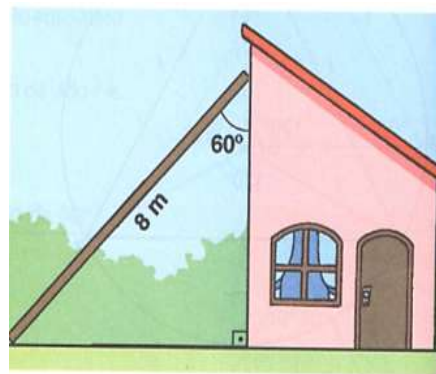
a) 5 m.

b) $4\sqrt{3}$ m.

c) 8 m.

d) $8\sqrt{3}$ m.

e) 4 m.



Solução:

Para resolvermos essa situação, precisamos verificar quais informações temos.

1ª) O tamanho da escada (8m): para a nossa resolução, ela será a nossa hipotenusa, por estar oposta ao ângulo de 90° formado pela parede da casa e o solo;

2ª) O ângulo de referência (60°): podemos observar que temos dois ângulos, mas o ângulo que vai ser referência é o agudo e não o reto (90°);

3ª) A razão trigonométrica que será utilizada ($\cos 60^\circ$): se temos hipotenusa (comprimento da escada) e queremos encontrar a altura da parede (cateto adjacente a 60°), então a razão a ser utilizada é o cosseno.

Feito isso, vamos substituir os valores (o cateto adjacente será x e o $\cos 60$ será $\frac{1}{2}$, de acordo com a questão):

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{8}$$

Utilizando a regra de três simples, temos:

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{8} \Rightarrow 2x = 8 \xrightarrow{\div 2} \frac{2x}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow x = 4$$

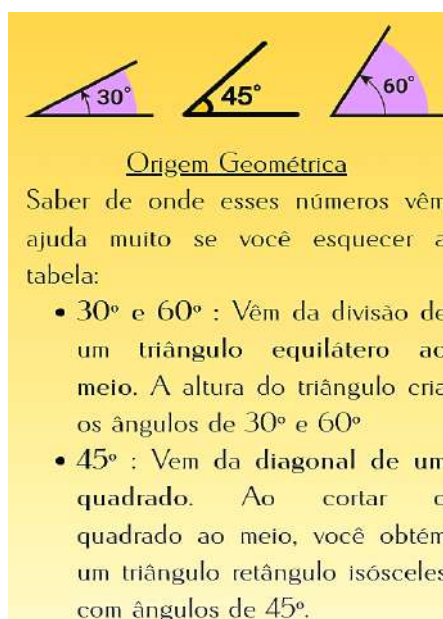
Logo, a altura da parede será de 4 metros.

Ângulos Notáveis

São ângulos que aparecem frequentemente em situações relacionadas às razões trigonométricas. São eles os ângulos de 30° , 45° e 60° . Nesses casos, geralmente conhecemos os valores do seno, do cosseno e da tangente, que estão disponíveis na tabela dos ângulos notáveis. Esses ângulos são muito úteis para facilitar a resolução de problemas de trigonometria.

Seno, cosseno e tangente de 30° e 60°

Considere triângulo $\triangle ABC$, no qual l é a medida dos lados e h é a bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ e, também, a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ (isto significa que h é perpendicular $\overline{BC}$, formando um ângulo de 90°), como podemos ver na figura a seguir.

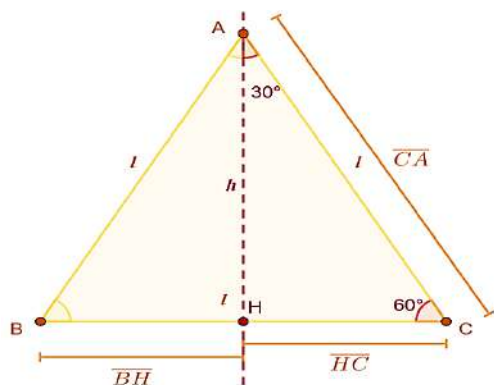


Origem Geométrica

Saber de onde esses números vêm ajuda muito se você esquecer a tabela:

- 30° e 60° : Vêm da divisão de um triângulo equilátero ao meio. A altura do triângulo cria os ângulos de 30° e 60° .
- 45° : Vem da diagonal de um quadrado. Ao cortar o quadrado ao meio, você obtém um triângulo retângulo isósceles com ângulos de 45° .

Fonte: Elaborado no Canva



Como o triângulo $\triangle ABC$ é equilátero, temos que $\overline{AB} \equiv \overline{CA} \equiv \overline{BC} = l$, além disso $\overline{AH}$ é a altura h , então $\overline{BH} \equiv \overline{HC} = \frac{l}{2}$. Assim, o triângulo $\triangle AHC$ será um triângulo retângulo. Podemos, então, aplicar o Teorema de Pitágoras para achar o valor de h :

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow l^2 = h^2 + \frac{l^2}{4} \Rightarrow l^2 - \frac{l^2}{4} = h^2 \Rightarrow \frac{4l^2 - l^2}{4} = h^2 \Rightarrow \frac{3l^2}{4} = h^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{3l^2}{4}} = \sqrt{h^2} \Rightarrow \frac{l\sqrt{3}}{2} = h$$

Portanto, a altura h é igual a $\frac{l\sqrt{3}}{2}$.

A partir disso, temos as seguintes razões:

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \times \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \frac{l}{2} \times \frac{2}{l\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\frac{l}{2}}{l} = \frac{l}{2} \times \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} = \frac{l\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{l} = \sqrt{3}$$

Racionalização de Denominadores

Quando houver uma raiz irracional no denominador de uma fração, opta-se por racionalizar este denominador: é multiplicado tanto o numerador quanto o denominador da fração por um fator racionalizante (em alguns casos, esse fator é a própria raiz).

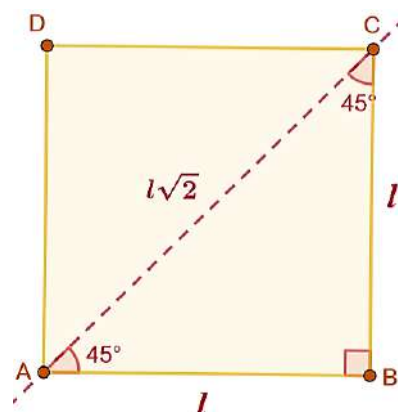


Seno, cosseno e tangente de 45°

Considerando um triângulo retângulo e isósceles $\triangle ABC$, conforme a figura a seguir, no qual l é a medida dos catetos e $l\sqrt{2}$ é a medida da hipotenusa, que pode ser determinada pelo Teorema de Pitágoras.

Com base nesse triângulo, obtemos as seguintes razões:

$$\sin 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



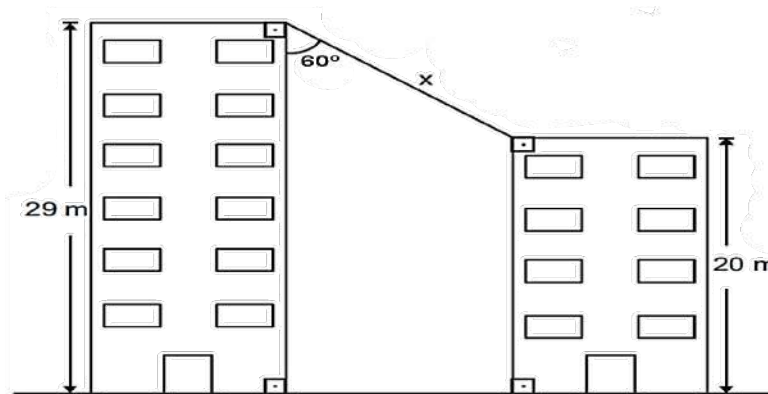
$$\cos 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{l}{l} = 1$$

Organizando os ângulos e as razões, temos a seguinte tabela:

		Ângulos		
		30°	45°	60°
Razão	sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
	cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
	tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Exemplo. (PAEBES- Adaptada). Um telhado será instalado entre dois prédios de um condomínio, de forma que sua inclinação em relação ao prédio maior será de 60°, conforme representado no desenho abaixo.



Qual será o comprimento x desse telhado?

Solução:

Observando a figura, temos as seguintes informações:

- A diferença entre as alturas dos prédios é de 9 m que corresponde ao cateto adjacente de 60°;
- O comprimento desse telhado corresponde à hipotenusa.

A razão trigonométrica que usa cateto adjacente e hipotenusa é o cosseno, então temos:

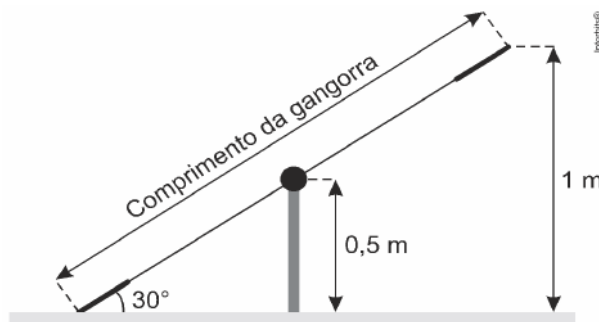
$$\cos 60^\circ = \frac{9}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{9}{x}$$

Usando a regra de três simples, temos:

$$\frac{1}{2} = \frac{9}{x} \Rightarrow 1 \cdot x = 9 \cdot 2 \Rightarrow x = 18$$

Portanto, o comprimento do telhado é de 18 metros.

Exemplo. (Encceja 2020) Uma gangorra deve ser construída apoiando-a pelo ponto médio num suporte central de 0,5 metro de altura. Seus assentos, situados em suas extremidades, devem atingir no máximo 1 metro de altura e, ao tocar o solo, formar com este um ângulo de 30°, qualquer que seja o lado da gangorra a tocar o solo.



Para que os assentos não ultrapassem a altura máxima estabelecida, o comprimento da gangorra, em metro, deve ser

- a) 0,50. b) 1,00. c) 1,15. d) 2,00.

Solução: Alternativa [D]

A gangorra deve ter um comprimento de:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{C} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{C} \therefore C = 2 \text{ m}$$

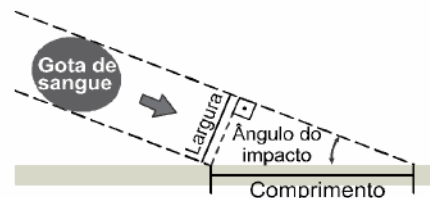
Exemplo. (Unesp 2020) Uma das finalidades da Ciência Forense é auxiliar nas investigações relativas à justiça civil ou criminal. Observe uma ideia que pode ser empregada na análise de uma cena de crime.

Uma gota de sangue que cai perfeitamente na vertical, formando um ângulo de 90° com a horizontal, deixa uma mancha redonda. À medida que o ângulo de impacto com a horizontal diminui, a mancha fica cada vez mais longa.

As ilustrações mostram o alongamento da gota de sangue e a relação trigonométrica envolvendo o ângulo de impacto e suas dimensões.

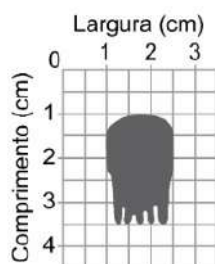


Relação trigonométrica



(Ana Paula Sebastiany et al. "A utilização da Ciência Forense e da Investigação Criminal como estratégia didática na compreensão de conceitos científicos". *Didática de la Química*, 2013. Adaptado.)

Considere a coleta de uma amostra de gota de sangue e a tabela trigonométrica apresentada a seguir.



α	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\text{tg } \alpha$
31°	0,51	0,85	0,60
37°	0,60	0,80	0,75
53°	0,80	0,60	1,32
59°	0,85	0,51	1,66
74°	0,96	0,28	3,50

De acordo com as informações, o ângulo de impacto da gota de sangue coletada na amostra foi de

- a) 37° b) 74° c) 59° d) 53° e) 31°

Solução: Alternativa [A]

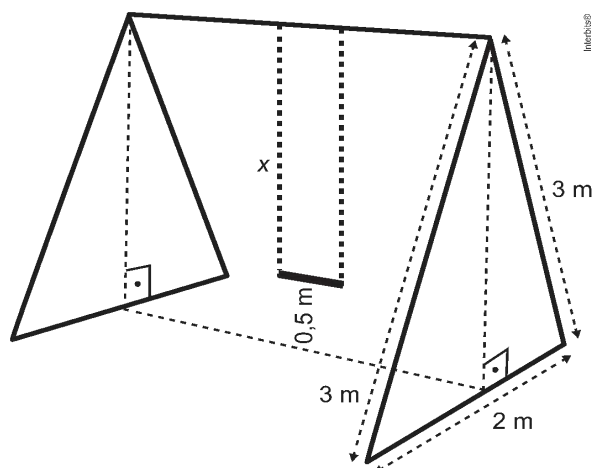
Desde que o seno do ângulo de impacto, ∞ é dado pela razão entre a largura e o comprimento da gota de sangue, temos

$$\text{sen } \alpha = \frac{1,5}{2,5} = 0,6.$$

Portanto, da tabela, segue que $\infty \cong 37^\circ$.

Exemplo.

(Enem PPL 2021) Um brinquedo muito comum em parques de diversões é o balanço. O assento de um balanço fica a uma altura de meio metro do chão, quando não está em uso. Cada uma das correntes que o sustenta tem medida do comprimento, em metro, indicada por x . A estrutura do balanço é feita com barras de ferro, nas dimensões, em metro, conforme a figura.



Nessas condições, o valor, em metro, de x é igual a

- a) $\sqrt{2} - 0,5$ b) 1,5 c) $\sqrt{8} - 0,5$ d) $\sqrt{10} - 0,5$ e) $\sqrt{8}$

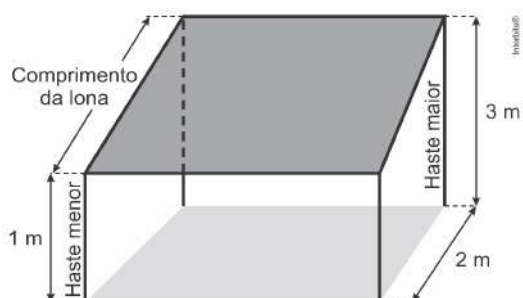
Solução: Alternativa [C]

Como o triângulo de lados 3 m, 3 m e 2 m é isósceles, tem-se que

$$(x + 0,5)^2 = 3^2 - 1^2 \Rightarrow x = (\sqrt{8} - 0,5) \text{ m.}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Questão 01. (Encceja 2020) O dono de um restaurante deseja instalar um toldo para cobrir uma região plana retangular de seu estabelecimento. Esse toldo consiste numa lona, apoiada por quatro hastes perpendiculares ao chão: duas com 3 m e duas com 1 m cada. A distância entre uma haste menor e uma maior é igual a 2 m, conforme ilustrado na figura.



O fabricante escolhido por ele apresenta quatro possibilidades de comprimento de lona, listadas no quadro.

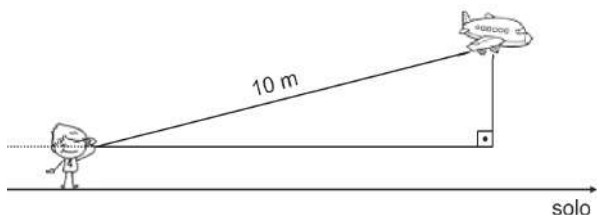
Tipo	Comprimento (m)
I	2,30
II	2,90
III	3,20
IV	3,70

O dono do restaurante decide comprar a lona de menor comprimento que seja capaz de atender suas necessidades.

A lona que ele comprará é a do tipo

- a) I. b) II. c) III. d) IV.

Questão 02. (G1 - ifpe 2019) Analise a figura a seguir e responda o que é solicitado.



Um avião está voando paralelamente ao solo conforme demonstrado na figura. Marcelinho, cuja distância dos olhos até o solo é de 1,5 m, avista o avião com um ângulo de visão de 30° . Nesse momento, a distância do avião ao solo é igual a

- a) $6,5\sqrt{3}$ m. d) 6,5 m.
b) 5 m. e) 11,5 m.
c) $5\sqrt{3}$.

06. (G1 - ifpe 2019)

Cama com Escorregador de Madeira Maciça na Cor Castanho Exclusivo.



Disponível em: <<https://www.megamobilia.com.br/cama-com-escorregador-madeira-macica-na-cor-castanho-exclusivo-p5242/>>. Acesso em: 10 maio 2019.

A imagem mostra uma cama com escorregador acoplado. Sabendo que o escorregador tem 1,10 metros de altura e que sua inclinação, em relação ao plano horizontal, é de 32° o comprimento desse escorregador (parte por onde se escorrega), em metros, é, aproximadamente,

Dados: $\sin 32^\circ = 0,53$; $\cos 32^\circ = 0,85$ e $\tan 32^\circ = 0,62$.

- a) 0,935. d) 0,583.
b) 1,294. e) 2,075.
c) 1,774.

Questão 03. (G1 - cotil 2019) A acessibilidade urbana é um tema que merece atenção,

especialmente quando as cidades crescem sem que haja planejamento de ações que garantam o bem-estar, a segurança e a autonomia no uso de equipamentos urbanos por pessoas com algum tipo de limitação, seja ela de mobilidade, idade ou percepção. Assim, para a construção de uma rampa de acesso, calculando-se sua inclinação, usa-se a seguinte expressão matemática:

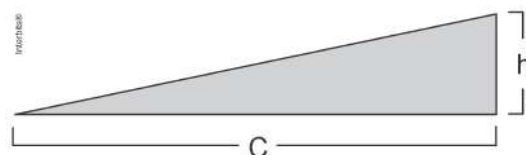
$$i = \frac{h \times 100}{C},$$

em que:

i é a inclinação da rampa em porcentagem;

h é a altura do desnível;

C é o comprimento da projeção horizontal.

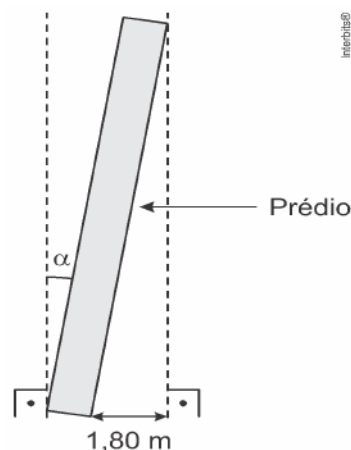


Qual é o ângulo formado em uma rampa que possui 100% de inclinação?

- a) 180° b) 90° c) 60° d) 45°

Questão 04. (Enem (Libras) 2017) A famosa Torre de Pisa, localizada na Itália, assim como muitos outros prédios, por motivos adversos, sofrem inclinações durante ou após suas construções.

Um prédio, quando construído, dispunha-se verticalmente e tinha 60 metros de altura. Ele sofreu uma inclinação de um ângulo α e a projeção ortogonal de sua fachada lateral sobre o solo tem largura medindo 1,80 metro, conforme mostra a figura.



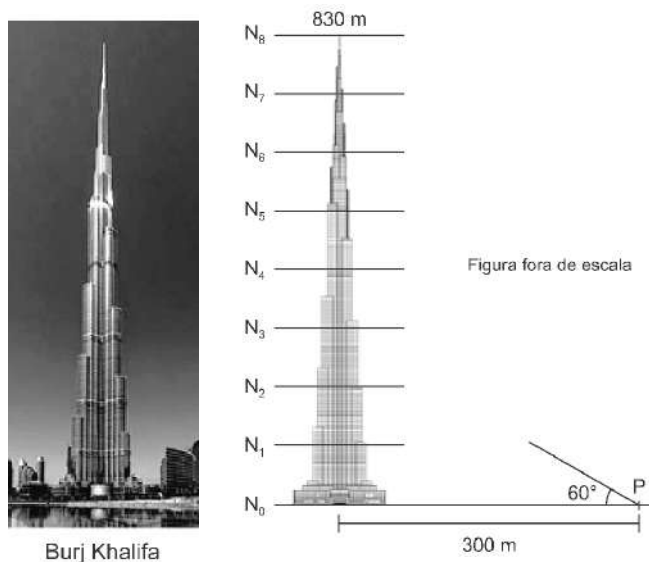
O valor do ângulo de inclinação pode ser determinado fazendo-se o uso de uma tabela como a apresentada.

Ângulo $\propto$ (Grau)	Seno
0,0	0,0
1,0	0,017
1,5	0,026
1,8	0,031
2,0	0,034
3,0	0,052

Uma estimativa para o ângulo de inclinação ∞ , quando dado em grau, é tal que

- a) $0 \leq \infty < 1,0$
2,0
- b) $1,0 \leq \infty < 1,5$
- c) $1,5 \leq \infty < 1,8$
- d) $1,8 \leq \infty < 2,0$
- e) $2,0 \leq \infty < 3,0$

Questão 05. (Puccamp 2017) Burj Khalifa, localizado em Dubai, é considerado o edifício mais alto do mundo, com cerca de 830 m. A figura ao lado da fotografia representa a extensão vertical desse edifício altíssimo, dividida em 8 níveis igualmente espaçados.



Dado: adote $\sqrt{3} = 1,73$ em suas contas finais.

Utilizando os dados fornecidos, um feixe de laser emitido a partir do ponto indicado na figura por P atingiria a coluna central do Burj Khalifa, aproximadamente, na marca

- a) N_5 . c) N_7 . e) N_3 .
b) N_6 . d) N_4 .

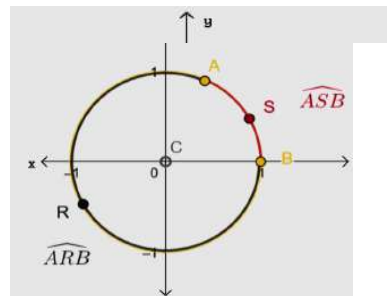
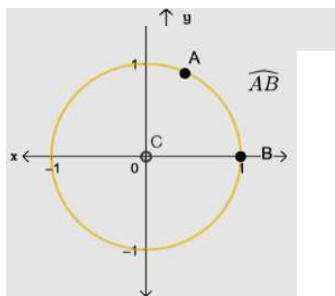
GABARITO

Q.01: D, Q.02: E, Q.03: D, Q.04: C, Q.05: A.

TRIGONOMETRIA NA CIRCUNFERÊNCIA

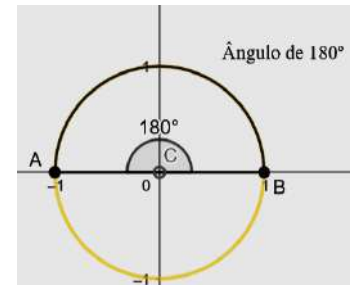
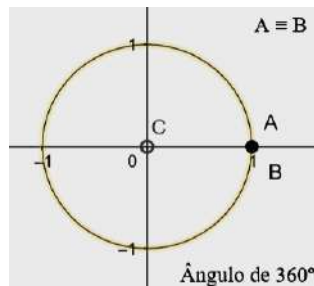
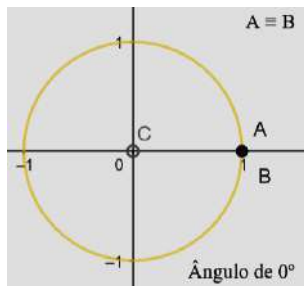
Arcos de Circunferência

Os pontos A e B determinam dois arcos de circunferência que podem ser indicados por $\hat{AB}$. Quando não ficar evidente a qual arco estamos nos referindo, podemos inserir um ponto entre as extremidades A e B e utilizar a notação $\hat{ARB}$ ou $\hat{ASB}$ para identificar cada arco.



Fonte: Elaborado no Geogebra

Se as extremidades A e B coincidem, um dos arcos fica reduzido a um ponto e o outro é a própria circunferência. Eles são chamados, respectivamente, de arco nulo (ângulo de 0°) e de arco de uma volta (ângulo de 360°). Esse valor atribuído a esses ângulos é referente à medida do ângulo central (composto por os dois pontos e o centro da circunferência. Ex.: $\hat{ACB}$ e $\hat{BCA}$). Quando as extremidades se encontram nas pontas de um diâmetro, temos duas semi circunferências ou arcos de meia-volta. Nesse caso, o ângulo será de 180° ($\hat{BCA}$).



Fonte: Elaborado no Geogebra

Radiano

Um radiano é a medida de um ângulo central de uma circunferência que corresponde a um arco cujo comprimento é igual ao raio dessa mesma circunferência.

Relação Entre Grau e Radiano

Seja r o raio de uma circunferência e seu comprimento igual a $2\pi r$, temos: $2 \times \pi \cong 6,28 \rightarrow r$ cabe 6,28 vezes dentro do comprimento da circunferência, sendo que um arco de comprimento igual a r corresponde a 1 rad, então o arco de comprimento $2\pi r$ (ou seja, toda a circunferência) corresponde a um ângulo central de 2π radianos. Portanto, 2π rad é igual a 360° .

Diante disso, podemos fazer a conversão de qualquer grau para radianos e vice-versa.

Exemplo:

1) Faça a conversão de grau para radianos dos seguintes ângulos.

- a) 90° b) 45° c) 180° d) 270°

Resolução:

a) Para fazer a conversão basta usar a regra de três simples, usando a relação $2\pi = 360^\circ$:

$$\begin{array}{r} 2\pi - 360^\circ \\ x - 90^\circ \end{array}$$

$$360 \cdot x = 90 \cdot 2\pi \quad \rightarrow \quad 360x = 180\pi$$

$$\rightarrow x = \frac{180\pi \div 180}{360 \div 180} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2}$$

b) Mais uma vez, usando a regra de três, temos:

$$\begin{array}{r} 2\pi - 360^\circ \\ x - 45^\circ \end{array}$$

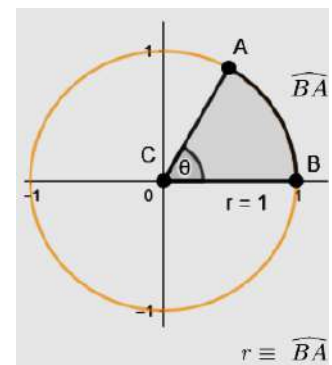
$$360 \cdot x = 45 \cdot 2\pi \quad \rightarrow \quad 360x = 90\pi$$

$$\rightarrow x = \frac{90\pi \div 90}{360 \div 90} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4}$$

c) Análoga as alternativas anteriores, temos:

$$\begin{array}{r} 2\pi - 360^\circ \\ x - 180^\circ \end{array}$$

$$360 \cdot x = 180 \cdot 2\pi \rightarrow 360x = 360\pi$$



Fonte: Elaborado no Canva

Você viu no fundamental que o comprimento de uma circunferência é calculado pela fórmula $C = 2\pi r$



$$\rightarrow x = \frac{360 \pi}{360} \rightarrow x = \pi$$

$$\rightarrow x = \frac{540 \pi \div 180}{360 \div 180}$$

d) Análoga as alternativas anteriores, temos:

$$2\pi - 360^\circ$$

$$x - 270^\circ$$

$$360 \cdot x = 270 \cdot 2\pi \rightarrow 360 x = 540 \pi$$

$$\rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$

Medida De Um Arco De Circunferência

Já sabemos que 2π rad equivalem a 360° , e com essa informação podemos transformar qualquer ângulo em graus para radianos. Além disso, podemos calcular o comprimento de um arco usando essa relação, então, temos:

Graus ($^\circ$) — Radianos (rad) — Comprimento da circunferência (ℓ)

$$360^\circ - 2\pi \text{ rad} - 2\pi r$$

$$360^\circ - 2\pi r$$

$$\theta - \ell$$

De acordo com a regra de três, temos:

- em graus,

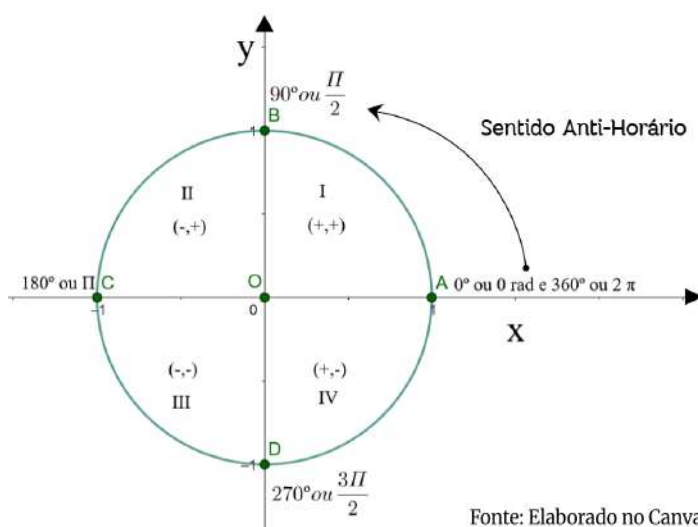
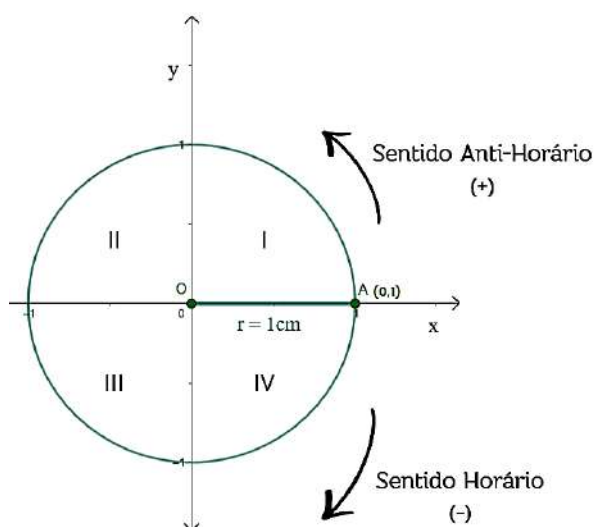
$$360 \cdot \ell = \theta \cdot 2\pi r \Leftrightarrow \ell = \frac{\theta \cdot 2\pi r}{360} \Leftrightarrow \ell = \frac{\theta \cdot \pi r}{180} \Leftrightarrow \ell = \frac{\theta}{180} \cdot \pi r$$

- em radianos,

$$2\pi \text{ rad} \cdot \ell = \theta \cdot 2\pi r \Leftrightarrow \ell = \frac{\theta \cdot 2\pi r}{2\pi \text{ rad}} \Leftrightarrow \ell = \theta \cdot r$$

Circunferência trigonométrica

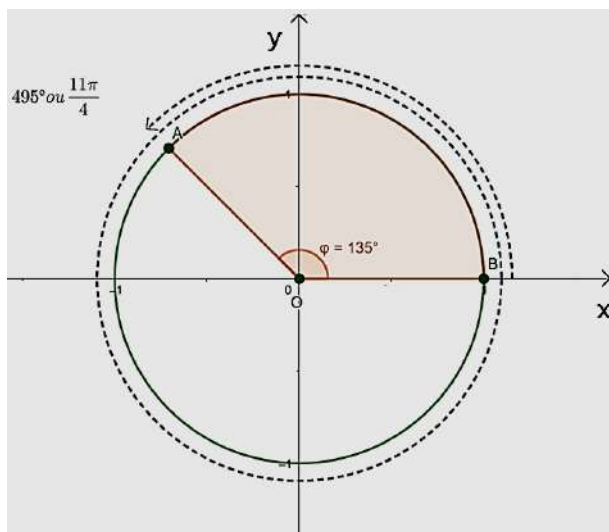
Para entender a circunferência trigonométrica, imaginamos uma circunferência com centro em O e raio igual a um. Colocamos, também, um sistema de eixos cartesianos de modo que o ponto O coincida com a origem desse sistema. Isso faz com que a circunferência se divida em quatro partes que chamamos de quadrante.



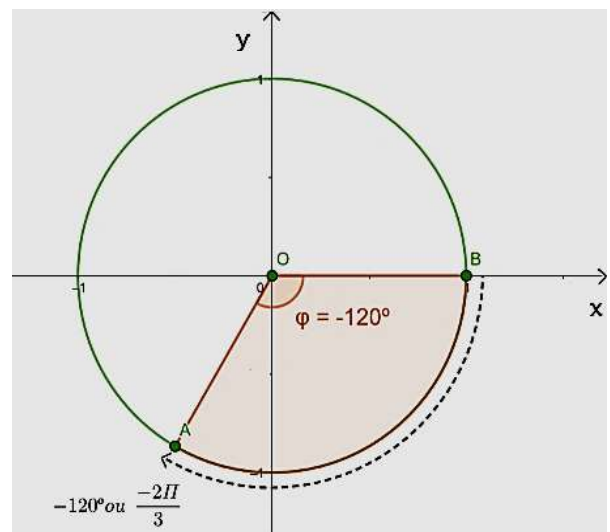
Fonte: Elaborado no Canva

No ciclo trigonométrico temos também arcos negativos e arcos maiores que 360° .

a) $\varphi = 495^\circ = 360^\circ + 135^\circ$



b) $\varphi = -120^\circ$



Fonte: Elaborado no Geogebra

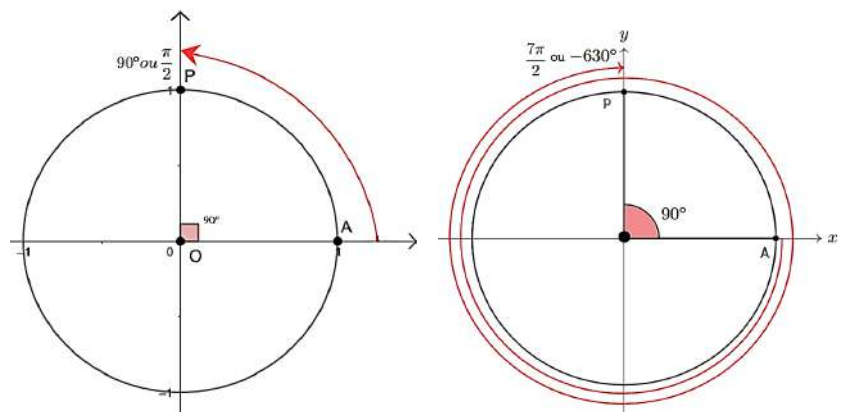
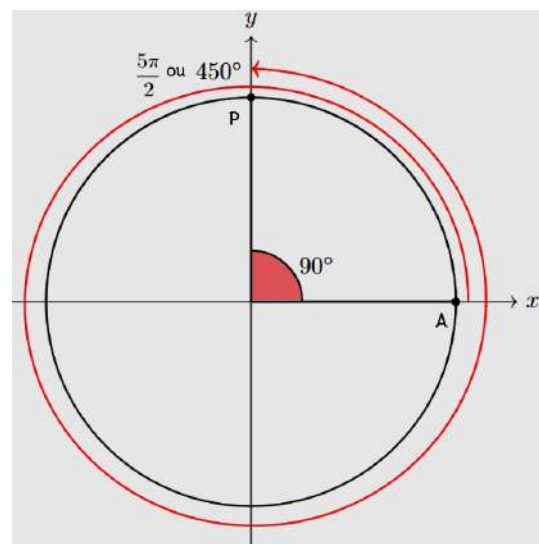
Arcos Côngruos

Vamos imaginar um ponto P no ciclo trigonométrico. É interessante notar que existe uma quantidade infinita de arcos que começam em A e terminam em P . Para entender isso, basta pensar que, a partir de P , podemos fazer voltas completas ao redor da circunferência, isto é, percorrer arcos cuja medida seja múltipla de 2π , seja no sentido horário ou anti-horário. Veremos como localizar o ângulo de 450° .

Podemos decompor o 450° , levando em consideração que uma volta completa é 360° , temos: $450^\circ = 360^\circ + 90^\circ$.

Agora, observe estes dois arcos, eles têm a mesma extremidade que o arco anterior, sendo que o ciclo de arco -630° faz a volta no sentido horário.

Nos três, os arcos têm a mesma extremidade P . Nesse caso, dizemos que esses arcos são côngruos.



Fonte: Elaborado no canva

Diante disso, temos:

Em um ciclo trigonométrico, quando dois ou mais arcos têm a mesma origem e extremidade,

dizemos que eles são côngruos entre si. Portanto, se um arco $\hat{AP}$ de medida β , com $0^\circ \leq \beta \leq 360^\circ$ ou $0 \leq \beta \leq 2\pi$, as medidas dos arcos côngruos a $\hat{AP}$ podem ser escritos da seguinte forma: $\beta + k \times 360^\circ$ ou $\beta + K \times 2\pi$, sendo k um número inteiro.

O arco $\hat{AP}$ de medida β é a primeira determinação positiva dos arcos côngruos a ele.

Quando temos um arco côngruo e não sabemos qual é a 1ª determinação, podemos dividir a medida do arco por 360° .

$$\begin{array}{r|l} -630 & 360 \\ \hline 360 & -1 \\ \hline -270 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \text{o quociente indica o número de voltas que esse arco dá.}$$

↓

O resto é o arco. Mas, nesse caso que ele se apresenta como um número negativo, esse valor não é a 1ª determinação (é quanto o arco ainda percorre depois de completar uma volta no sentido horário).

Exemplo. Imagine uma roda-gigante moderna instalada em um parque de diversões, como a Roda Rico em São Paulo. Para fins de cálculo, a roda-gigante é modelada como um ciclo trigonométrico, onde o centro da roda coincide com a origem do sistema de eixos cartesianos e o raio é unitário ($r=1$). O ponto de embarque dos passageiros localiza-se na origem dos arcos, o ponto A (1,0). O sentido positivo do movimento é o anti-horário.

- 1) Um passageiro entrou na roda-gigante e, devido a um teste de manutenção, a roda realizou um giro total de 1690° no sentido anti-horário. **Quantas voltas completas** a roda-gigante deu e qual é a **primeira determinação positiva** desse arco?
- 2) Após o percurso de 1690° , em qual **quadrante** do ciclo trigonométrico a cabine do passageiro parou? Justifique.
- 3) Se um segundo teste fizesse a roda girar $\frac{35\pi}{2}$ radianos, qual seria a primeira determinação positiva deste arco em radianos e a quantos graus ela corresponderia?

Resolução:

1) Para determinar o número de voltas e a posição final, dividimos a medida total do arco por 360° .

$$\begin{array}{r|l} 1690 & 360 \\ \hline -1450 & 4 \\ \hline 250 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \text{voltas}$$

↓

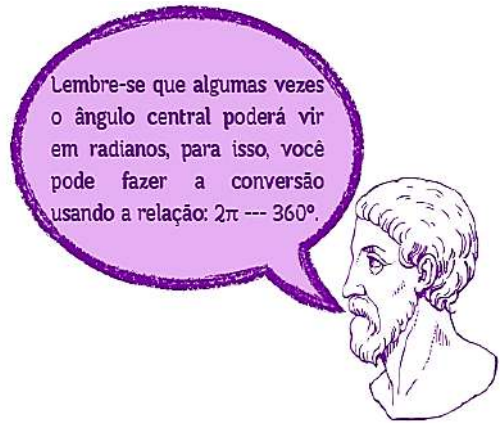
é a primeira determinação positiva

Logo, a roda gigante deu 4 voltas e parou no correspondente a 250° .

2) O ciclo trigonométrico é dividido em quatro quadrantes. Para localizar 250° , analisamos os intervalos:

1º Quadrante: $0^\circ < x < 90^\circ$
2º Quadrante: $90^\circ < x < 180^\circ$

3º Quadrante: $180^\circ < x < 270^\circ$
4º Quadrante: $270^\circ < x < 360^\circ$



Como 250° está entre 180° e 270° , então o passageiro parou no **terceiro quadrante**.

3) Primeiramente, precisamos descobrir qual a 1ª determinação positiva, para isso, podemos decompor essa fração:

$$\frac{35\pi}{2} = \frac{32\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 16\pi + \frac{3\pi}{2}, \text{ ou seja, a 1ª determinação é } \frac{3\pi}{2}.$$

Feito isso, agora é só lembrar da relação $2\pi \text{ ---- } 360^\circ$:

$$\begin{array}{ccc} 2\pi \text{ ---- } 360^\circ & \xrightarrow{\quad} & 2\pi \cdot x = \frac{3\pi}{2} \cdot 360 \\ \frac{3\pi}{2} \text{ ---- } x & & 2\pi \cdot x = \frac{1080\pi}{2} \end{array} \quad \xrightarrow{\quad} \quad \begin{array}{l} \frac{2\pi \cdot x}{2\pi} = \frac{540\pi}{2\pi} \\ x = 270^\circ \end{array}$$

Portanto, a 1ª determinação é $\frac{3\pi}{2}$ ou 270° .

Exemplo. (Ueg 2016) Na competição de *skate* a rampa em forma de U tem o nome de *vert*, onde os atletas fazem diversas manobras radicais. Cada uma dessas manobras recebe um nome distinto de acordo com o total de giros realizados pelo skatista e pelo *skate*, uma delas é a “180 *allie frontside*”, que consiste num giro de meia volta. Sabendo-se que 540° e 900° são côngruos a 180° .

Um atleta que faz as manobras 540 *Mc Tuist* e 900 realizou giros completos de

- a) 1,5 e 2,5 voltas respectivamente.
- b) 0,5 e 2,5 voltas respectivamente.
- c) 1,5 e 3,0 voltas respectivamente.
- d) 3,0 e 5,0 voltas respectivamente.
- e) 1,5 e 4,0 voltas respectivamente.

Solução: Alternativa [A]

$$540^\circ : 360^\circ = 1,5 \text{ voltas}$$

$$900^\circ : 360^\circ = 2,5 \text{ voltas}$$

Exemplo. (Unesp 2019) Os pontos P e Q sobre a superfície da Terra possuem as seguintes coordenadas geográficas:

	Latitude	Longitude
P	30° N	45° L
Q	30° N	15° O

Considerando a Terra uma esfera de raio $r = 6.300 \text{ km}$ a medida do menor arco $\widehat{PQ}$ sobre a linha do paralelo 30° N é igual a

- a) $1.150\pi\sqrt{3} \text{ km}$
- b) $1.250\pi\sqrt{3} \text{ km}$
- c) $1.050\pi\sqrt{3} \text{ km}$
- d) $1.320\pi\sqrt{3} \text{ km}$
- e) $1.350\pi\sqrt{3} \text{ km}$

Solução: Alternativa [C]

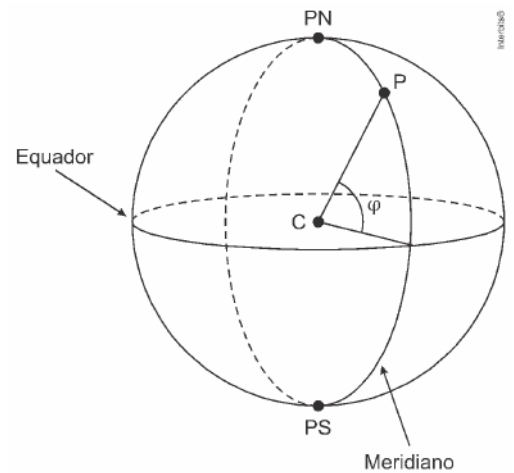
Seja r o raio da circunferência de centro C correspondente à latitude 30° N . Logo, temos

$$\cos 30^\circ = \frac{r}{6300} \Leftrightarrow r = 3150\sqrt{3} \text{ km}.$$

Portanto, sendo $\widehat{PCQ} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$, vem

$$\widehat{PQ} = \frac{\pi}{3} \cdot 3150\sqrt{3} = 1050\pi\sqrt{3} \text{ km}.$$

Um meridiano é uma circunferência sobre a superfície da Terra que passa pelos pólos Norte e Sul, representados na figura por PN e PS . O comprimento da semicircunferência que une os pontos PN e PS tem comprimento igual a 20 016 km. A linha do Equador também é uma circunferência sobre a superfície da Terra, com raio igual ao da Terra, sendo que o plano que a contém é perpendicular ao que contém qualquer meridiano.



Suponha que a partir da linha do Equador um navio viaja subindo em direção ao Pólo Norte, percorrendo um meridiano, até um ponto P com 30 graus de latitude.

a) 1 668 b) 3 336 c) 5 004
d) 6 672 e) 10 008

Sendo $\frac{30^\circ}{180^\circ} = \frac{1}{6}$, podemos concluir que a resposta é $\frac{20016}{6} = 3336$ km.

Para uma pessoa ir do ponto P ao ponto Q andando pela circunferência interna no sentido anti-horário, ela percorrerá uma distância, em quilômetro, igual a

- a) $0,009\pi$ b) $0,03\pi$ c) $0,06\pi$ d) $0,12\pi$ e) $0,18\pi$

Desde que $\widehat{P\hat{R}Q}$ é inscrito, podemos concluir que o menor arco $\widehat{PQ}$ corresponde a $\underline{a} \frac{2\pi}{5}\text{rad}$. Portanto, a resposta é igual a $\frac{2\pi}{5} \cdot 0,3 = 0,12\pi\text{km}$.

63

- a) 150°. b) 115°. c) 75°. d) 40°. e) 35°.

Solução: Alternativa [B]

O ângulo percorrido pelo ponteiro das horas em 30 minutos corresponde a $\frac{30}{2} = 15^\circ$. Logo, como o ângulo entre as posições 3 e 6 corresponde a $3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$, podemos concluir que o ângulo às 15 h 30min é $90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$.

De modo inteiramente análogo, para o horário de 18 h 40min, temos $60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$.

A resposta é $75^\circ + 40^\circ = 115^\circ$.

Associando ângulos centrais e arcos no ciclo trigonométrico

A relação entre ângulos centrais e os pontos no ciclo trigonométrico se baseia na ideia de que cada arco da circunferência com origem A(1,0) e extremidade em P tem medida numericamente igual ao seu ângulo central. Essa ideia ajuda a entender como podemos associar qualquer valor real a um arco, em radiano, no ciclo trigonométrico.

Vamos, agora, associar um número real m a um único arco $\widehat{AP}$ da circunferência trigonométrica, dado que:

- O ponto A (1,0) esteja associado ao número $m = 0$;
- um número real m seja associado a um arco $\widehat{AP}$, tal que o comprimento seja igual a $|m|$;
- se $m > 0$, o arco $\widehat{AP}$ será determinado sobre o ciclo no sentido anti-horário;
- se $m < 0$, o arco $\widehat{AP}$ será definido no sentido horário.

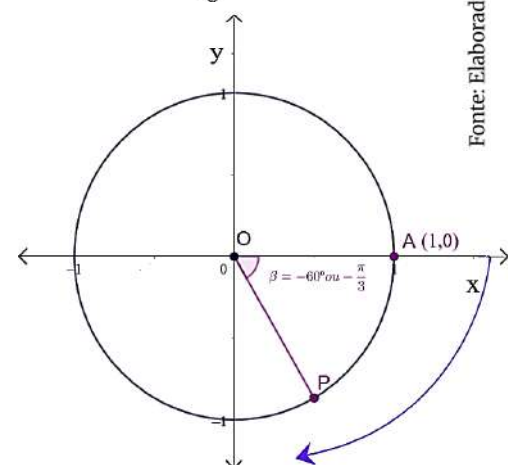
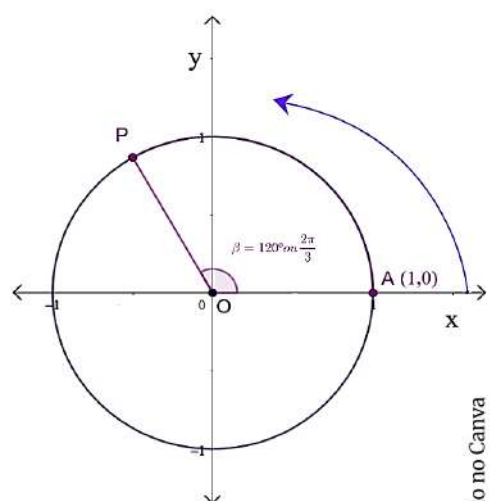
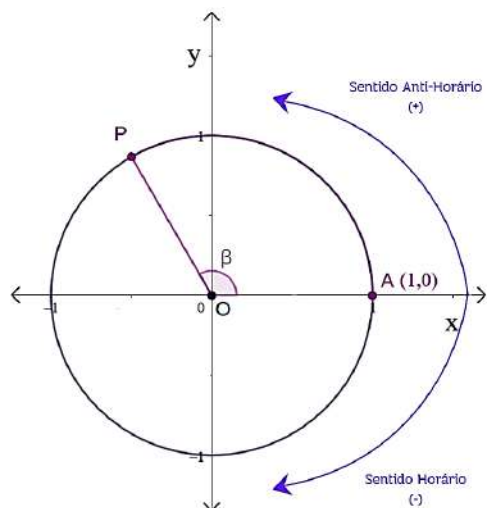
Observe os arcos a seguir:

a) Para localizar o ponto associado ao arco de comprimento $\frac{2\pi}{3}$, partimos de A e, no sentido anti-horário, percorremos um arco com esse comprimento na circunferência.

$$\beta = \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad \text{med}(\widehat{AP}) = \frac{2\pi}{3}$$

b) Para localizar o ponto associado ao arco de comprimento $-\frac{\pi}{3}$ (valor negativo), partimos de A e percorremos um arco de comprimento na circunferência no sentido horário.

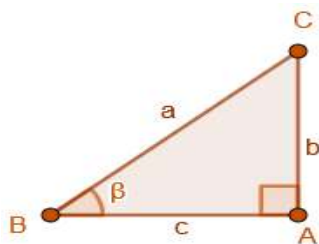
$$\beta = -\frac{\pi}{3} \quad ; \quad \text{med}(\widehat{AP}) = \frac{\pi}{3}$$



Fonte: Elaborado no Canva

Seno e Cosseno no Ciclo Trigonométrico

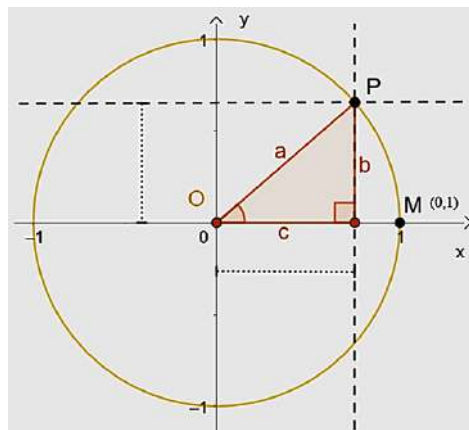
Considere o triângulo ΔABC:



Fonte: Elaborado no Geogebra

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \quad \cos \beta = \frac{c}{a} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c}$$

Agora, vamos inserir esse triângulo no ciclo trigonométrico:

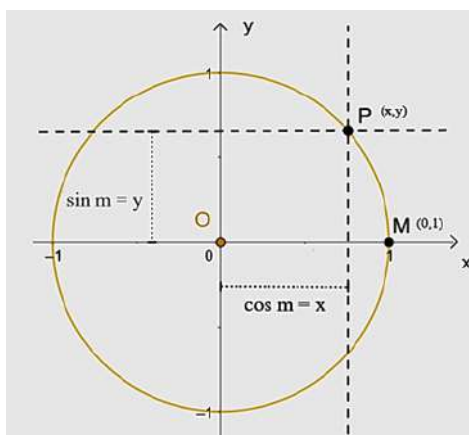


Fonte: Elaborado no Geogebra



Fonte: Elaborado no Canva

Associamos $m = \widehat{MP}$ ao ângulo central $P\hat{O}M$ no círculo trigonométrico. Em seguida, passaremos a definir o seno e o cosseno a partir de m :



Fonte: Elaborado no Canva

Dado um número real m qualquer, associado ao arco $\widehat{MP}$ do ciclo trigonométrico, definimos:

- seno de m como a ordenada de P, ou seja,

$$\sin m = \frac{y}{1} \rightarrow \sin m = y;$$

- cosseno de m como a abscissa de P, ou seja,

$$\cos m = \frac{x}{1} \rightarrow \cos m = x.$$

No ciclo trigonométrico, o eixo das abscissas também é chamado de eixo dos cossenos, enquanto o eixo das ordenadas recebe o nome de eixo dos senos.

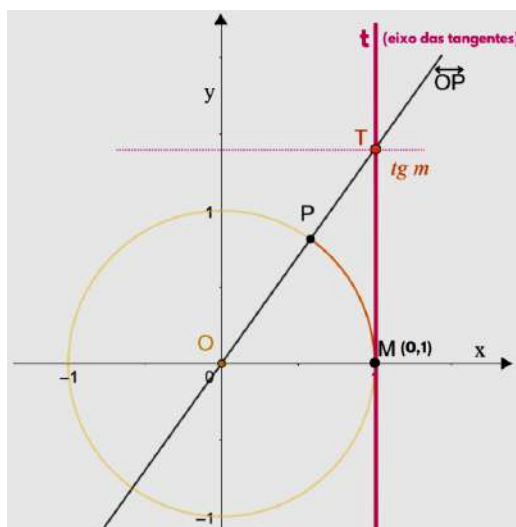
No ciclo trigonométrico, a ordenada de um ponto P é positiva se ele se encontra nos quadrantes I ou II e negativa se estiver nos quadrantes III ou IV; da mesma forma, a abscissa é positiva quando P pertence aos quadrantes I ou IV e negativa quando pertence aos quadrantes II ou III. Assim, se um ponto P correspondente a um número real m situa-se no quadrante:

Quadrante	Sinal de seno e cosseno de m
I	$\sin m > 0$ e $\cos m > 0$
II	$\sin m > 0$ e $\cos m < 0$
III	$\sin m < 0$ e $\cos m < 0$
IV	$\sin m < 0$ e $\cos m > 0$

Tangente no Ciclo Trigonométrico

No ciclo trigonométrico, a tangente de um ângulo, indicado por m , (simbolizada por $\operatorname{tg} m$) é definida utilizando uma reta auxiliar chamada eixo das tangentes. Este eixo é uma reta t paralela ao eixo dos senos, tangente à circunferência no ponto $A(1, 0)$ e com a mesma orientação do eixo y .

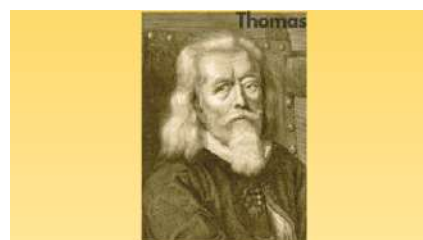
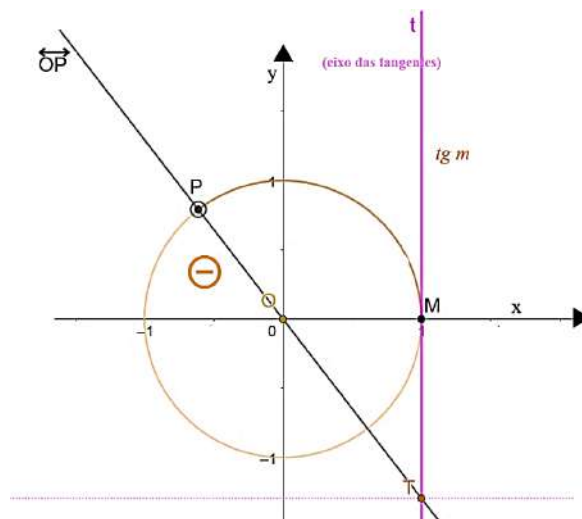
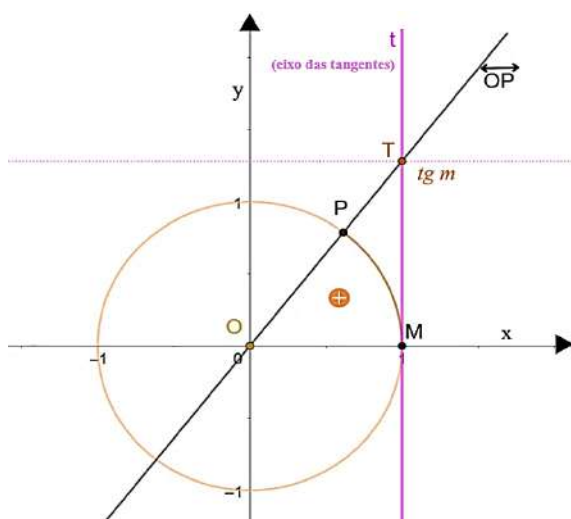
Seja um número real m , com $m \neq \frac{\pi}{2} + \pi \times k (k \in \mathbb{Z})$, o comprimento do arco $\widehat{MP}$ do ciclo trigonométrico. Definimos a tangente de m como a ordenada do ponto T , determinado na interseção entre o eixo t e a reta $\overrightarrow{OP}$.



Fonte: Elaborado no Canva

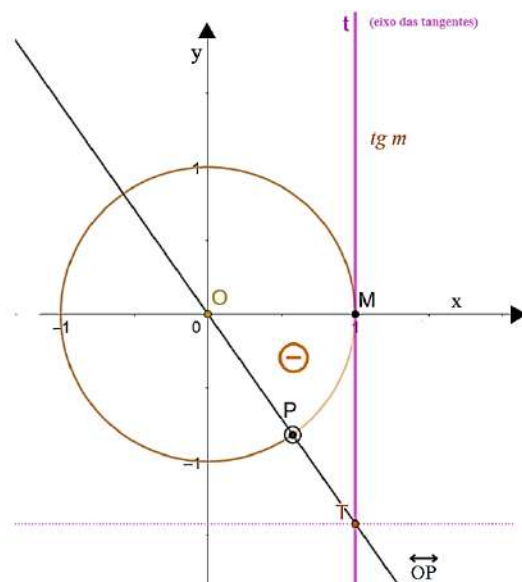
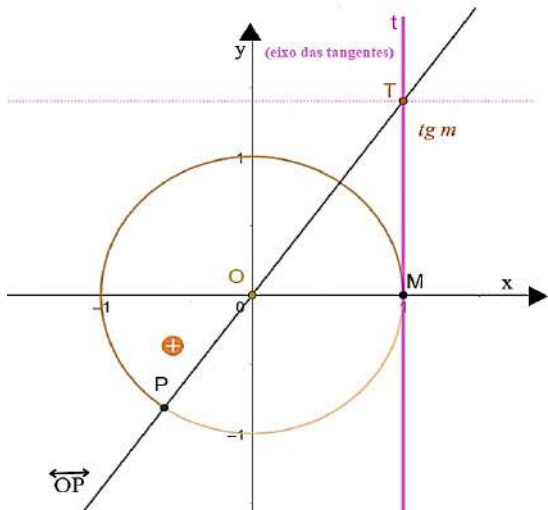
Ex.: Se $m = \frac{\pi}{2}$ rad ou 90° , a função tangente fica indefinida, pois a reta $\overrightarrow{OP}$ passa a ser paralela ao eixo das tangentes.

Nas figuras a seguir, podemos observar o sinal da $\operatorname{tg} m$ em cada quadrante:



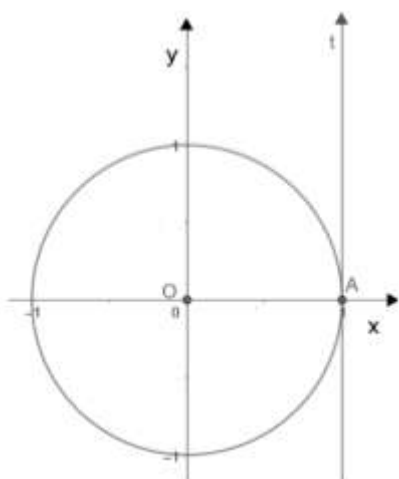
Origem da palavra tangente

A palavra tangente tem origem no latim *tangens*, *-entis*, o particípio presente do verbo *tangere*, que significa "tocar". Literalmente, traduz-se como "o que toca", referindo-se, na geometria, a uma linha que encosta numa curva ou circunferência em apenas um único ponto, sem cruzá-la.

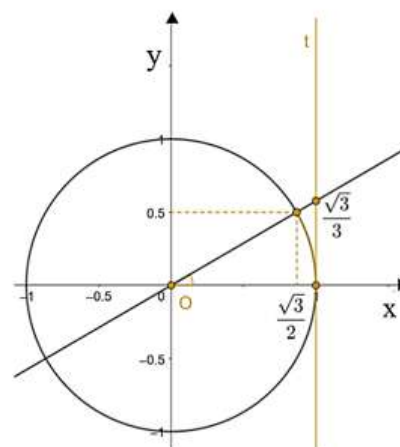


Fonte: Elaborado no Canva

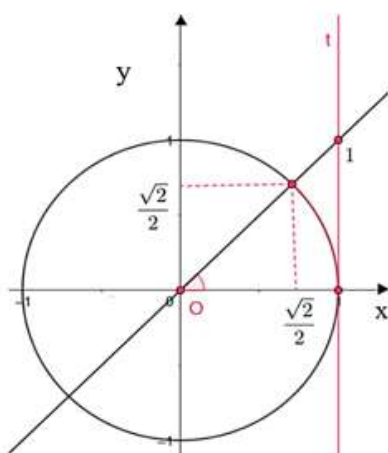
Os ângulos notáveis ficam da seguinte forma:



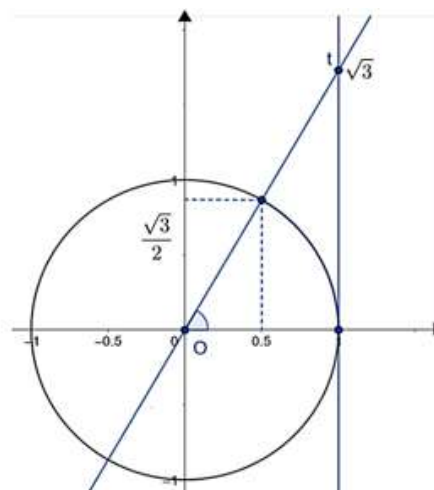
$$\begin{aligned} m &= 0 \text{ (} 0^\circ \text{)} \\ \sin 0 &= 0 \\ \cos 0 &= 1 \\ \operatorname{tg} 0 &= 0 \end{aligned}$$



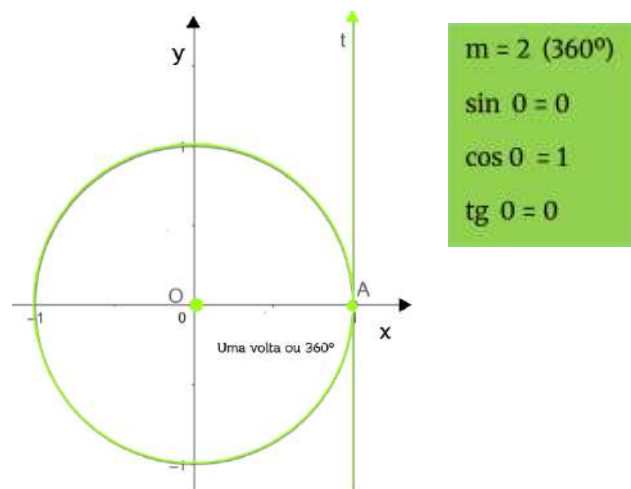
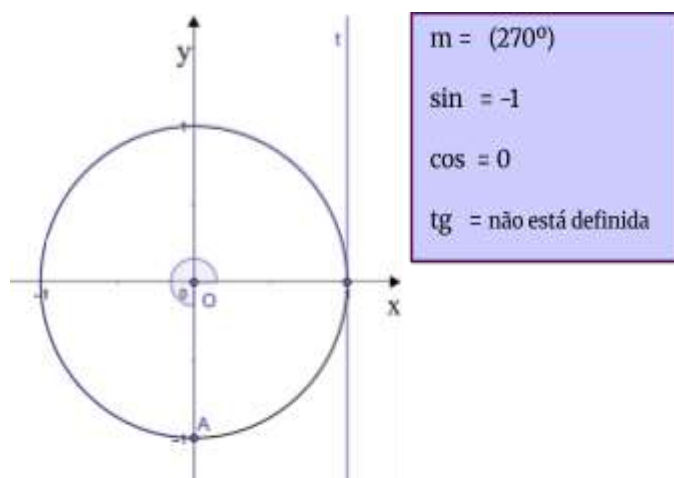
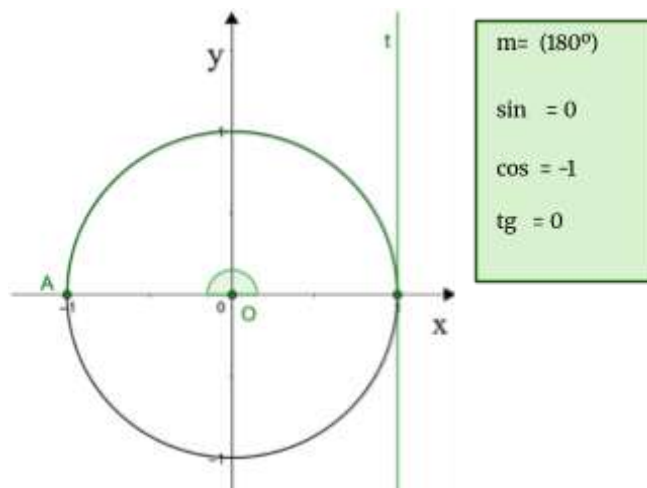
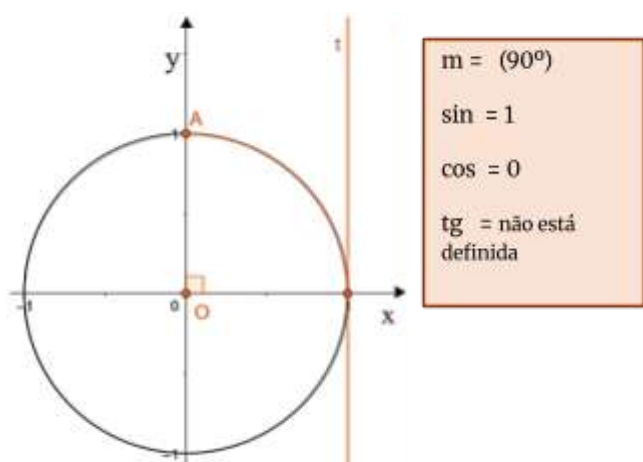
$$\begin{aligned} m &= \frac{\pi}{6} \text{ (} 30^\circ \text{)} \\ \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{2} \\ \cos \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} m &= \frac{\pi}{4} \text{ (} 45^\circ \text{)} \\ \sin \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} m &= \frac{\pi}{3} \text{ (} 60^\circ \text{)} \\ \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} &= \sqrt{3} \end{aligned}$$



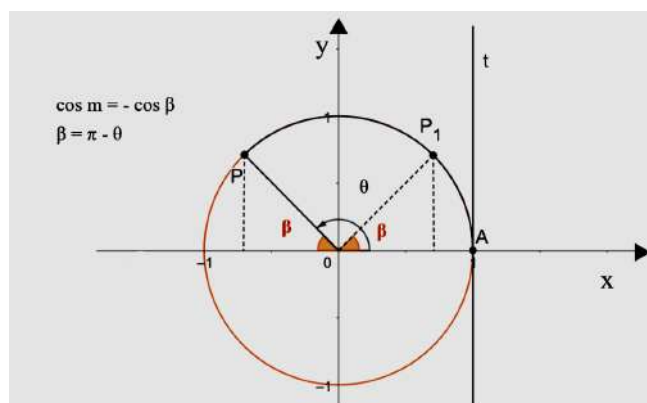
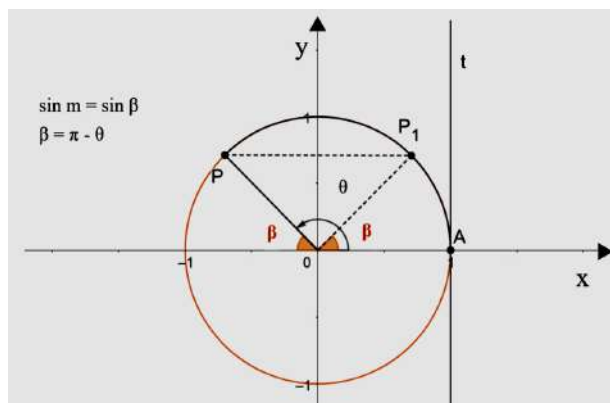
Fonte: Elaborado no Geogebra

Redução ao 1º Quadrante

Com base nos valores do seno, cosseno ou tangente de ângulos no primeiro quadrante do ciclo trigonométrico, é possível determinar os valores correspondentes dessas funções para pontos situados em qualquer outro quadrante. Para isso, utilizam-se conceitos de reflexão simétrica.

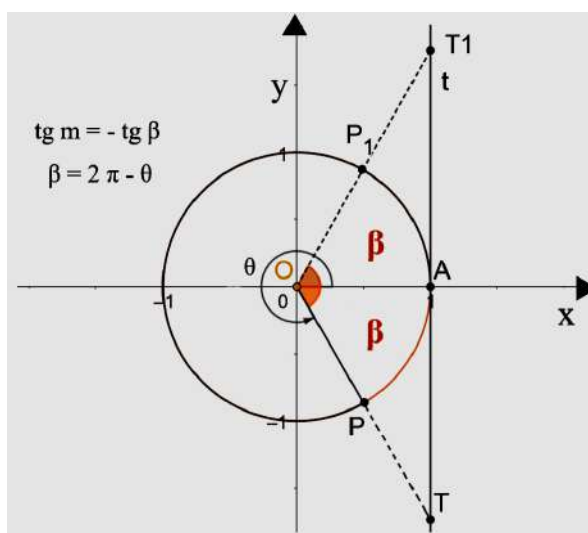
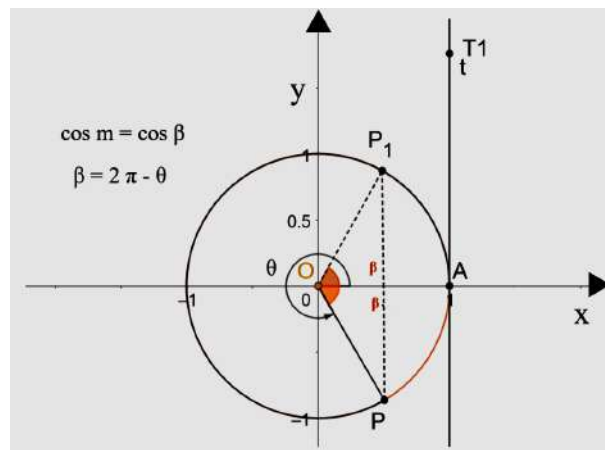
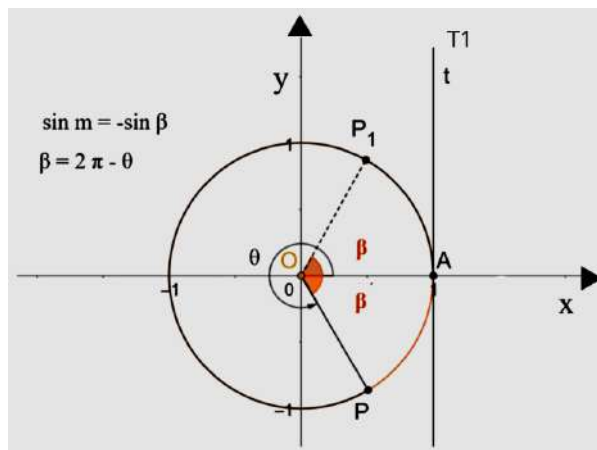
Redução do 2º para o 1º quadrante

Para calcular o seno, o cosseno ou a tangente de um ângulo m relacionado a um arco de extremidade P localizado no segundo quadrante da circunferência trigonométrica, comparamos P com seu ponto correspondente P_1 no primeiro quadrante, que é simétrico em relação ao eixo y . Nesse caso, se $\text{med}(\widehat{AP}) = \theta$, então $\text{med}(\widehat{AP_1}) = \pi - \theta$



Redução do 4º ao 1º quadrante

Agora, vamos ver como calcular o seno, cosseno e tangente de um ângulo m relacionado a um arco de extremidade P localizado no 4º quadrante da circunferência trigonométrica; para isso, mais uma vez, fazemos a comparação entre P e seu simétrico P_1 (que é simétrico em relação ao eixo x) que está no primeiro quadrante. Nesse caso, se $\text{med}(\widehat{AP}) = \theta$, então $\text{med}(\widehat{AP_1}) = 2\pi - \theta$.



Fonte: Elaborado no Geogebra

Exemplo. (UFRGS) Considere as afirmações a seguir:

I. $\tan 92^\circ = -\tan 88^\circ$

III. $\tan 268^\circ = \tan 88^\circ$

II. $\tan 178^\circ = \tan 88^\circ$

IV. $\tan 272^\circ = -\tan 88^\circ$

Quais estão corretas?

a) I, III

b) III, IV

c) I, II, IV

d) I, III, IV

e) II, III, IV

Resolução:

Primeiramente, faremos a redução ao primeiro quadrante como vimos anteriormente:

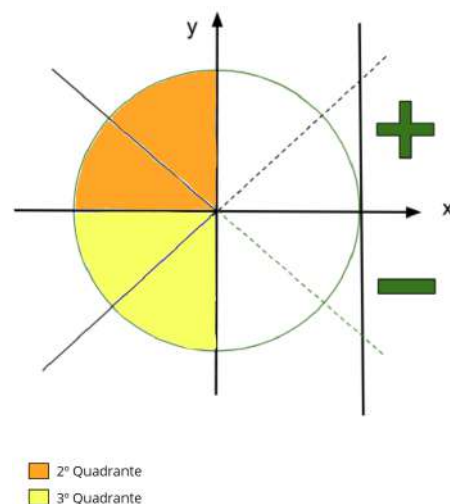
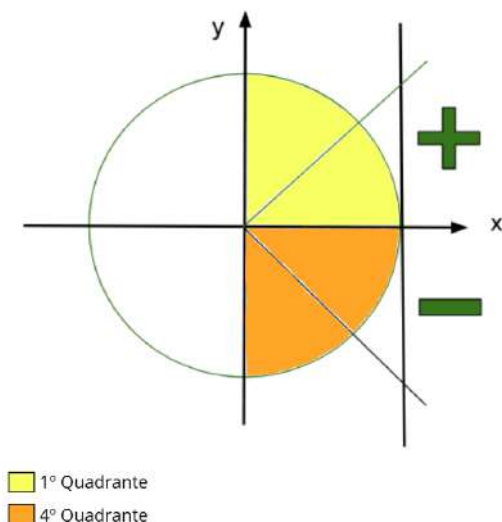
$$92^\circ \rightarrow 180^\circ - 92^\circ = 88^\circ$$

$$178^\circ \rightarrow 180^\circ - 178^\circ = 2^\circ$$

$$268^\circ \rightarrow 268^\circ - 180^\circ = 88^\circ$$

$$272^\circ \rightarrow 360^\circ - 272^\circ = 88^\circ$$

Agora, vamos verificar o sinal da tangente em cada quadrante:



Como podemos observar, no primeiro e terceiro quadrante a tangente é positiva, já no segundo e quarto quadrante a tangente é negativa. Então, as afirmativas verdadeiras são a I, III e IV, alternativa D.

Lei dos Senos e Cossenos

As leis dos senos e dos cossenos são ferramentas fundamentais da trigonometria aplicadas a triângulos quaisquer, permitindo calcular medidas de lados e ângulos que não seriam possíveis apenas com as razões trigonométricas do triângulo retângulo.

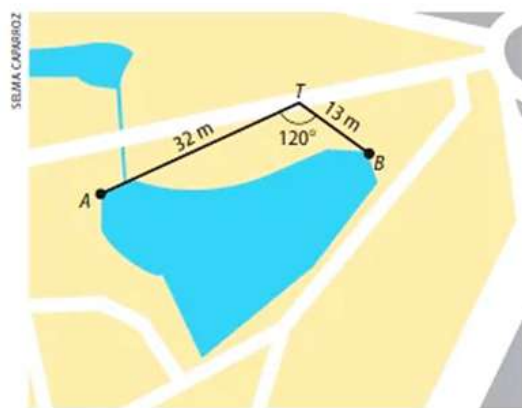
- **Lei dos Cossenos:** Esta lei estabelece que, em qualquer triângulo, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados, subtraída do dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles.

$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} \\b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}\end{aligned}$$

Classificação de Triângulos: Uma aplicação importante da Lei dos Cossenos é a classificação de um triângulo (considerando a como o maior lado).

- ☐ Retângulo: Se $a^2 = b^2 + c^2$
- ☐ Acutângulo: Se $a^2 < b^2 + c^2$
- ☐ Obtusângulo: Se $a^2 > b^2 + c^2$

Exemplo. (UERJ — adaptada) Ao coletar os dados para um estudo topográfico da margem de um lago a partir dos pontos A, B e T, um técnico determinou as medidas $AT = 32$ m, $BT = 13$ m e $\hat{ATB} = 120^\circ$, representadas no esquema abaixo:



Calculando a distância, em metros, entre os pontos A e B, definidos pelo técnico nas margens desse lago, a distância é de, aproximadamente:

- A) 38 metros
- B) 39 metros
- C) 40 metros
- D) 41 metros
- E) 42 metros

Resolução: De acordo com as informações da questão e com a lei dos cossenos, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{T}$$

$$a^2 = 13^2 + 32^2 - 2 \cdot 13 \cdot 32 \cdot \cos 120^\circ$$

Resolvendo as potências e substituindo o valor do $\cos 120$, temos:

$$a^2 = 169 + 1024 - 2 \cdot 412 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

Podemos fazer uma simplificação e um jogo de sinal, feito isso, temos:

$$a^2 = 1193 + 412$$

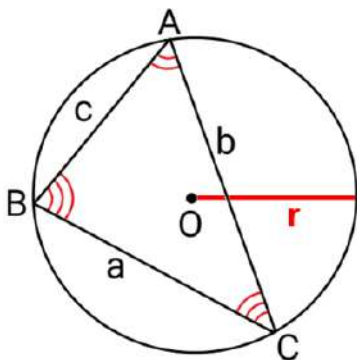
Extraindo a raiz:

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{1609}$$

$$a \cong 40,1$$

Portanto, a distância entre A e B é de 40 m.

- **Lei dos Senos:** Em qualquer triângulo, as medidas dos lados a , b e c são proporcionais aos senos dos respectivos ângulos opostos aos vértices A , B e C , e a constante da proporcionalidade é igual à medida do diâmetro da circunferência ($D = 2r$) circunscrita a esse triângulo.

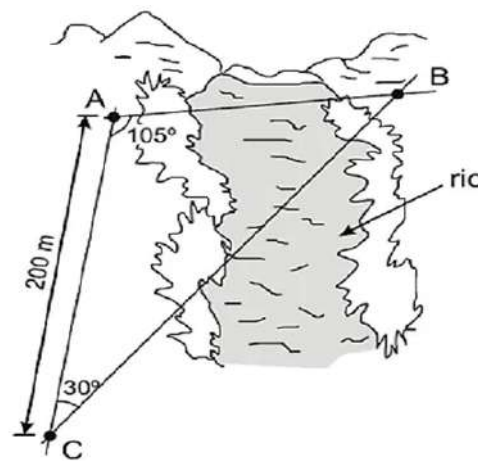


$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2r$$

Exemplo. (UFPB) A prefeitura de certa cidade vai construir, sobre um rio que corta essa cidade, uma ponte que deve ser reta e ligar dois pontos, A e B, localizados nas margens opostas do rio. Para medir a distância entre esses pontos, um topógrafo localizou um terceiro ponto, C, distante 200 m do ponto A e na mesma margem do rio onde se encontra o ponto A. Usando um teodolito (instrumento de precisão para medir ângulos horizontais e ângulos verticais, muito empregado em trabalhos topográficos), o topógrafo observou que os ângulos $\hat{BCA}$ e $\hat{CAB}$ mediam, respectivamente, 30° e 105° , conforme ilustrado na figura a seguir.

Com base nessas informações, é correto afirmar que a distância, em metros, do ponto A ao ponto B é de:

- a) $200\sqrt{2}$ b) $180\sqrt{2}$ c) $150\sqrt{2}$ d) $100\sqrt{2}$ e) $50\sqrt{2}$



Resolução:

De acordo com a lei dos senos e substituindo pelas informações da questão, temos:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{200}{\sin \hat{B}}$$

Lembrando da propriedade dos ângulos internos de um triângulo, temos:

$$\begin{aligned} 30^\circ + 105^\circ + x &= 180^\circ \\ 135 + x &= 180 \\ x &= 180 - 135 \\ x &= 45^\circ \end{aligned}$$

Com isso, temos:

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{200}{\sin 45^\circ}$$

Substituindo os valores dos senos e utilizamos a regra de três simples:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{\frac{1}{2}} &= \frac{200}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot AB &= 200 \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot AB &= 100 \\ \sqrt{2} \cdot AB &= 100 \cdot 2 \\ \sqrt{2} \cdot AB &= 200 \\ AB &= \frac{200}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

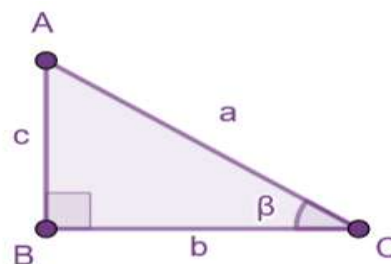
Faremos a racionalização para que a raiz saia do denominador:

$$AB = \frac{200}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow AB = \frac{200\sqrt{2}}{\sqrt{4}} \Rightarrow AB = \frac{200\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AB = 100\sqrt{2}$$

Logo, do ponto A ao B são $100\sqrt{2}$ metros.

Relação Fundamental da Trigonometria

Considere o seguinte triângulo $\triangle ABC$:



Seja β um ângulo agudo, temos:

$$\sin \beta = \frac{c}{a} \text{ e } \cos \beta = \frac{b}{a} \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{c^2}{a^2} \text{ e } \cos^2 \beta = \frac{b^2}{a^2}$$

Somando as duas razões, temos:

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 + b^2}{a^2}$$

Pelo Teorema de Pitágoras: $a^2 = c^2 + b^2$; substituindo o valor de a na expressão anterior, temos:

$$\Rightarrow \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = \frac{c^2 + b^2}{c^2 + b^2} \Rightarrow \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$$

A soma do quadrado do seno de um ângulo com o quadrado do cosseno desse mesmo ângulo é igual a 1.

Exemplo. Um engenheiro civil está analisando a inclinação de uma rampa de acesso em um novo edifício. Para garantir a segurança, ele precisa que a componente vertical da força de atrito (relacionada ao seno do ângulo θ da rampa) seja calculada, mas ele só possui o valor do cosseno dessa inclinação, devido a uma medição prévia no local, que é de $\cos \theta = \frac{4}{5}$, qual é o valor do seno desse ângulo θ ?

Solução:

Utilizamos a Relação Fundamental da Trigonometria: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

Substituímos o valor conhecido de $\cos \theta = \frac{4}{5}$:

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta + \left(\frac{4}{5}\right)^2 &= 1 \\ \sin^2 \theta + \frac{16}{25} &= 1\end{aligned}$$

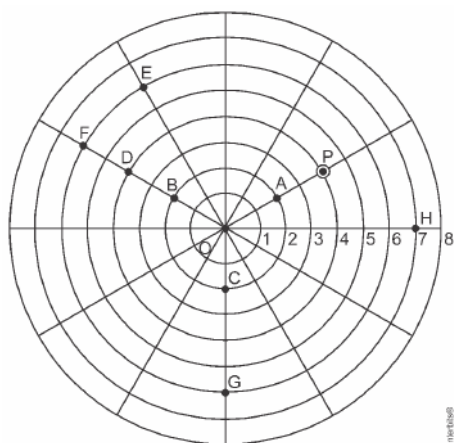
Isolando o seno, temos:

$$\sin^2 \theta = 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin \theta = \sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow \sin \theta = \frac{3}{5}$$

EXERCITANDO E RESOLVENDO PROBLEMAS



Questão 01. (Enem PPL 2015) No jogo mostrado na figura, uma bolinha desloca-se somente de duas formas: ao longo de linhas retas ou por arcos de circunferências centradas no ponto O e raios variando de 1 a 8. Durante o jogo, a bolinha que estiver no ponto P deverá realizar a seguinte sequência de movimentos: 2 unidades no mesmo sentido utilizado para ir do ponto O até o ponto A e, no sentido anti-horário, um arco de circunferência cujo ângulo central é 120° .



Após a sequência de movimentos descrita, a bolinha estará no ponto

- a) B. b) D. c) E. d) F. e) G.

Questão 02. (Ueg 2012) Considerando 1° como a distância média entre dois meridianos, e que na linha do equador corresponde a uma distância média de 111,322 km, e tomando-se esses valores como referência, pode-se inferir que o comprimento do círculo da Terra, na linha do equador, é de, aproximadamente,

- a) 52.035 km c) 44.195 km
b) 48.028 km d) 40.076 km

Questão 03. (Ufg 2013) As cidades de Goiânia e Curitiba têm, aproximadamente, a mesma longitude. Goiânia fica a uma latitude de $16^\circ 40'$, enquanto a latitude de Curitiba é de $25^\circ 25'$. Considerando-se que a Terra seja aproximadamente esférica, com a linha do equador medindo, aproximadamente, 40 000 km,

a distância entre as duas cidades, em quilômetros, ao longo de um meridiano,

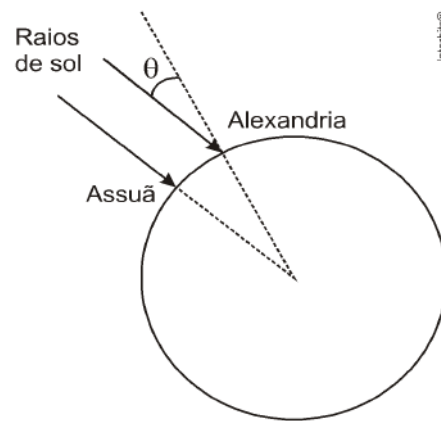
- a) é menor que 700.
- b) fica entre 700 e 800.
- c) fica entre 800 e 900.
- d) fica entre 900 e 1 000.
- e) é maior que 1 000.

Questão 04. (Uel) Uma família viaja para Belém (PA) em seu automóvel. Em um dado instante, o GPS do veículo indica que ele se localiza nas seguintes coordenadas: latitude $21^{\circ}20'$ Sul e longitude $48^{\circ}30'$ Oeste. O motorista solicita a um dos passageiros que acesse a Internet em seu celular e obtenha o raio médio da Terra, que é de 6730 km, e as coordenadas geográficas de Belém, que são latitude $1^{\circ}20'$ Sul e longitude $48^{\circ}30'$ Oeste. A partir desses dados, supondo que a superfície da Terra é esférica, o motorista calcula a distância D , do veículo a Belém, sobre o meridiano $48^{\circ}30'$ Oeste.

Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o valor da distância D , em km.

- a) $D = \frac{\pi}{9} 6730$
- b) $D = \frac{\pi}{18} (6730)^2$
- c) $D = \frac{\pi}{9} \sqrt{6730}$
- d) $D = \frac{\pi}{36} 6730$
- e) $D = \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 6730$

Questão 05. (Fuvest) Uma das primeiras estimativas do raio da Terra é atribuída a Eratóstenes, estudioso grego que viveu, aproximadamente, entre 275 a.C. e 195 a.C. Sabendo que em Assuã, cidade localizada no sul do Egito, ao meio dia do solstício de verão, um bastão vertical não apresentava sombra, Eratóstenes decidiu investigar o que ocorreria, nas mesmas condições, em Alexandria, cidade no norte do Egito. O estudioso observou que, em Alexandria, ao meio dia do solstício de verão, um bastão vertical apresentava sombra e determinou o ângulo θ entre as direções do bastão e de incidência dos raios de sol. O valor do raio da Terra, obtido a partir de θ e da distância entre Alexandria e Assuã foi de, aproximadamente, 7500 km.



O mês em que foram realizadas as observações e o valor aproximado de θ são

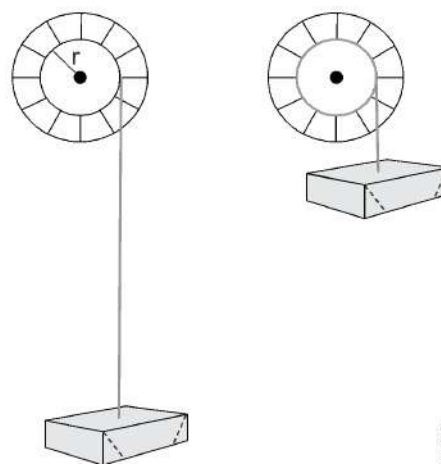
(Note e adote: distância estimada por Eratóstenes entre Assuã e Alexandria ≈ 900 km; $\pi \approx 3$.)

- a) junho; 7° .
- b) dezembro; 7° .
- c) junho; 23° .
- d) dezembro; 23° .
- e) junho; $0,3^{\circ}$.

Questão 06. (Uece 2023) Em um relógio analógico circular usual, quando a hora observada é 6h20min, a medida em graus do menor ângulo entre o ponteiro das horas e o ponteiro dos minutos é

- a) 68.
- b) 62.
- c) 65.
- d) 70.

Questão 07. (Fac. Albert Einstein - Medicina 2021) A imagem descreve o içamento de uma caixa por meio de uma corda fixada a ela e a uma roda circular de raio $r = 30$ cm.

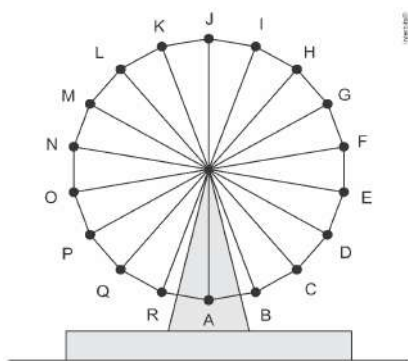


Considerando desprezível a espessura da corda durante todo o içamento, que foi concluído após um giro de $\frac{12\pi}{5}$ radianos da roda, o deslocamento vertical da caixa foi de,

aproximadamente,

- a) 7,85 m. c) 2,26 m. e) 2,51 m.
b) 7,54 m. d) 3,77 m.

Questão 08. (G1 - cps 2008) A roda-gigante de um parque de diversões tem dezoito cadeiras, igualmente espaçadas ao longo do seu perímetro e move-se no sentido anti-horário, isto é, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.



Na figura, as letras A, B, C, ... e R indicam as posições em que as cadeiras ficam cada vez que a roda gigante para.

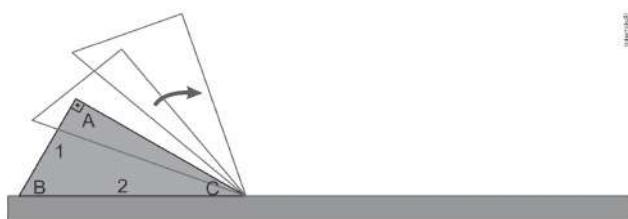
Com a roda gigante parada, Bruna senta-se na cadeira que está na posição A, posição mais baixa da roda gigante.

A roda gigante move-se $\frac{5}{6}$ de uma volta e para.

Nesse momento, a letra relativa à posição da cadeira ocupada por Bruna é

- a) D. b) I. c) K. d) P. e) R.

Questão 09. (Fuvest 2019) Um triângulo retângulo com vértices denominados A, B e C apoia-se sobre uma linha horizontal, que corresponde ao solo, e gira sem escorregar no sentido horário. Isto é, se a posição inicial é aquela mostrada na figura, o movimento começa com uma rotação em torno do vértice C até o vértice A tocar o solo, após o que passa a ser uma rotação em torno de A até o vértice B tocar o solo, e assim por diante.



Usando as dimensões indicadas na figura ($AB = 1$

e $BC = 2$), qual é o comprimento da trajetória percorrida pelo vértice B, desde a posição mostrada, até a aresta BC apoiar-se no solo novamente?

- a) $\frac{3}{2}\pi$ d) $\frac{3+\sqrt{3}}{2}\pi$
b) $\frac{3+\sqrt{3}}{3}\pi$ e) $\frac{8+2\sqrt{3}}{3}\pi$
c) $\frac{13}{6}\pi$

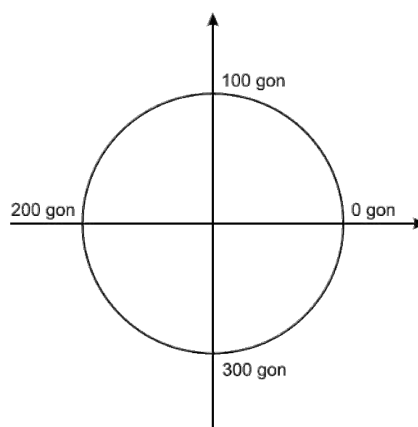
Questão 10. (G1 - ifce 2014) Considere um relógio analógico de doze horas. O ângulo obtuso formado entre os ponteiros que indicam a hora e o minuto, quando o relógio marca exatamente 5 horas e 20 minutos, é

- a) 330° . c) 310° . e) 290° .
b) 320° . d) 300° .

Questão 11. (Udesc 2012) O relógio *Tower Clock*, localizado em Londres, Inglaterra, é muito conhecido pela sua precisão e tamanho. O ângulo interno formado entre os ponteiros das horas e dos minutos deste relógio, desprezando suas larguras, às 15 horas e 20 minutos é:

- a) $\frac{\pi}{12}$ b) $\frac{\pi}{36}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) $\frac{\pi}{18}$ e) $\frac{\pi}{9}$

Questão 12. O grau é uma unidade de medida de ângulos em que uma das vantagens é facilitar as operações envolvendo ângulos retos. Neste sistema, a circunferência é dividida em 400 partes iguais e cada parte é denominada 1 gon. Na figura abaixo, observa-se a divisão dos quatro quadrantes usando este sistema.



Desta forma, o ângulo de $\frac{350}{3}$ gon é, em graus, igual a:
a) 30° b) 45° c) 90° d) 105° e) 150°

GABARITO

Q.01: D, Q.02: D, Q.03: D, Q.04: A, Q.05: A, Q.06: D, Q.07: C, Q.08: D, Q.09: C, Q.10: B, Q.11: E, Q.12: D.

CONSTRUINDO CONCEITOS



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Observe atentamente o seu dia. O despertador toca sempre após um intervalo de horas. O Sol nasce e se põe em um ciclo contínuo. As fases da Lua mudam gradualmente até reiniciarem o mesmo padrão. As estações do ano retornam todos os anos. As ondas do mar avançam e recuam. O coração bate em um ritmo constante. Até mesmo a música que você escuta depende de vibrações que se repetem de forma organizada. O que todos esses fenômenos têm em comum?

Eles seguem padrões cíclicos, ou seja, comportamentos que se repetem em intervalos regulares de tempo. Essa repetição organizada recebe o nome de periodicidade. E é justamente para estudar, descrever e prever esse tipo de comportamento que utilizamos as funções trigonométricas. Embora tenham surgido a partir do estudo de relações entre ângulos e lados de triângulos, as funções trigonométricas ultrapassaram os limites da geometria. Hoje, elas são ferramentas essenciais para modelar fenômenos naturais e tecnológicos.

Nesta unidade, vamos investigar como essas funções são construídas, entender o significado de seus parâmetros, analisar seus gráficos e perceber como pequenas alterações em suas expressões podem modificar amplitude, período e deslocamentos. Mais do que cálculos, exploraremos uma maneira de enxergar o mundo através dos ciclos que o organizam.

Figura - Representação do fenômeno das marés, que ocorre de maneira periódica.

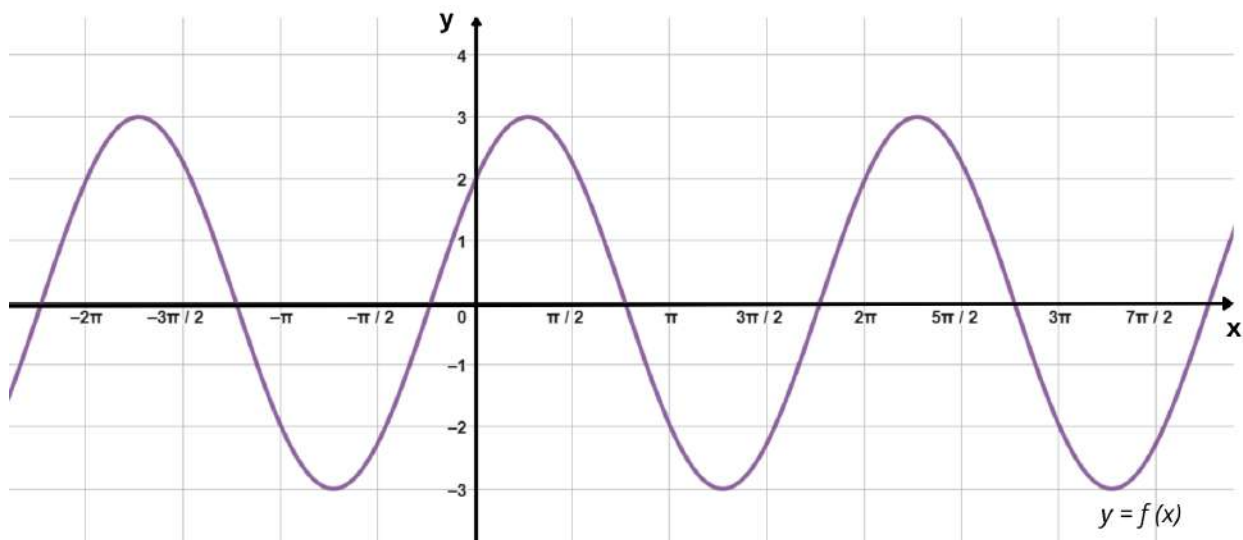


Conceitos Importantes

- **Padrão Gráfico de uma Função Trigonométrica**

O padrão gráfico de uma função trigonométrica como seno, cosseno e tangente, apresenta comportamento periódico, ou seja, seus valores se repetem em intervalos regulares, chamados **período**. Esse padrão de repetição está relacionado ao movimento circular (ciclo trigonométrico) e aos ângulos medidos em radianos ou graus, como visto nos tópicos anteriores. Compreender esses padrões gráficos é fundamental para interpretar fenômenos periódicos presentes em diversas áreas como, por exemplo, física, engenharia e Biologia.

Para visualizar melhor esse comportamento, podemos observar um exemplo gráfico, analisando como seu padrão se repete ao longo do plano cartesiano.



- **Linha média do gráfico de uma Função trigonométrica**

A linha média do gráfico de uma função trigonométrica é uma reta horizontal que representa o valor central em torno do qual o gráfico da função oscila. Em funções como seno e cosseno, o gráfico apresenta movimentos periódicos de crescimento (subida) e decrescimento (descida), e a linha média é a reta que dista igualmente dos valores máximos e mínimos da função. No gráfico anterior, a linha média coincide com o eixo das abscissas (eixo x), ou ainda, é a reta $y = 0$.

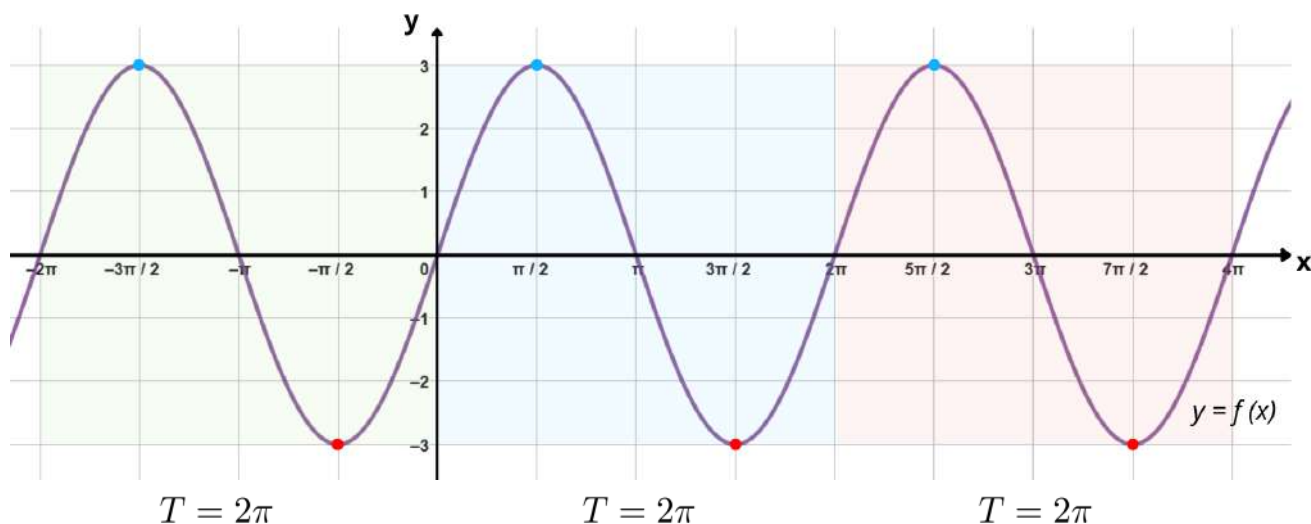
- **Parâmetros em uma função Trigonométrica (a , b , c e d)**

Os parâmetros em uma função trigonométrica são os coeficientes reais presentes na sua lei matemática, na equação da função. A partir da forma mais simples de uma função trigonométrica, os parâmetros causam efeitos sobre as imagens, que podem ser de translação, prolongamento ou encurtamento nos sentidos horizontal e/ou vertical.

- **Período (T)**

O período T de uma função trigonométrica é o comprimento do intervalo do domínio no qual não há repetição no padrão da função, seja na imagem, no sinal da função ou comportamento; somente fora desse intervalo de comprimento T é que observamos a repetição do padrão observado no período.

A seguir podemos observar de forma bem evidenciada o intervalo do período no gráfico esboçado.



- **Pontos de Máximo e de Mínimo da função**

Os pontos de máximo e mínimo não são elementos exclusivos das funções trigonométricas, sendo presentes em diversos outros tipos de função. Caracterizam-se por serem os pontos relacionados aos valores extremos das imagens de uma função, ou seja, se $(x_1, f(x_1))$ é um ponto de máximo, então $f(x_1) \geq f(x)$, para todo x do domínio da função. Analogamente, se $(x_2, f(x_2))$ é um ponto de mínimo, então $f(x_2) \leq f(x)$, para todo x do domínio.

No gráfico anterior, podemos observar três pontos de máximo (pontos em azul) e três pontos de mínimo (pontos em vermelho). No estudo das ondas, na Física, correspondem, respectivamente, às cristas e aos vales das ondas.

- **Amplitude:**

É a distância da linha média da função (centro de oscilação) até o ponto de máximo ou até o ponto de mínimo da função. Nas funções seno e cosseno, a amplitude é igual ao módulo do parâmetro b .

- **O Eixo das abscissas em radianos.**

Trata-se de uma forma de representar o eixo x no plano cartesiano utilizando uma escala com medidas, em radianos, de ângulos específicos, em vez de números inteiros. Durante grande parte da vida escolar, os estudantes estão acostumados a observar gráficos em que o eixo horizontal é marcado por valores inteiros, $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, no entanto, ao estudar funções trigonométricas, essa forma de marcação nem sempre é a mais adequada.

Essa inadequação acontece porque as funções trigonométricas estão diretamente relacionadas aos ângulos. Por esse motivo, é mais conveniente utilizar coordenadas em radianos como unidade de medida no eixo das abscissas. Os radianos permitem representar com mais clareza pontos importantes das funções, como $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ ou 2π , que correspondem a posições fundamentais no ciclo trigonométrico.

Ao marcar o eixo x com esses valores, torna-se mais fácil identificar onde ocorrem os **máximos**, **mínimos** e **zeros** das funções seno e cosseno, além de facilitar a visualização do período das funções trigonométricas. Dessa forma, o uso de radianos torna a leitura e a construção dos gráficos mais naturais e coerentes com os conceitos da trigonometria.

FUNÇÃO SENO

Definição: Dados $a, b \neq 0, c \neq 0, d \in \mathbb{R}$, chamados de *parâmetros*, a função seno é definida por $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em que um ângulo² $(x = \theta) \mapsto y \in \mathbb{R}$ (lê-se que $x = \theta$ é levado a um número real y pela função f), de forma que

$$y = a + b \cdot \sin(c \cdot x + d)$$

Em uma linguagem mais informal, esse tipo de função tem apenas a razão trigonométrica seno em sua estrutura, com a variável x definida como ângulo, ou determinando um ângulo.

Exemplos. A seguir, as funções apresentadas são funções seno.

a) $y = \sin(x)$

c) $g(x) = \sin(x + 3\pi)$

b) $f(x) = 4 - \sin(x)$

d) $y = -10 + 6 \cdot \sin\left(5x - \frac{3\pi}{2}\right)$

Domínio e Imagem da função seno

Seja f uma função seno, dada com a estrutura geral apresentada acima.

- Na função seno, o domínio é todo o conjunto dos números Reais $\mathbb{R}$;
- O conjunto imagem de uma função seno com $y = a + b \cdot \sin(c \cdot x + d)$ é

$$Im(f) = [a - b; a + b], \text{ se } b > 0.$$

$$Im(f) = [a + b; a - b], \text{ se } b < 0.$$

Chegamos a essas imagens a partir das deduções seguintes:

- Sabemos que para qualquer ângulo θ , temos

$$-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$$

- Fazendo, então, $\theta = c \cdot x + d$, temos

$$-1 \leq \sin(c \cdot x + d) \leq 1$$

- A seguir, multiplicamos a desigualdade acima por b e, assim, temos as duas possibilidades abaixo, para $b > 0$ (à esquerda) e $b < 0$ (à direita).

Se $b > 0$,

$$-b \leq b \cdot \sin(c \cdot x + d) \leq b$$

Se $b < 0$,

$$-b \geq b \cdot \sin(c \cdot x + d) \geq b$$

- Por fim, somando o valor de a , temos

Se $b > 0$,

$$a - b \leq a + b \cdot \sin(c \cdot x + d) \leq a + b$$

Se $b < 0$,

$$a - b \geq a + b \cdot \sin(c \cdot x + d) \geq a + b$$

ou ainda,

$$a - b \leq a + b \cdot \sin(c \cdot x + d) \leq a + b$$

$$a + b \leq a + b \cdot \sin(c \cdot x + d) \leq a - b$$

e, portanto, como $y = a + b \cdot \sin(c \cdot x + d)$, temos que

$$a - b \leq y \leq a + b$$

$$a + b \leq y \leq a - b$$

Exemplo. Dada uma função f onde $y = -4 + 10 \cdot \sin(x)$. Como $b = 10 > 0$, então, as imagens da função formam o intervalo:

$$Im(f) = [-4 - 10; -4 + 10] = [-14, 6]$$

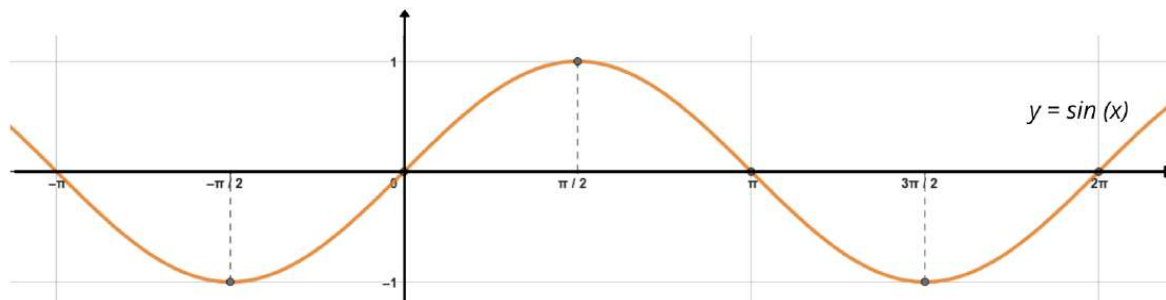
² O ângulo é dado em Radiano, portanto é um número real. No entanto, nada impede que a medida do ângulo seja usada em graus, desde que respeitada a equivalência entre as medidas.

Representação gráfica da função seno

Para explorar a representação do gráfico de uma função seno, primeiro será apresentado o esboço da forma mais simples da função seno e, no tópico seguinte, o efeito de cada parâmetro na representação da função dada, em relação ao gráfico da função $y = \sin(x)$.

- **Representação gráfica da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $y = \sin(x)$.**

Este é o caso mais simples de função seno. O gráfico, neste caso, apresenta o comportamento a seguir.



Perceba como o gráfico se comporta nos intervalos abaixo, dados alguns valores para x .

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Ângulo x	$\sin(x)$
0	0
$\frac{\pi}{8}$	0.383
$\frac{\pi}{4}$	0.707
$\frac{3\pi}{8}$	0.924
$\frac{\pi}{2}$	1

f é crescente

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$$

Ângulo x	$\sin(x)$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{5\pi}{8}$	0.924
$\frac{3\pi}{4}$	0.707
$\frac{7\pi}{8}$	0.383
π	0

f é decrescente

$$\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$$

Ângulo x	$\sin(x)$
π	0
$\frac{9\pi}{8}$	-0.383
$\frac{5\pi}{4}$	-0.707
$\frac{11\pi}{8}$	-0.924
$\frac{3\pi}{2}$	-1

f é decrescente

$$\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$$

Ângulo x	$\sin(x)$
$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{13\pi}{8}$	-0.924
$\frac{7\pi}{4}$	-0.707
$\frac{15\pi}{8}$	-0.383
2π	0

f é crescente

- **Período :** Percebe-se que fora do intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$, a função está repetindo o padrão esboçado neste intervalo. Isso nos diz, então, que 2π é o período T desta função especificamente. Assim,

$$T = 2\pi \text{ rad}$$

- **Amplitude:** Nesta função, como a distância da linha média do gráfico, equivalente neste caso ao eixo das abscissas, até os pontos de máximo ou de mínimo da função é 1, esta é a amplitude da função $y = \sin(x)$.

- **Pontos de Máximos:** Neste esboço, o único ponto de máximo visível é $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$; Mas os pontos do tipo

$$(x, y) = \left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi, 1\right), \text{ com } k \in \mathbb{Z},$$

são todos pontos de máximo no gráfico da função $y = \sin(x)$.

- **Pontos de Mínimo:** Neste esboço, vemos dois pontos de mínimo: $\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)$ e $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$. Porém, os pontos do tipo

$$(x, y) = \left(\frac{3\pi}{2} + k \cdot 2\pi, -1\right), \text{ com } k \in \mathbb{Z},$$

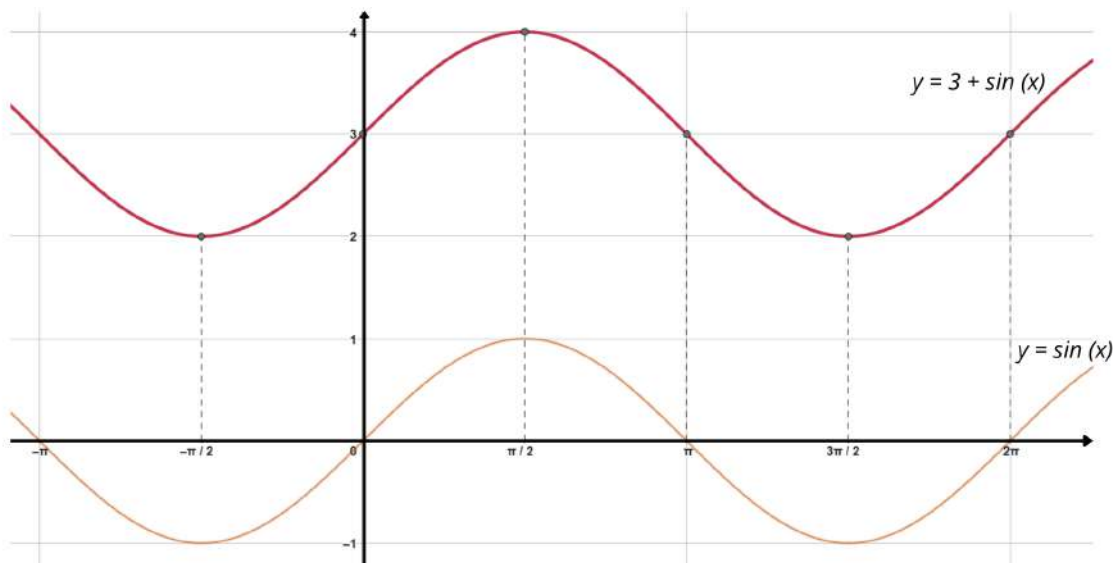
são todos pontos de mínimo no gráfico da função $y = \sin(x)$.

Efeitos dos parâmetros a, b, c e d na representação gráfica da função seno

Cada um dos parâmetros em uma função seno modifica de forma específica o gráfico da função seno mais simples, ou seja, modifica o gráfico de $y = \sin(x)$.

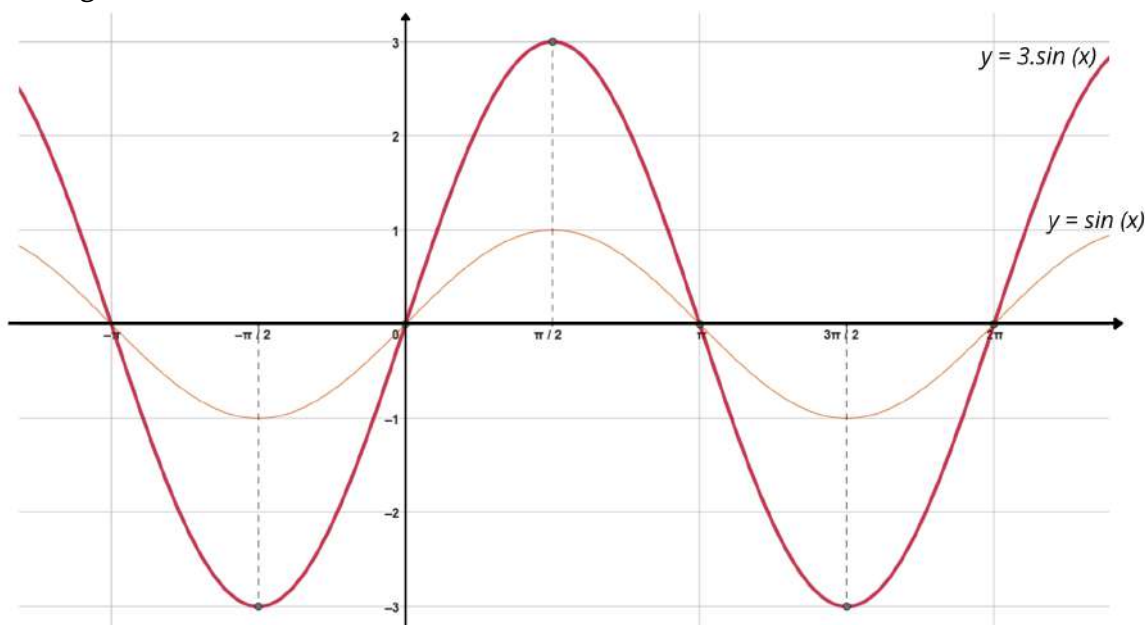
1. O parâmetro $a \in \mathbb{R}$: Nas funções do tipo $y = a + \sin(x)$, o parâmetro $a \neq 0$ **translada** (movimenta) o gráfico de $y = \sin(x)$ na **vertical** em um deslocamento de comprimento igual a $|a|$. Se $a > 0$, o gráfico é transladado para cima e se $a < 0$, é transladado para baixo.

Exemplo. Dada a função $y = 3 + \sin(x)$. Como, neste caso, $a = 3 > 0$, o esboço desta função corresponde à translação do gráfico de $y = \sin(x)$ em 3 unidades para cima, conforme mostrado a seguir.



2. O parâmetro $b \in \mathbb{R}$: Nas funções do tipo $y = b \cdot \sin(x)$, o parâmetro $b \neq 0$, por meio de $|b|$, indica a **amplitude** da função dada, ou seja, $|b|$ é a distância da linha média da função aos pontos de máximo e mínimo. Além disso, se $b < 0$, o comportamento da função é invertido para todo o domínio.

Exemplo. Dada a função $y = 3 \cdot \sin(x)$. Como, neste caso, $b = 3 > 0$, o esboço desta função corresponde ao prolongamento vertical do gráfico de $y = \sin(x)$ a uma amplitude 3, conforme mostrado a seguir.



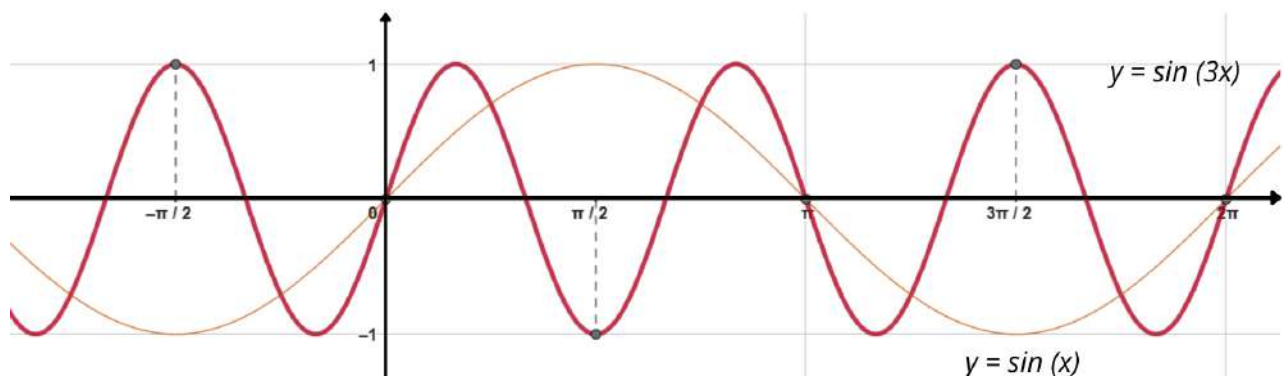
3. O parâmetro $c \in \mathbb{R}$: Nas funções do tipo $y = \sin(c \cdot x)$, o parâmetro $c \neq 0$ influencia no período e no sinal da função, prolongando ou encurtando o período, definindo também onde a função é positiva ou negativa. Enquanto o período de $y = \sin(x)$ é $T = 2\pi$ rad, o período de uma função do tipo $y = \sin(c \cdot x)$, onde $c \neq 1$, é obtido da relação

$$T = \frac{2\pi}{|c|}$$

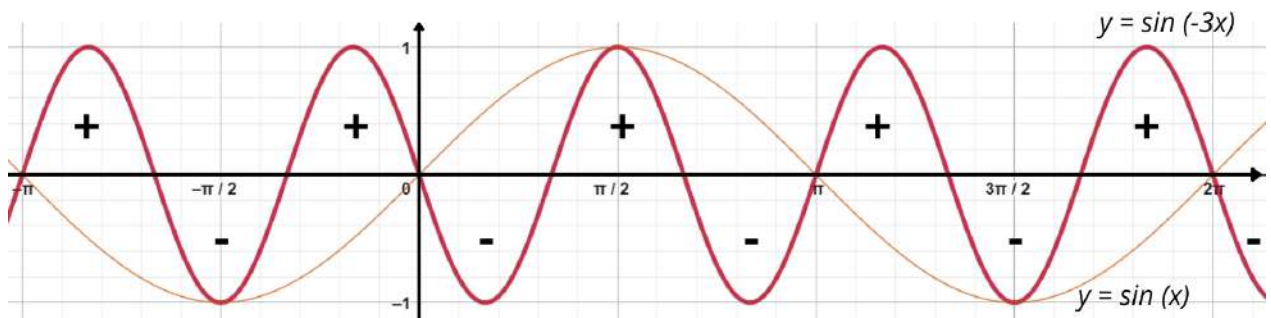
Exemplo. Dada a função $y = \sin(3x)$, como $c = 3$, o período desta função é

$$T = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$$

conforme mostra-se no esboço gráfico a seguir

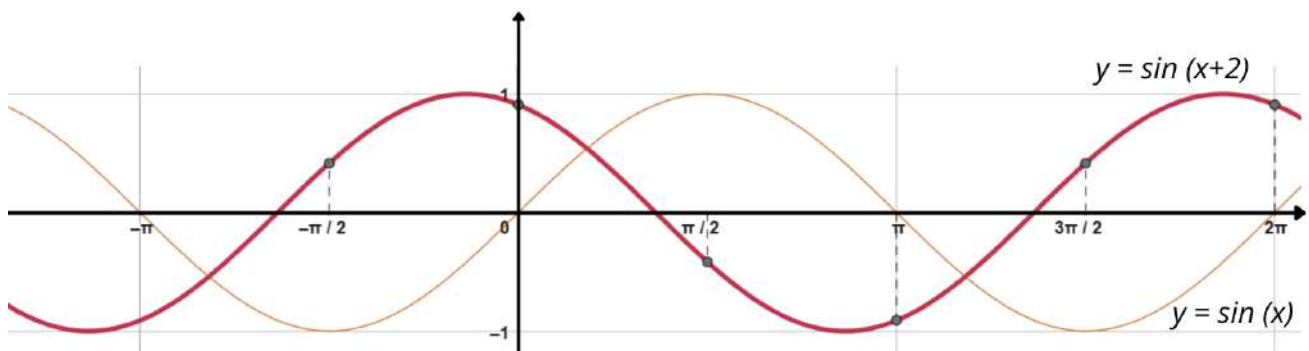


Já para a função $y = \sin(-3x)$, o período é o mesmo, $T = \frac{2\pi}{3}$, porém o sinal da função é invertido em todo seu domínio, em relação a $y = \sin(3x)$, como vemos a seguir.



4. O parâmetro $d \in \mathbb{R}$: Nas funções do tipo $y = \sin(x + d)$, o parâmetro $d \neq 0$ translada (movimenta) o gráfico de $y = \sin(x)$ na **horizontal** em um deslocamento de comprimento igual a $|d|$. Se $d > 0$, o deslocamento será para a esquerda; se $d < 0$, será para a direita.

Exemplo. Considere a função $y = \sin(x + 2)$. Em relação ao gráfico de $y = \sin(x)$, como $d > 0$, há um deslocamento de comprimento 2 para a esquerda, conforme indicado no esboço a seguir.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Questão 1. Dada a função seno $f(t) = 4 - 2 \cdot \sin\left(\frac{2}{3}t\right)$, calcule $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Solução. Com as informações dadas, queremos calcular

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 - 2 \cdot \sin\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 - 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

como $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, temos

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 - 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 - 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$$

Questão 2. Dada a função seno $f(t) = -4 \cdot \sin\left(t - \frac{\pi}{12}\right)$, determine o valor t , com $0 < t < \frac{25\pi}{12}$, para o qual $f(t) = -2\sqrt{2}$.

Solução. Substituindo $f(t) = -2\sqrt{2}$ na função, temos

$$-2\sqrt{2} = -4 \cdot \sin\left(t - \frac{\pi}{12}\right)$$

multiplicando por (-1)

$$2\sqrt{2} = 4 \cdot \sin\left(t - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{4} = \sin\left(t - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(t - \frac{\pi}{12}\right)$$

Da última igualdade, tem de ocorrer

$$t - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

ou

$$t - \frac{\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$t = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$$

$$t = \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}$$

$$t = \frac{3\pi}{12} + \frac{\pi}{12}$$

$$t = \frac{12\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} + \frac{\pi}{12}$$

$$t = \frac{4\pi}{12}$$

$$t = \frac{10\pi}{12}$$

$$t = \frac{\pi}{3}$$

$$t = \frac{5\pi}{6}$$

Questão 3. Uma função real definida por $f(x) = b \cdot \sin(c \cdot x)$ tem período $\frac{\pi}{4}$ e imagem $[-10, 10]$. Qual a lei dessa função?

Solução. Precisamos determinar os parâmetros b e c . A partir da imagem $[-10, 10]$, podemos determinar a amplitude que, da lei da função, corresponde a $|b|$. Assim, nota-se que a linha média da função é o próprio eixo das abscissas (eixo x), sendo a amplitude da função igual a 10, ou seja, $|b| = 10$ e, assim, $b = \pm 10$.

Agora, o parâmetro c é relacionado ao período T da função seno pela fórmula $T = \frac{2\pi}{|c|}$. Desta forma,

$$T = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{|c|} \Rightarrow |c| = 8 \Rightarrow c = \pm 8$$

Com os valores obtidos, podemos afirmar que a lei da função pode ser

$$f(x) = 10 \cdot \sin(8x) ; f(x) = 10 \cdot \sin(-8x) ; f(x) = -10 \cdot \sin(8x) \text{ ou } f(x) = -10 \cdot \sin(-8x).$$

Questão 4. (Toda Matéria) Um cometa com órbita elíptica passa próximo à Terra em intervalos regulares descritos pela função $c(t) = \sin\left(\frac{2}{3}t\right)$ onde t representa o intervalo entre suas aparições em dezenas de anos. Suponha que a última aparição do cometa foi registrada em 1982. Este cometa passará pela Terra novamente em

- a) 2015 b) 2035 c) 2076 d) 2095

Solução. Devemos lembrar que dado um ângulo t_1 , cuja imagem é $f(t_1)$, a definição de período T da função garante que existe um ângulo $t_2 > t_1$ para o qual $f(t_2) = f(t_1)$, com as mesmas características, e esse ângulo é

$$t_2 = t_1 + T$$

Sendo assim, com o parâmetro $c = \frac{2}{3}$, podemos determinar o período T por

$$T = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 2\pi \cdot \frac{3}{2} = 3\pi$$

Assim, adotando $t_1 = 0$ para o ano 1982, última passagem do cometa, este retornará a ser avistado da Terra depois de 3π décadas, ou seja

$$3\pi \cdot 10 \approx 94,2 \text{ anos}$$

Portanto, em 2076.

Questão 5. (Pucpr Medicina 2019) Supondo que, por motivos de segurança, em um determinado porto, certos navios são autorizados a atracar (ou permanecer ancorados) somente durante os intervalos de tempo em que a profundidade no canal desse porto não é inferior a 13 metros e que devido ao comportamento das marés essa profundidade P , em metros, varia em função do tempo t , em horas, de acordo com a função

$$P(t) = 10,5 + 5 \cdot \sin\left(t \cdot \frac{\pi}{12}\right)$$

durante quanto tempo, aproximadamente, uma dessas embarcações poderá ficar ancorada no referido porto se a mesma atracar às 4 horas?

- a) 2 horas b) 4 horas c) 6 horas d) 8 horas e) 10 horas

Solução. Do enunciado, temos que $P(t) \geq 13$, ou seja,

$$\sin\left(t \cdot \frac{\pi}{12}\right) \geq \frac{1}{2}$$

$$10,5 + 5 \cdot \sin\left(t \cdot \frac{\pi}{12}\right) \geq 13$$

$$5 \cdot \sin\left(t \cdot \frac{\pi}{12}\right) \geq 13 - 10,5$$

$$5 \cdot \sin\left(t \cdot \frac{\pi}{12}\right) \geq 2,5$$

$$\sin\left(t \cdot \frac{\pi}{12}\right) \geq \frac{2,5}{5}$$

Da última desigualdade, conclui-se que

$$\frac{\pi}{6} \leq t \cdot \frac{\pi}{12} \leq \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{6} \leq t \cdot \frac{\pi}{12} \leq \frac{5\pi}{6}$$

Multiplicando as desigualdades por $\frac{1}{\pi}$,

$$\frac{1}{6} \leq \frac{t}{12} \leq \frac{5}{6}$$

Multiplicando as desigualdades por 12,

$$\frac{1}{6} \leq \frac{t}{12} \leq \frac{5}{6}$$

$$2 \leq t \leq 10$$

Portanto, uma embarcação pode ficar das 2h às 10h e o tempo de permanência da embarcação descrita é de 6h, permanecendo atracada das 4h às 10h.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Questão 1. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seno com a lei

$$f(x) = 10 - 4\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

calcule:

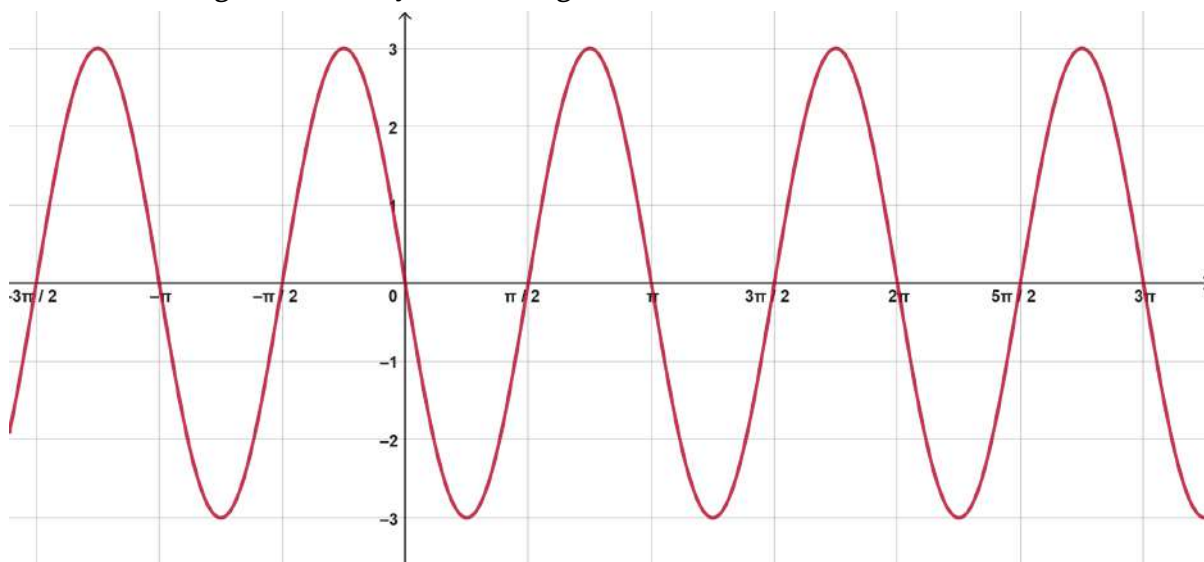
a) $f(0)$

b) $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

c) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$

d) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Questão 2. Analise o gráfico da função seno a seguir.



Determine valores dos parâmetros a , b , c , e d .

Questão 3. Uma função seno tem período $T = \frac{\pi}{6}$. Qual o valor do parâmetro c na representação algébrica dessa função?

Questão 4. Os estudantes de uma comunidade ribeirinha, durante as atividades voltadas à introdução à Astronomia, determinaram uma lei matemática que descreve, em função do tempo, a altura h , em metro, do nível do rio à frente de suas casas em certo dia. Eles chegaram à lei

$$h(t) = 2 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

Determine:

a) A amplitude do gráfico da função.

b) O período da função.

c) O nível do rio quando $t = 6$ h.

d) O tempo t , entre 0 h e 12 h, em que ocorreu a primeira maré alta.

e) O tempo, entre 0 h e 12 h, em que ocorreu a primeira maré baixa.

Questão 5. Em uma determinada região, o volume médio semanal de chuva $P(t)$, em milímetros, determinado em função do tempo t , pode ser aproximado pela função em que

$$P(t) = 100 + 80 \cdot \text{sen} \left(t \cdot \frac{\pi}{20} \right)$$

Sabendo que essa função se aplicou ao período de 40 semanas, o maior índice pluviométrico foi aferido na semana

- a) 1 b) 7 c) 10 d) 25 e) 38

Questão 6. (Ifsul 2015) Corrente alternada é a corrente elétrica na qual a intensidade e a direção são grandezas que variam ciclicamente. Em um circuito de potência de corrente alternada, a forma da onda mais utilizada é a onda senoidal, no entanto, ela pode se apresentar de outras formas como, por exemplo, a onda triangular e a onda quadrada.

Disponível em: <http://www.brasilecola.com/fisica/corrente-alternada.htm>. Acesso: 14 abr. 2015. (Adaptado)

A função

$$f(t) = 30 \cdot \text{sen} \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t - \pi}{5} \right)$$

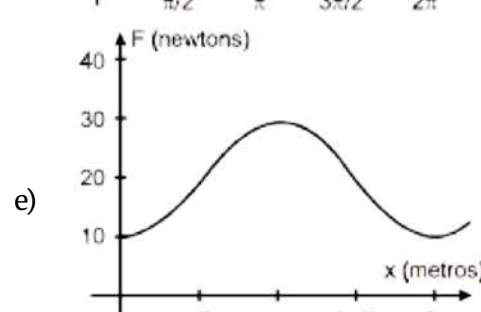
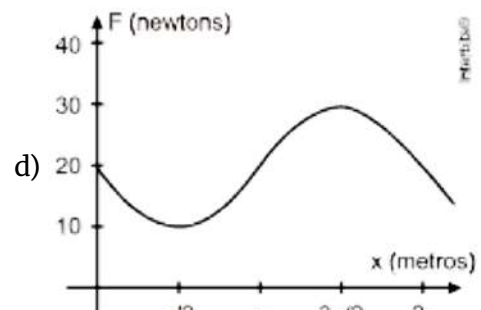
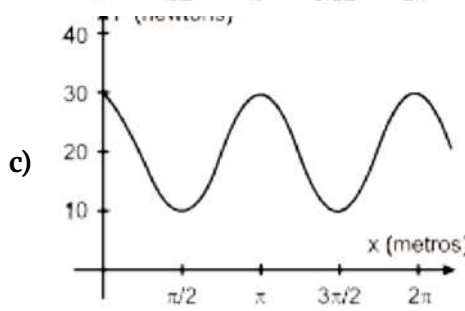
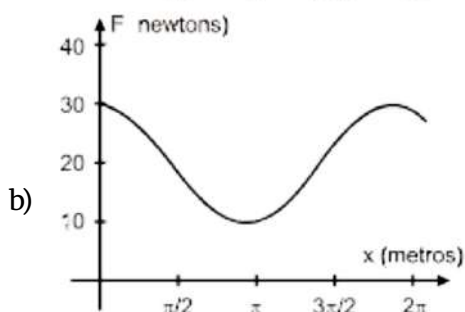
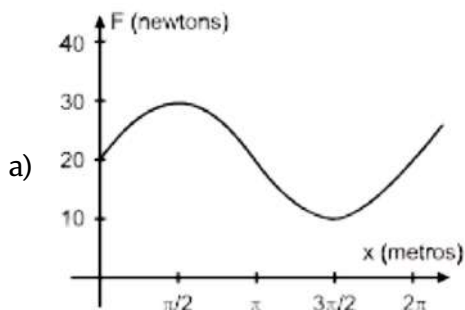
expressa a corrente alternada de um circuito em função do tempo, dado em segundos.

Qual é o período dessa função?

- a) 3s b) 4s c) 5s d) 6s

Questão 7. (Ucs 2012) Para colocar um objeto em movimento e deslocá-lo sobre uma trajetória retilínea por x metros, é necessário aplicar uma força de $20 + 10 \cdot \text{sen}(x)$ newtons sobre ele.

Em qual dos gráficos abaixo, no intervalo $[0, 3]$, está representada a relação entre a força aplicada e a distância, quando o objeto é deslocado até 3 metros?



Questão 8. (Ucs 2014) Suponha que, em determinado lugar, a temperatura média diária T , em $^{\circ}\text{C}$, possa ser expressa, em função do tempo t , em dias decorridos desde o início do ano, por

$$T(t) = 14 + 12 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi(t - 105)}{364} \right)$$

Segundo esse modelo matemático, a temperatura média máxima nesse lugar, ocorre, no mês de

- a) julho. b) setembro. c) junho. d) dezembro. e) março.

Questão 9. (Upe-ssa 3 2022) Um veículo percorre, com velocidade constante, uma estrada retilínea. Em uma de suas rodas, com 50 cm de diâmetro, prende-se um chiclete. No instante $t = 0$ em que ocorre o primeiro contato do chiclete com a roda, a altura h do chiclete em relação ao nível da estrada é igual a 0. À medida que a roda gira, a altura h do chiclete em relação ao nível da estrada, em centímetros, varia periodicamente em função do tempo t decorrido após o primeiro contato do chiclete com a roda, em segundos.

Sabendo-se que a roda dá uma volta completa a cada 0,5 segundo, qual das seguintes funções melhor descreve a altura h em função de t ?

- a) $h(t) = 25 + 25 \cdot \text{sen} \left(4\pi t + \frac{3\pi}{2} \right)$ d) $h(t) = 25 - 25 \cdot \text{sen} \left(0,5\pi t + \frac{3\pi}{2} \right)$
b) $h(t) = 25 + 25 \cdot \text{sen} (4\pi t)$ e) $h(t) = 25 + 25 \cdot \text{sen} (0,5\pi t)$
c) $h(t) = 25 - 25 \cdot \text{sen} (\pi t)$

RASCUNHO

FUNÇÃO COSSENO

Definição: Dados $a, b \neq 0, c \neq 0, d \in \mathbb{R}$, chamados de *parâmetros*, a função cosseno é definida por $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em que um ângulo³ $(x = \theta) \mapsto y \in \mathbb{R}$ (lê-se que $x = \theta$ é levado a um número real y pela função f), de forma que

$$y = a + b \cdot \cos(cx + d)$$

Em uma linguagem mais informal, esse tipo de função tem apenas a razão trigonométrica cosseno em sua estrutura, com a variável x definida como ângulo, ou determinando um ângulo.

Exemplos. A seguir, as funções apresentadas são funções cosseno.

a) $y = \cos(x)$

c) $h(x) = \cos(x + \pi)$

b) $f(x) = -10 + \cos(x)$

d) $y = 1 + 4 \cdot \cos\left(5x - \frac{3\pi}{2}\right)$

Domínio e Imagem da função cosseno

Seja f uma função cosseno, dada com a estrutura geral apresentada acima.

- Na função cosseno, o domínio é todo o conjunto dos números Reais $\mathbb{R}$;
- O conjunto imagem de uma função cosseno com $y = a + b \cdot \cos(cx + d)$ é

$$Im(f) = [a - b; a + b], \text{ se } b > 0.$$

$$Im(f) = [a + b; a - b], \text{ se } b < 0.$$

Chegamos a essas imagens a partir das deduções seguintes:

- Sabemos que para qualquer ângulo θ , temos

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$$

- Fazendo, então, $\theta = cx + d$, temos

$$-1 \leq \cos(cx + d) \leq 1$$

- A seguir, multiplicamos a desigualdade acima por b e, assim, temos as duas possibilidades abaixo, para $b > 0$ (à esquerda) e $b < 0$ (à direita).

Se $b > 0$,

$$-b \leq b \cdot \cos(cx + d) \leq b$$

Se $b < 0$,

$$-b \geq b \cdot \cos(cx + d) \geq b$$

- Por fim, somando o valor de a , temos

Se $b > 0$,

$$a - b \leq a + b \cdot \cos(cx + d) \leq a + b$$

Se $b < 0$,

$$a - b \geq a + b \cdot \cos(cx + d) \geq a + b$$

ou ainda,

$$a - b \leq a + b \cdot \cos(cx + d) \leq a + b$$

$$a + b \leq a + b \cdot \cos(cx + d) \leq a - b$$

e, portanto, como $y = a + b \cdot \cos(cx + d)$, temos que

$$a - b \leq y \leq a + b$$

$$a + b \leq y \leq a - b$$

Exemplo. Dada uma função f onde $y = 1 - 3 \cdot \cos(x - \pi)$. Como $b = -3 < 0$, então, as imagens da função formam o intervalo:

$$Im(f) = [1 + (-3); 1 - (-3)] = [-2, 4]$$

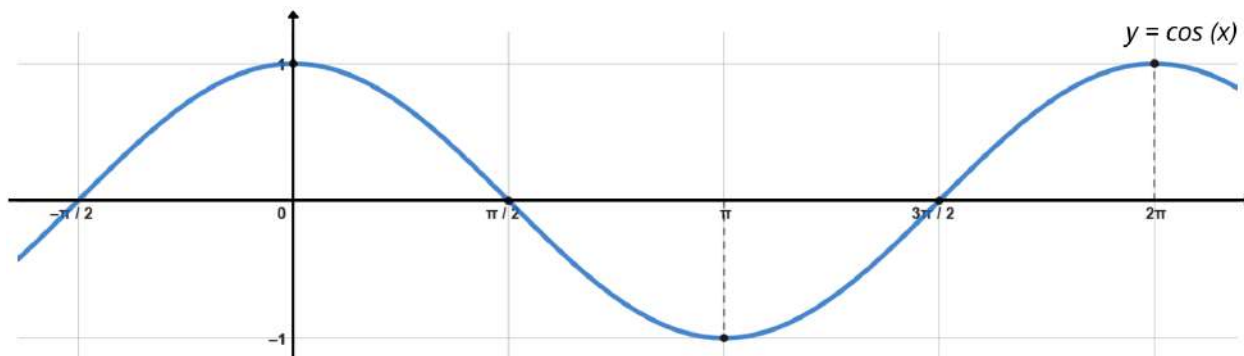
³ O ângulo é dado em Radiano, portanto é um número real. No entanto, nada impede que a medida do ângulo seja usada em graus, desde que respeitada a equivalência entre as medidas.

Representação gráfica da função cosseno

Para explorar a representação do gráfico de uma função cosseno, primeiro será apresentado o esboço da forma mais simples desta função e, no tópico seguinte, o efeito de cada parâmetro na representação da função dada, em relação ao gráfico da função $y = \cos(x)$.

- **Representação gráfica da função** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **com** $y = \cos(x)$.

Este é o caso mais simples de função cosseno. O gráfico, neste caso, apresenta o comportamento a seguir.



Perceba como o gráfico se comporta nos intervalos abaixo, dados alguns valores para x .

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Ângulo x	$\cos(x)$
0	1
$\frac{\pi}{8}$	0.924
$\frac{\pi}{4}$	0.707
$\frac{3\pi}{8}$	0.383
$\frac{\pi}{2}$	0

f é decrescente

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$$

Ângulo x	$\cos(x)$
$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{5\pi}{8}$	-0.383
$\frac{3\pi}{4}$	-0.707
$\frac{7\pi}{8}$	-0.924
π	-1

f é decrescente

$$\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$$

Ângulo x	$\cos(x)$
π	-1
$\frac{9\pi}{8}$	-0.924
$\frac{5\pi}{4}$	-0.707
$\frac{11\pi}{8}$	-0.383
$\frac{3\pi}{2}$	0

f é crescente

$$\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$$

Ângulo x	$\cos(x)$
$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{13\pi}{8}$	0.383
$\frac{7\pi}{4}$	0.707
$\frac{15\pi}{8}$	0.924
2π	1

f é crescente

- **Período** : Percebe-se que fora do intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$, a função está repetindo o padrão esboçado neste intervalo. Isso nos diz, então, que 2π é o período T desta função especificamente. Assim,

$$T = 2\pi \text{ rad}$$

- **Amplitude**: Nesta função, como a distância da linha média do gráfico, equivalente neste caso ao eixo das abscissas, até os pontos de máximo ou de mínimo da função é 1, esta é a amplitude da função $y = \cos(x)$.

- **Pontos de Máximo**: Neste esboço, vemos os pontos de máximo: $(0, 1)$ e $(2\pi, 1)$. Mas, os pontos

$$(x, y) = (k \cdot 2\pi, 1), \text{ com } k \in \mathbb{Z},$$

são todos pontos de máximo no gráfico da função $y = \cos(x)$.

- **Pontos de Mínimo**: Neste esboço, o único ponto de mínimo visível é $(\pi, -1)$. Mas, os pontos do tipo

$$(x, y) = (\pi + k \cdot 2\pi, -1), \text{ com } k \in \mathbb{Z},$$

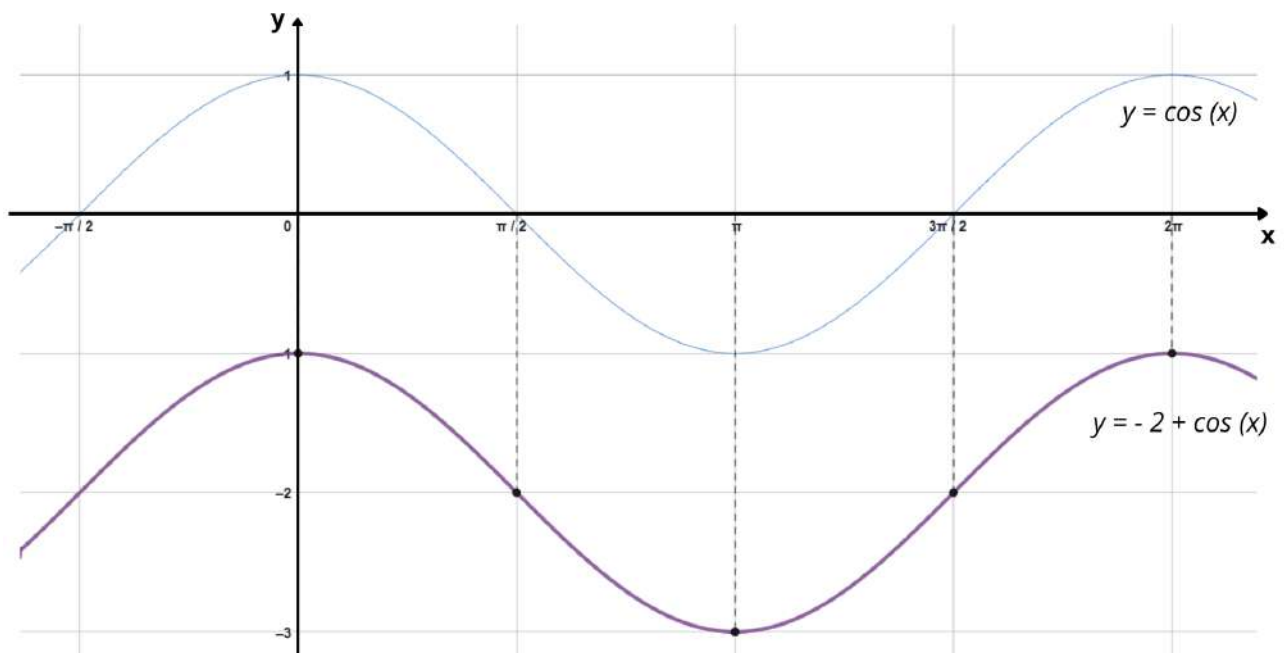
são todos pontos de mínimo no gráfico da função $y = \cos(x)$.

Efeitos dos parâmetros a, b, c e d na representação gráfica da função cosseno

Os efeitos dos parâmetros $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ são os mesmos evidenciados para a função seno. A seguir, exemplificamos cada caso.

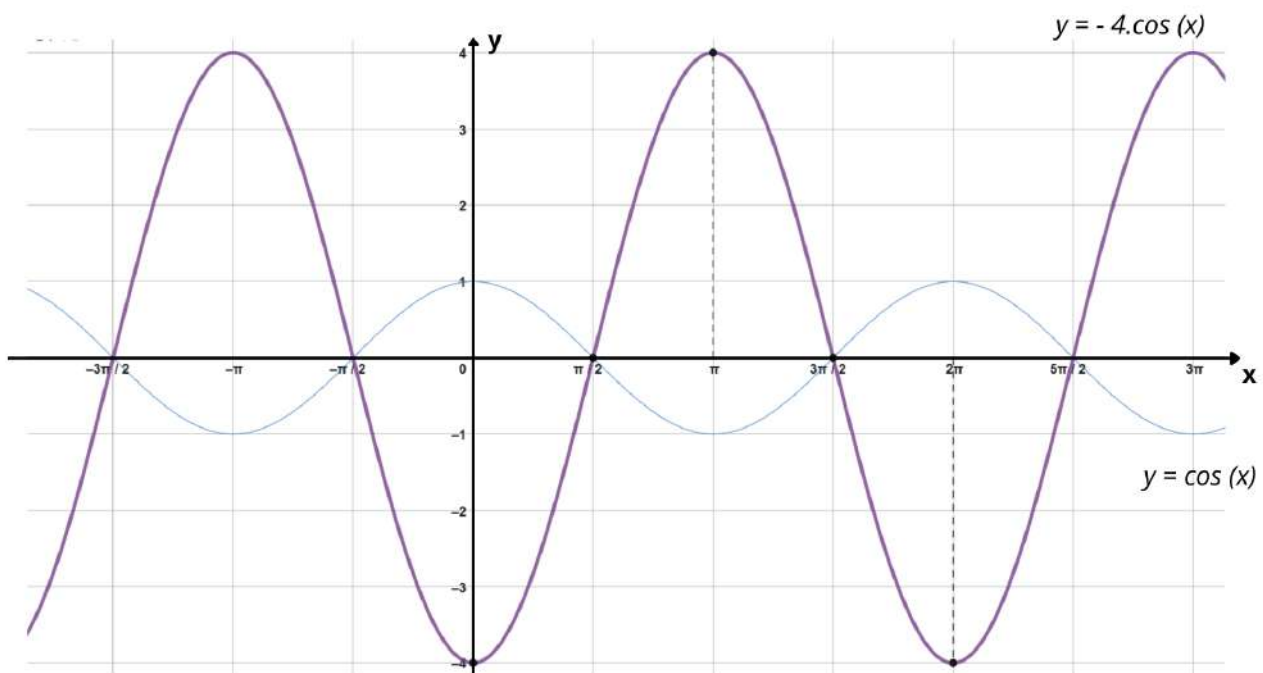
- **Efeito do parâmetro a**

Exemplo. Efeito de translação do gráfico da função com $f(x) = -2 + \cos(x)$, onde $a = -2$. Como se vê a seguir, o gráfico de f está transladado em 2 unidades para baixo, comparado ao gráfico de $y = \cos(x)$.



- **Efeito do parâmetro b**

Exemplo. Efeito de prolongamento vertical do gráfico, em relação a $y = \cos(x)$, na função $f(x) = -4 \cdot \cos(x)$, onde $b = -4$.



- **Efeito do parâmetro c**

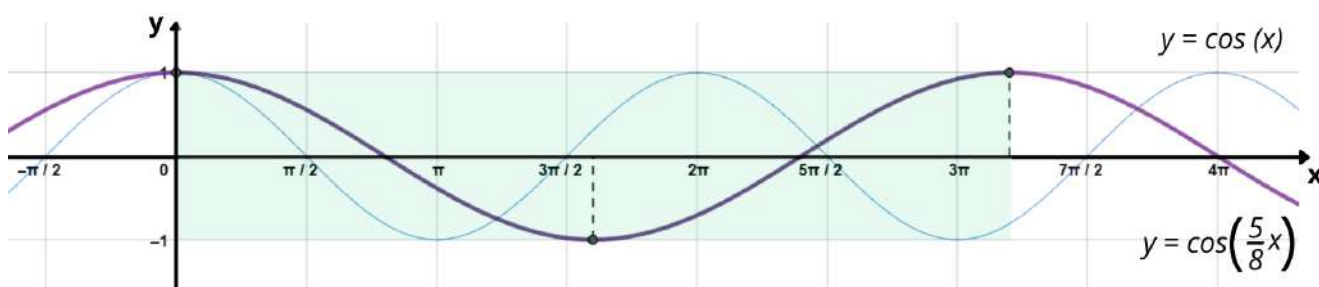
Primeiro, o período na função cosseno também é calculado em função do parâmetro c . Dada uma função cosseno qualquer, seu período é determinado pela relação:

$$T = \frac{2\pi}{|c|}$$

Exemplo. Na função $y = \cos\left(\frac{5}{8}x\right)$, como $c = \frac{5}{8}$, o período desta função é

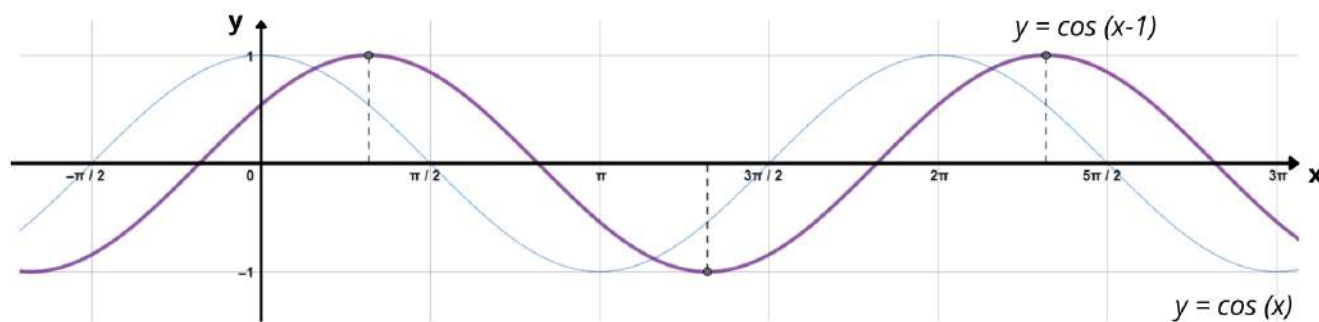
$$T = \frac{2\pi}{|c|} = \frac{2\pi}{|\frac{5}{8}|} = \frac{2\pi}{\frac{5}{8}} = 2\pi \cdot \frac{8}{5} = \frac{16\pi}{5}$$

como $0 < c = \frac{5}{8} < 1$, o efeito não será de encurtamento horizontal do período da função, mas de prolongamento, conforme vê-se no esboço a seguir



- **Efeito do parâmetro d**

Exemplo. Considere a função $y = \cos(x - 1)$. Em relação ao gráfico de $y = \cos(x)$, como $d < 0$, há um deslocamento de comprimento 1 para a direita, conforme indicado no esboço a seguir.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Questão 1. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função cosseno com a lei

$$f(x) = -1 - \cos\left(x \cdot \frac{\pi}{3}\right)$$

calcule:

- a) $f(0)$ b) $f(3)$ c) $f\left(\frac{9}{2}\right)$ d) $f\left(-\frac{1}{2}\right)$

Solução.

a) Se queremos determinar $f(0)$, então $x = 0$. Sendo assim,

$$f(0) = -1 - \cos\left(0 \cdot \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow f(0) = -1 - \cos(0) \Rightarrow f(0) = -1 - 1 = -2$$

b) Se queremos determinar $f(3)$, então $x = 3$. Sendo assim,

$$f(3) = -1 - \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow f(3) = -1 - \cos(\pi) \Rightarrow f(3) = -1 - (-1) = 0$$

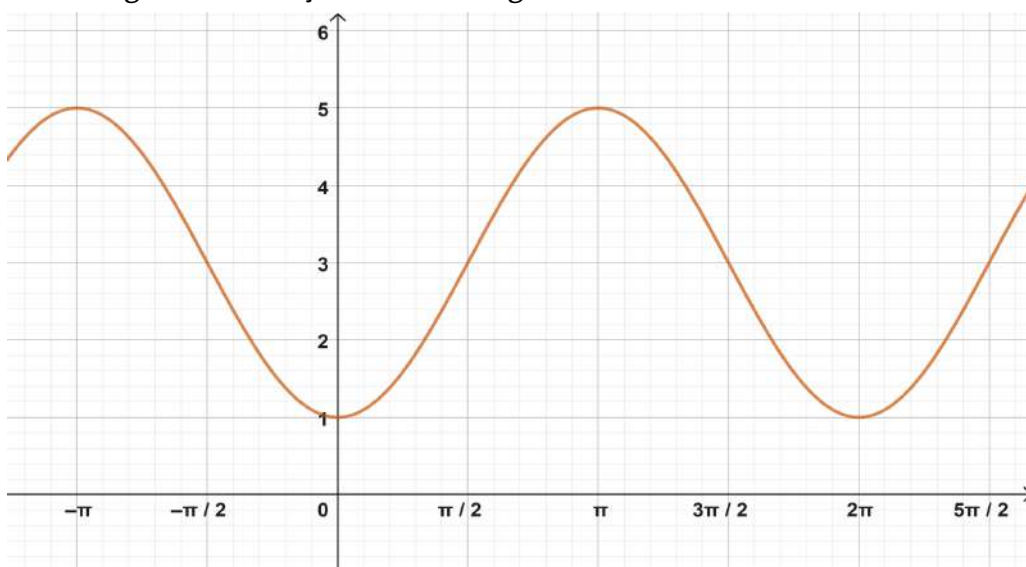
c) Se queremos determinar $f\left(\frac{9}{2}\right)$, então $x = \frac{9}{2}$. Sendo assim,

$$f\left(\frac{9}{2}\right) = -1 - \cos\left(\frac{9}{2} \cdot \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow f\left(\frac{9}{2}\right) = -1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{9}{2}\right) = -1 - 0 = -1$$

d) Se queremos determinar $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, então $x = -\frac{1}{2}$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= -1 - \cos\left(\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 - \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ &\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{2+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Questão 2. Analise o gráfico da função cosseno a seguir.



Sabendo que a lei que determina esse gráfico é do tipo $y = a + b \cdot \cos(c \cdot x)$ Determine os valores dos parâmetros a , b e c .

Solução. A representação gráfica da função permite observar que a linha média do gráfico é a reta $y = 3$, logo, temos o parâmetro $a = 3$, indicando a translação sofrida. Agora, como a distância entre a linha média do gráfico e os pontos de máximo e de mínimo é $5 - 3 = 3 - 1 = 2$, a amplitude da função é igual a 2, porém, temos o parâmetro $b = -2$, pois o sinal da função está invertido, o que pode ser verificado já para $x = 0$, cuja imagem é mínimo da função; com $b > 0$ teríamos um máximo da função para essa coordenada. Por fim, como o período da função é $T = 2\pi$, permite a conclusão de que temos $|c| = 1$ e, assim, $c = \pm 1$, que pode facilmente ser verificado com a fórmula do período. Portanto, a lei da função que gera a representação gráfica acima é

$$y = 3 - 2 \cdot \cos(x) \quad \text{ou} \quad y = 3 - 2 \cdot \cos(-x)$$

Questão 3. Uma função cosseno tem período $T = 10\pi$. Qual o valor do parâmetro c na representação algébrica dessa função?

Solução. Sabendo que $T = 10\pi$, podemos determinar o parâmetro c da lei da função por

$$T = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow 10\pi = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = \frac{2\pi}{10\pi} \Rightarrow |c| = \frac{1}{5} \Rightarrow c = -\frac{1}{5} \text{ ou } \frac{1}{5}$$

Questão 4. (UFSM 2007 – Adaptada) Uma gráfica que confeccionou material de campanha determina o custo unitário de um de seus produtos, em reais, de acordo com a lei $C(t) = 200 + 120 \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{5}\right)$, com t medido em horas de trabalho. Assim, os custos máximos e mínimo desse produto são:

- A) 320 e 200 B) 200 e 120 C) 200 e 80 D) 320 e 80 E) 120 e 80

Solução. Esta é uma solução possível. Considere que, para qualquer ângulo θ , temos

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$$

Sendo assim, para $\theta = \left(\pi \cdot \frac{t}{5}\right)$, temos

$$-1 \leq \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{5}\right) \leq 1$$

Multiplicando a desigualdade anterior por 120, obtemos

$$-120 \leq 120 \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{5}\right) \leq 120$$

Por fim, somando 200 aos membros da desigualdade acima, temos

$$200 - 120 \leq 200 + 120 \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{5}\right) \leq 200 + 120$$

$$80 \leq 200 + 120 \cdot \cos\left(\pi \cdot \frac{t}{5}\right) \leq 320$$

ou ainda,

$$80 \leq c(t) \leq 320$$

Portanto, os valores máximo e mínimo dessa função são, respectivamente, R\$ 320,00 e R\$ 80,00.

Questão 5. (Enem 2011) Um satélite de telecomunicações, t minutos após ter atingido sua órbita, está a r quilômetros de distância do centro da Terra. Quando r assume seus valores máximo e mínimo, diz-se que o satélite atingiu o apogeu e o perigeu, respectivamente. Suponha que, para esse satélite, o valor de r em função de t seja dado por:

$$r(t) = \frac{5865}{1 + 0,15 \times \cos(0,06t)}$$

Um cientista monitora o movimento desse satélite para controlar o seu afastamento do centro da Terra. Para isso, ele precisa calcular a soma dos valores de r , no apogeu e no perigeu, representada por S . O cientista deveria concluir que, periodicamente, S atinge o valor de:

- A) 12 765 km C) 11 730 km E) 5 865 km
B) 12 000 km D) 10 965 km

Solução. Primeiramente, devemos lembrar que em um termo algébrico fracionário cujo o numerador é constante e o denominador é variável, seu maior valor será obtido quando o denominador atingir seu menor valor. Em contrapartida, o menor valor do termo algébrico será alcançado quando o denominador atingir seu maior valor. Neste sentido, serão determinados os valores máximo e mínimo do denominador $1 + 0,15 \cdot \cos(0,06 \cdot t)$, partindo do entendimento de que, para qualquer ângulo θ , temos

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$$

Fazendo $\theta = 0,06 \cdot t$

$$-1 \leq \cos(0,06 \cdot t) \leq 1$$

Multiplicando a desigualdade anterior por 0,15

$$-0,15 \leq 0,15 \cdot \cos(0,06 \cdot t) \leq 0,15$$

Somando 1,

$$1 - 0,15 \leq 1 + 0,15 \cdot \cos(0,06 \cdot t) \leq 1 + 0,15$$

$$0,85 \leq 1 + 0,15 \cdot \cos(0,06 \cdot t) \leq 1,15$$

Desta forma, chamando de $r(t)_{\max}$ e $r(t)_{\min}$ os valores máximo e mínimo da função, temos

$$r(t)_{\max} = \frac{5865}{0,85}$$

$$r(t)_{\min} = \frac{5865}{1,15}$$

$$r(t)_{\max} = 6\,900$$

$$r(t)_{\min} = 5\,100$$

Com os resultados acima, ainda não resolvemos o problema. O enunciado pede a soma S das distâncias no apogeu e no perigeu, ou seja,

$$S = r(t)_{\max} + r(t)_{\min}$$

$$S = 6\,900 + 5\,100$$

$$S = 12\,000$$

Portanto, deveria concluir que $S = 12\,000$ km.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Questão 1. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seno com a lei

$$f(t) = 12 - 10\cos(2t)$$

calcule:

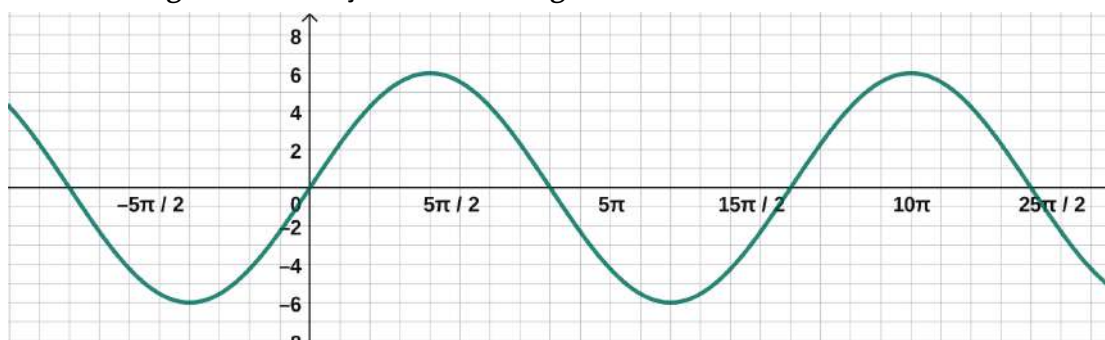
a) $f(0)$

b) $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

c) $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$

d) $f(\pi)$

Questão 2. Analise o gráfico da função cosseno a seguir.



Determine valores dos parâmetros a , b , c , e d .

Questão 3. Uma função cosseno tem período $T = \frac{12\pi}{5}$. Qual o valor do parâmetro c na representação algébrica dessa função?

Questão 4. A temperatura média $T(t)$, em grau Celsius, ao longo de um dia em certa cidade, pôde ser aproximada pela função

$$T(t) = 25 + 7\cos\left(\frac{\pi}{18}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

onde t representa o tempo, em hora, após a meia-noite. Nessas condições, às 15 h a temperatura média era de

- a) 18 °C b) 25 °C c) 28,5 °C d) 29,9 °C e) 32 °C

Questão 5. Em um centro médico para atletas de alto rendimento, foram detectadas pequenas oscilações na frequência cardíaca de um atleta. Observou-se que, devido a processos naturais de regulação do organismo, a frequência cardíaca dele não era exatamente constante, mas oscilava de forma aproximadamente periódica ao longo do tempo. Um modelo matemático gerado dessa observação é

$$f(t) = 92 + 7\cos\left(\frac{\pi t}{30}\right)$$

em que $f(t)$ representa a frequência cardíaca do atleta em bpm (batimentos por minuto) e t representa o tempo, em segundo, contado a partir do início da observação, .

Com base nesse modelo, responda:

- a) Qual é a amplitude da função que modela a variação da frequência cardíaca?
b) Qual é o período da função, isto é, o tempo necessário para que o padrão de variação dos batimentos cardíacos se repita?
c) A maior frequência cardíaca registrada foi de 99 bpm. No primeiro minuto, essa frequência foi registrada após contados quantos segundos?
d) Qual é o valor mínimo da frequência cardíaca previsto por esse modelo?

Questão 6. Em uma determinada região, o volume médio semanal de chuva $P(t)$, em milímetros, determinado em função do tempo t , em semanas, pode ser aproximado pela função em que

$$f(t) = 100 + 80 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{15} \cdot t\right)$$

Sabendo que essa função se aplicou ao período de 40 semanas, o maior índice pluviométrico foi aferido na semana

- a) 1 b) 7 c) 10 d) 25 e) 30

Questão 7. (Ufsm 2015) Cerca de 24,3% da população brasileira é hipertensa, quadro que pode ser agravado pelo consumo excessivo de sal. A variação da pressão sanguínea P (em mmHg) de um certo indivíduo é expressa em função do tempo por

$$P(t) = 100 - 20\cos\left(\frac{8\pi}{3} \cdot t\right)$$

onde t é dado em segundos. Cada período dessa função representa um batimento cardíaco. Analise as afirmativas:

- I. A frequência cardíaca desse indivíduo é de 80 batimentos por minuto.
II. A pressão em $t = 2$ segundos é de 110 mmHg.
III. A amplitude da função $P(t)$ é de 30 mmHg.

Está(ão) correta(s)

- a) apenas I. c) apenas III. e) I, II e III.
b) apenas I e II. d) apenas II e III.

Questão 8. (Enem 2015) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), produtos sazonais são aqueles que apresentam ciclos bem definidos de produção, consumo e preço. Resumidamente, existem épocas do ano em que a sua disponibilidade nos mercados varejistas ora é

escassa, com preços elevados, ora é abundante, com preços mais baixos, o que ocorre no mês de produção máxima da safra. A partir de uma série histórica, observou-se que o preço P , em reais, do quilograma de um certo produto sazonal pode ser descrito pela função

$$P(x) = 8 + 5 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x - \pi}{6}\right)$$

onde x representa o mês do ano, sendo x_1 associado ao mês de janeiro, x_2 ao mês de fevereiro, e assim sucessivamente, até x_{12} associado ao mês de dezembro.

Disponível em: www.ibge.gov.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

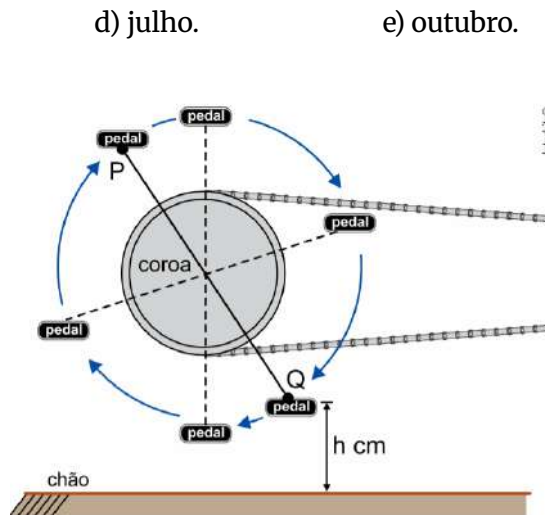
Na safra, o mês de produção máxima desse produto é

- a) janeiro. b) abril. c) junho. d) julho. e) outubro.

Questão 9. Na figura, $\overline{PQ}$ representa o eixo dos pedais de uma bicicleta. A altura do ponto Q ao chão, em centímetros, é $h = 20 + 10 \cdot \cos(\pi t)$ em que t é o tempo, em segundos, contado a partir do momento que o ponto Q está no ponto mais distante do chão.

O comprimento do eixo $\overline{PQ}$ é de

- a) 21 cm. d) 15 cm.
b) 18 cm. e) 12 cm.
c) 20 cm.



FUNÇÃO TANGENTE

Definição: Dados $a, b \neq 0, c \neq 0, d \in \mathbb{R}$, chamados de *parâmetros*, a função tangente é definida por $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ em que um ângulo⁴ $(x = \theta) \mapsto y \in \mathbb{R}$ (lê-se que $x = \theta$ é levado a um número real y pela função f), de forma que

$$y = a + b \cdot \text{tg}(c \cdot x + d)$$

Em uma linguagem mais informal, esse tipo de função tem apenas a razão trigonométrica tangente em sua estrutura, com a variável x definida como ângulo, ou determinando um ângulo.

Exemplos. A seguir, as funções apresentadas são funções cosseno.

- a) $y = \text{tg}(x)$ c) $g(x) = \text{tg}(x - 6)$
b) $f(x) = 1 + \text{tg}(x)$ d) $y = -5 + 12 \cdot \text{tg}\left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$

Domínio e Imagem da função Tangente

Seja f uma função tangente, dada com a estrutura geral apresentada acima.

- Na função tangente, o domínio é o subconjunto do conjunto $\mathbb{R}$ dos números Reais cujos elementos são os valores de x para os quais temos

$$c \cdot x + d \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

ou seja, a função tangente não é definida para os ângulos x , quando $c \cdot x + d$ resulta nos ângulos $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$. Para facilitar a compreensão de quais são esses ângulos, são correspondentes a $90^\circ, 270^\circ, 450^\circ, 630^\circ, \dots$.

⁴ O ângulo é dado em Radiano, portanto é um número real. No entanto, nada impede que a medida do ângulo seja usada em graus, desde que respeitada a equivalência entre as medidas.

Essa afirmação, sobre o domínio da função tangente, pode ser justificada pela relação

$$tg(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

da qual, para $\theta = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, temos

$$tg\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right)}$$

e, daí, como $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right) = 0$, implica na indefinição de $tg\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right)$, ou seja, não existe a tangente desses arcos. O esboço gráfico da função tangente evidenciará este fato mais claramente.

- O conjunto imagem de uma função tangente com $y = a + b \cdot tg(c \cdot x + d)$ é

$$Im(f) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$$

Perceba que para valores de x de 0° até tão próximo de 90° quanto quisermos, as tangentes crescem para muito além de 1. Esse crescimento tende (segue) para o infinito.

Ângulo	0°	10°	30°	60°	80°	88°	89°	$89,5^\circ$	$89,9^\circ$
$\tan(\theta)$	0	0,1763	0,5774	1,7321	5,6713	28,6363	57,2900	114,5887	572,9572

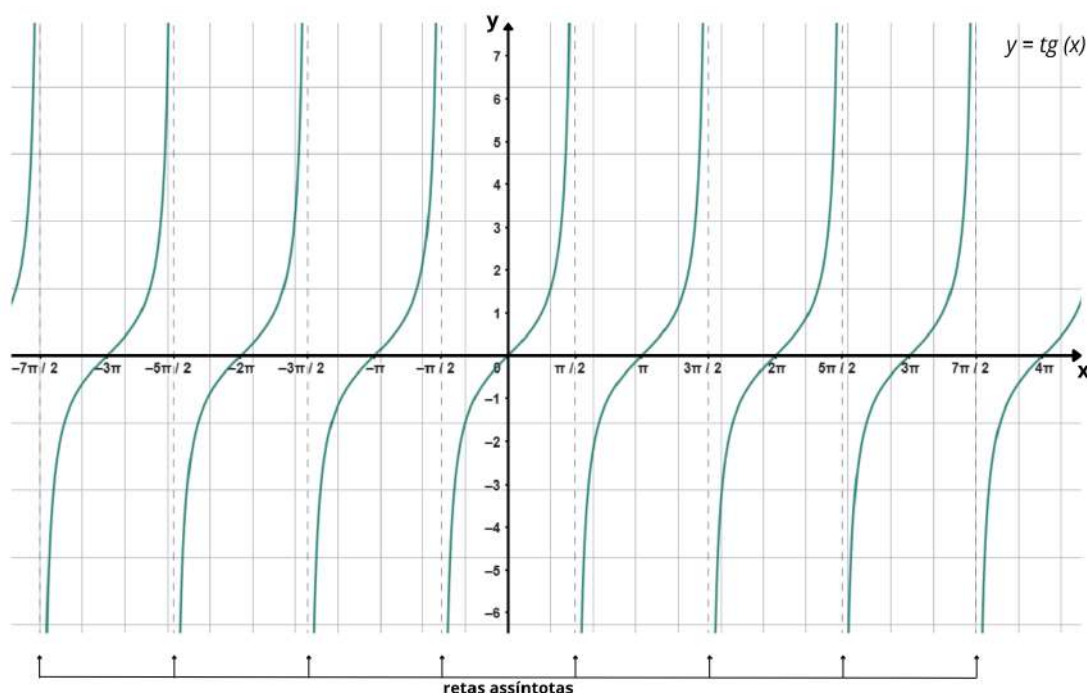
Analogamente, o mesmo acontece no sentido oposto, de 0° até -90° , tendendo, nesse caso, ao infinito negativo.

Representação gráfica da função tangente

Para explorar a representação do gráfico de uma função tangente, primeiro será apresentado o esboço da forma mais simples desta função e, no tópico seguinte, o efeito de cada parâmetro na representação da função dada, em relação ao gráfico da função $y = tg(x)$.

- **Representação gráfica da função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ com $y = tg(x)$.**

Este é o caso mais simples de função tangente. O gráfico, neste caso, apresenta o comportamento a seguir.



As linhas tracejadas indicam as **retas assíntotas** à função $y = tg(x)$, ou seja, são retas das quais a função se aproxima, tanto quanto possível, conforme o x é levado a valores muito grandes ou muito pequenos de y .

Perceba como o gráfico se comporta nos intervalos abaixo, dados alguns valores para x .

Ângulo (rad)	Ângulo (°)	$\tan(x)$
0	0°	0
$\pi/6$	30°	0,5774
$\pi/4$	45°	1
$\pi/3$	60°	1,7321
$4\pi/9$	80°	5,6713
$22\pi/45$	88°	28,6363
$161,982\pi/324$	89,99°	5729,5779
$\pi/2$	90°	não definida

Ângulo (rad)	Ângulo (°)	$\tan(x)$
$162,018\pi/324$	90,01°	-5729,5779
$23\pi/45$	92°	-28,6363
$5\pi/9$	100°	-5,6713
$2\pi/3$	120°	-1,7321
$3\pi/4$	135°	-1
$5\pi/6$	150°	-0,5774
π	180°	0

Em $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, f é crescente

Em $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$, f é crescente

- **Período:** Percebe-se que fora do intervalo $0 \leq x < \pi$, a função está repetindo o padrão esboçado neste intervalo. Isso nos diz, então, que π é o período T desta função especificamente. Assim,

$$T = \pi \text{ rad}$$

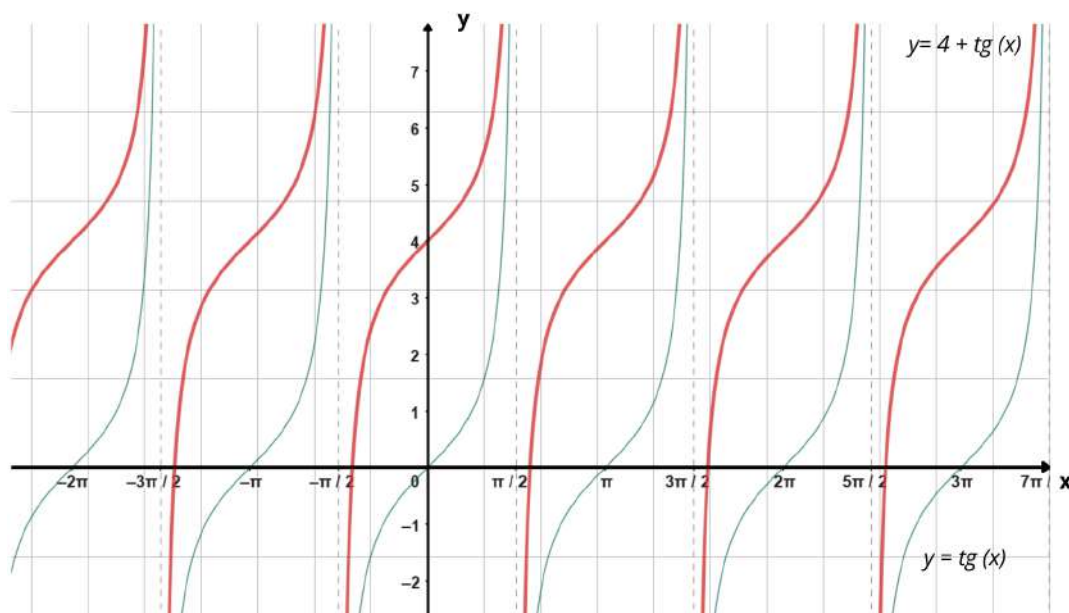
- **Pontos de Máximo e de Mínimo:** Não há pontos de máximo e nem de mínimo para a função $y = tg(x)$, nem para qualquer outra lei de função tangente, pois, conforme aproximamos a variável x de ângulos específicos, conforme exemplificado anteriormente, a imagem cresce infinitamente ou decresce infinitamente.
- **Amplitude:** Como não há máximo e nem mínimo para a função $y = tg(x)$, a amplitude não está definida para esta função. Da mesma forma, não está definida para todas as funções deste tipo.

Efeitos dos parâmetros a , b , c e d na representação gráfica da função tangente

Os efeitos dos parâmetros a , b , c , $d \in \mathbb{R}$ na função tangente são iguais aos observados nas funções seno e cosseno, mas com algumas particularidades. A seguir, exemplificamos cada caso.

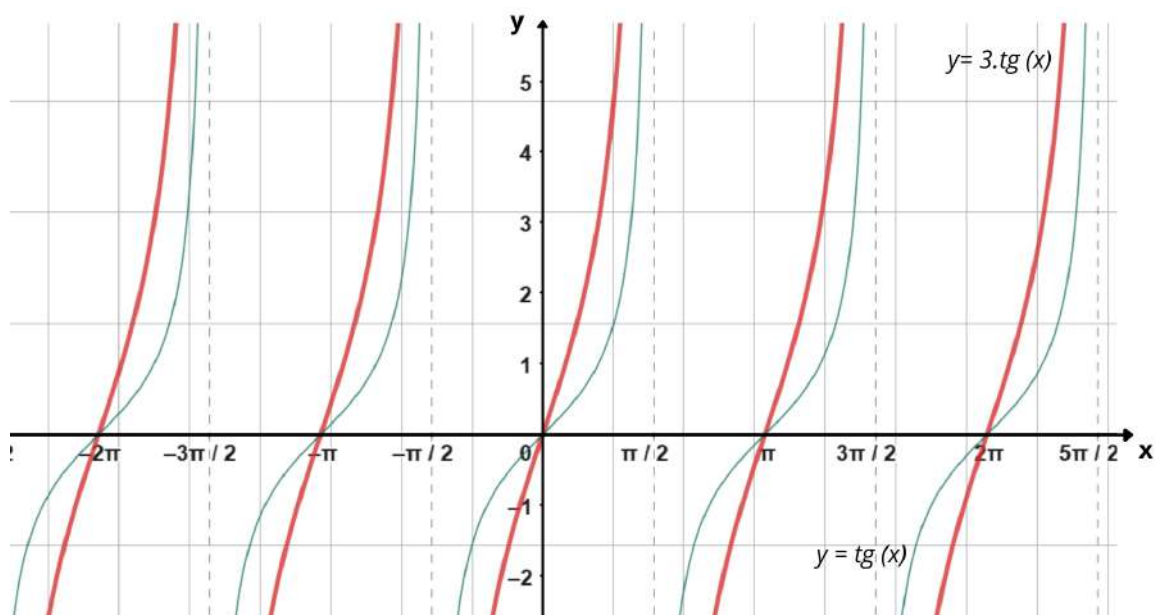
• Efeito do parâmetro a

Exemplo. Efeito de translação do gráfico da função com $f(x) = 4 + tg(x)$, onde $a = 4$. Como se vê a seguir, o gráfico de f está transladado em 4 unidades para cima, comparado ao gráfico de $y = tg(x)$.



- **Efeito do parâmetro b**

Exemplo. Em relação a $y = \operatorname{tg}(x)$, há um efeito de prolongamento vertical do gráfico na função $f(x) = 3 \cdot \operatorname{tg}(x)$, onde $b = 3$. Na prática, o coeficiente b modifica a velocidade com que $f(x)$ cresce, se $b > 0$, ou decresce, se $b < 0$, neste último caso também modificando o sinal da função.



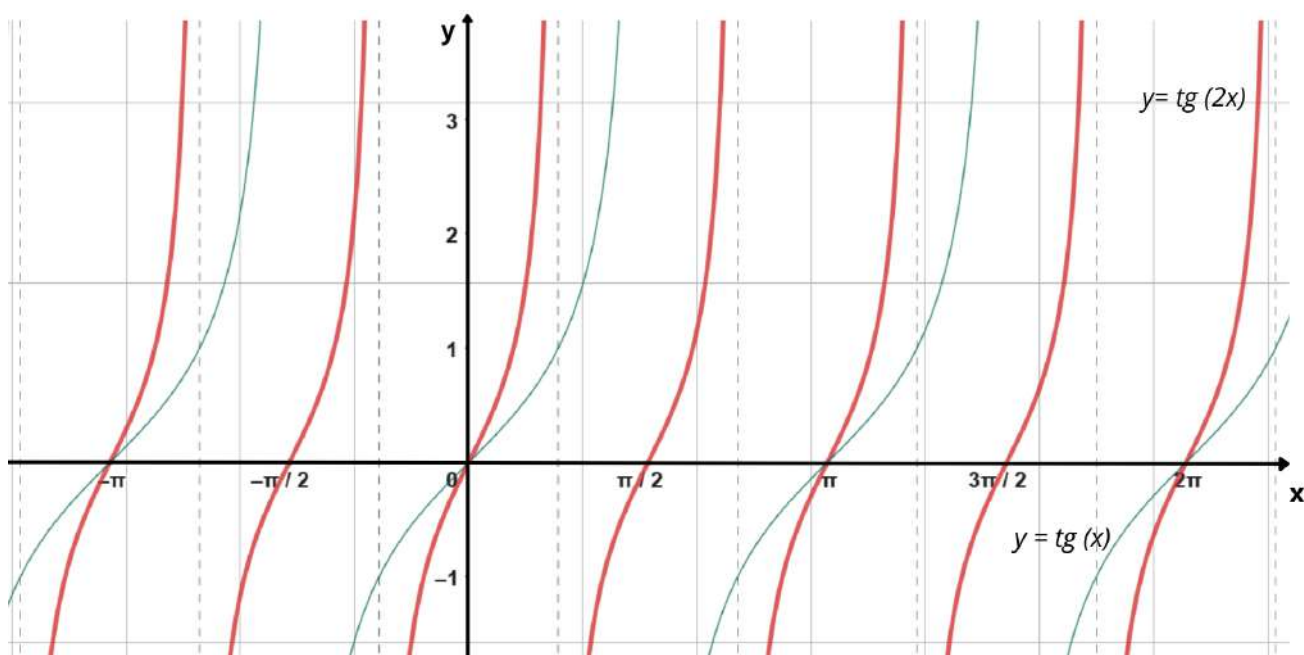
- **Efeito do parâmetro c**

Primeiro, o período na função tangente também é calculado em função do parâmetro c . Dada uma função tangente qualquer, seu período é determinado pela relação:

$$T = \frac{\pi}{|c|}$$

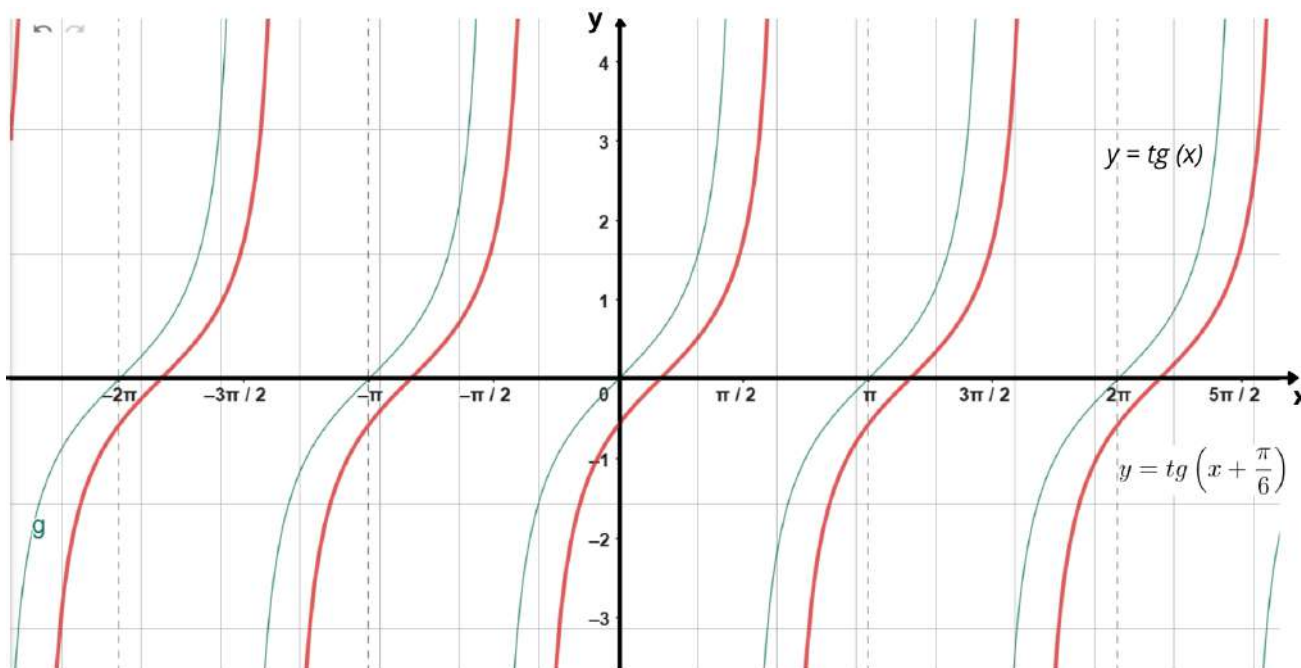
Exemplo. Na função $y = \operatorname{tg}(2x)$, como $c = 2$, o período desta função é

$$T = \frac{\pi}{|c|} = \frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$$



- Efeito do parâmetro d

Exemplo. Considere a função $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$. Em relação ao gráfico de $y = \operatorname{tg}(x)$, como $d > 0$, há um deslocamento de comprimento $\frac{\pi}{6}$ para a direita, conforme indicado no esboço a seguir.



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Questão 1. Considere a função:

$$f(x) = 2 + 3 \cdot \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

- Determine o período da função.
- Encontre a equação das assíntotas verticais.
- Determine o menor valor positivo de x para o qual $f(x) = 2$.

Solução.

a) Como na estrutura da função temos $c = 1$, então, da fórmula $T = \frac{\pi}{|c|}$, obtemos $T = \pi$.

b) As assíntotas da função intersectam o eixo das abscissas nas coordenadas x para as quais a função não é definida, ou seja, é necessário que $x - \frac{\pi}{4}$ seja $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ ou arco cômgruo desses ângulos. Sendo assim,

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi$$

c) Se $f(x) = 2$, então,

$$2 + 3 \cdot \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$3 \cdot \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 - 2$$

$$3 \cdot \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

o que implica dizer que

$$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

e, desta forma,

$$x = \frac{\pi}{4}$$

sendo este o menor valor positivo para o qual se tem $f(x) = 2$.

Questão 2. (GM) Na vastidão do espaço, uma estrela extremamente massiva, ao esgotar seu combustível nuclear no final da vida, não consegue mais resistir à própria gravidade, fazendo com que seu núcleo colapse violentamente para formar um buraco negro. Considere uma estrela cujo núcleo tem densidade de 10^8 kg/cm^3 no instante que colapsa. A densidade $D(t)$ do que agora se torna uma singularidade (centro de um buraco negro) cresce segundo a lei $D(t) = 10^8 + 10^9 \cdot \operatorname{tg}\left(t \cdot \frac{\pi}{420}\right)$, em que t é o tempo de duração, especificamente, desse processo descrito, medido em milissegundos (ms) e tal que $0 \leq t < 210$.

Qual a densidade do núcleo do buraco negro depois de decorridos 140 ms do início da sua formação? (adote: $\sqrt{3} = 1,7$)

Solução. O enunciado pede a densidade do núcleo do buraco negro decorridos 140 ms do início da sua formação, ou seja, quer-se determinar $D(140)$. Sendo assim, temos

$$D(140) = 10^8 + 10^9 \cdot \operatorname{tg}\left(140 \cdot \frac{\pi}{420}\right)$$

$$D(140) = 10^8 + 10^9 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$D(140) = 10^8 + 10^9 \cdot \sqrt{3}$$

como $\sqrt{3} = 1,7$

$$D(140) = 10^8 + 10^9 \cdot 1,7$$

$$D(140) = 10^8 (1 + 10 \cdot 1,7)$$

$$D(140) = 10^8 (1 + 17)$$

$$D(140) = 18 \cdot 10^8$$

$$D(140) = 1,8 \cdot 10^9$$

portanto, decorridos 140 ms, a densidade atingida é de $1,8 \cdot 10^9 \text{ kg/cm}^3$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Questão 1. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tangente com a lei

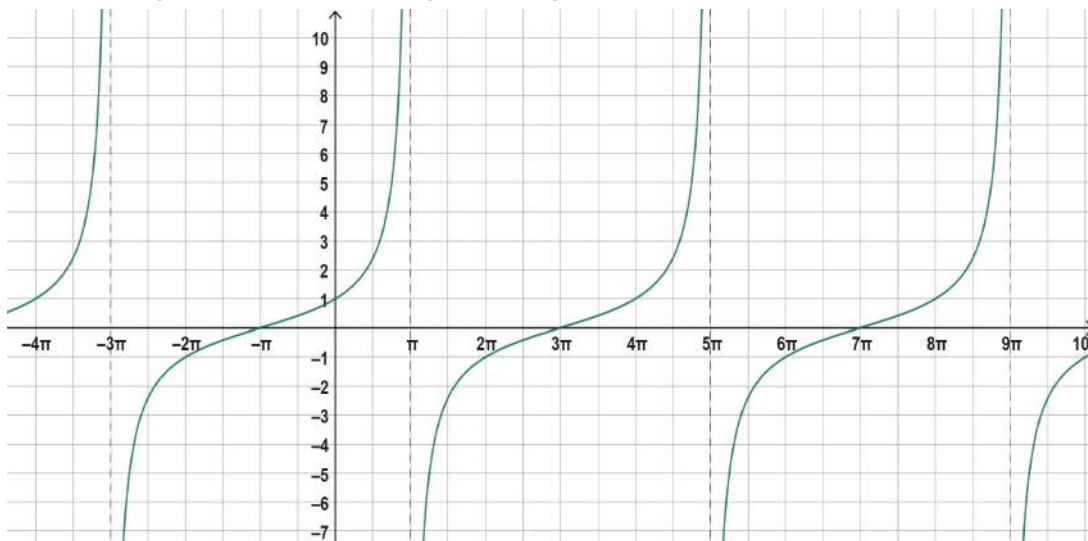
$$f(t) = 20 - \operatorname{tg}\left(\frac{3t}{2} - \pi\right)$$

calcule:

- a) $f(0)$ b) $f(\pi)$ c) $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ d) $f(-\pi)$

Questão 2. Dada a função $f(x) = -3 - 5 \cdot \operatorname{tg}(3\pi x)$, determine o período dessa função.

Questão 3. Analise o gráfico da função tangente a seguir.



Identifique o período da função e, sabendo que a representação algébrica da função é da forma $y = \operatorname{tg}(c \cdot x + d)$, determine os parâmetro c e d .

Questão 4. Uma função tangente tem período $T = \frac{\pi}{12}$. Qual o valor do parâmetro c na representação algébrica dessa função?

Questão 5. Durante uma visita escolar ao planetário, estudantes utilizaram um telescópio para estimar o tamanho de um planeta. O guia, um astrofísico, explicou que o diâmetro real de um astro pode ser estimado a partir do seu ângulo aparente e a distância entre o observador e o planeta. Naquele contexto, os alunos poderiam determinar o diâmetro buscado pela lei

$$L(\theta) = 6 \cdot 10^8 \cdot \operatorname{tg}(\theta)$$

onde $L(\theta)$ é o diâmetro do astro observado e θ é o ângulo aparente de observação, medido em radiano.

Sabendo que esse ângulo aparente era $\theta = \frac{\pi}{6}$, pode-se afirmar que o diâmetro do planeta é de

- a) $3,4 \cdot 10^8 \text{ km}$ b) $3,8 \cdot 10^8 \text{ km}$ c) $4 \cdot 10^8 \text{ km}$ d) $3,4 \cdot 10^{10} \text{ km}$ e) $4 \cdot 10^{10} \text{ km}$



HINO DO PARÁ

LETRA: ARTHUR PORTO

MÚSICA: NICOLINO MILANO

ADAPTAÇÃO E ARRANJO: GAMA MALCHER

Salve, ó terra de ricas florestas,
Fecundadas ao sol do equador!
Teu destino é viver entre festas,
Do progresso, da paz e do amor!
Salve, ó terra de ricas florestas,
Fecundadas ao sol do equador!

Ó Pará, quanto orgulha ser filho,
De um colosso, tão belo, e tão forte;
Juncaremos de flores teu trilho,
Do Brasil, sentinela do Norte.
E a deixar de manter esse brilho,
Preferimos, mil vezes, a morte!

Salve, ó terra de rios gigantes,
D'Amazônia, princesa louçã!
Tudo em ti são encantos vibrantes,
Desde a indústria à rudeza pagã,
Salve, ó terra de rios gigantes,
D'Amazônia, princesa louçã!

Ó Pará, quanto orgulha ser filho,
De um colosso, tão belo, e tão forte;
Juncaremos de flores teu trilho,
Do Brasil, sentinela do Norte.
E a deixar de manter esse brilho,
Preferimos, mil vezes, a morte!

REALIZAÇÃO

SECRETARIA DE
EDUCAÇÃO



**GOVERNO
DO ESTADO
DO PARÁ**