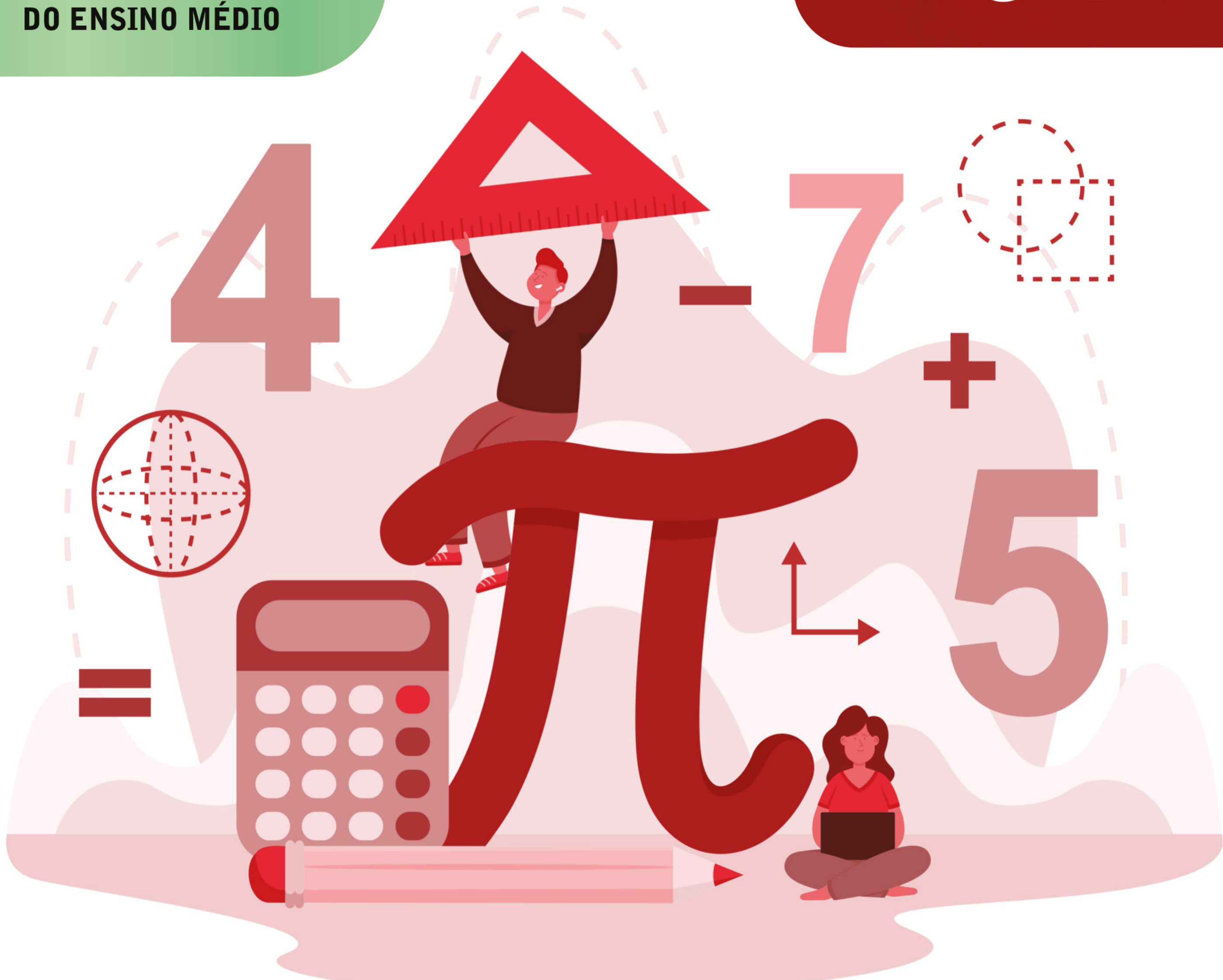
★ RECOMPOSIÇÃO DAS APRENDIZAGENS ★

CADERNO DO PROFESSOR

MATEMÁTICA

3ª SÉRIE
DO ENSINO MÉDIO

VOL. 1



RECOMPOSIÇÃO DAS APRENDIZAGENS

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO

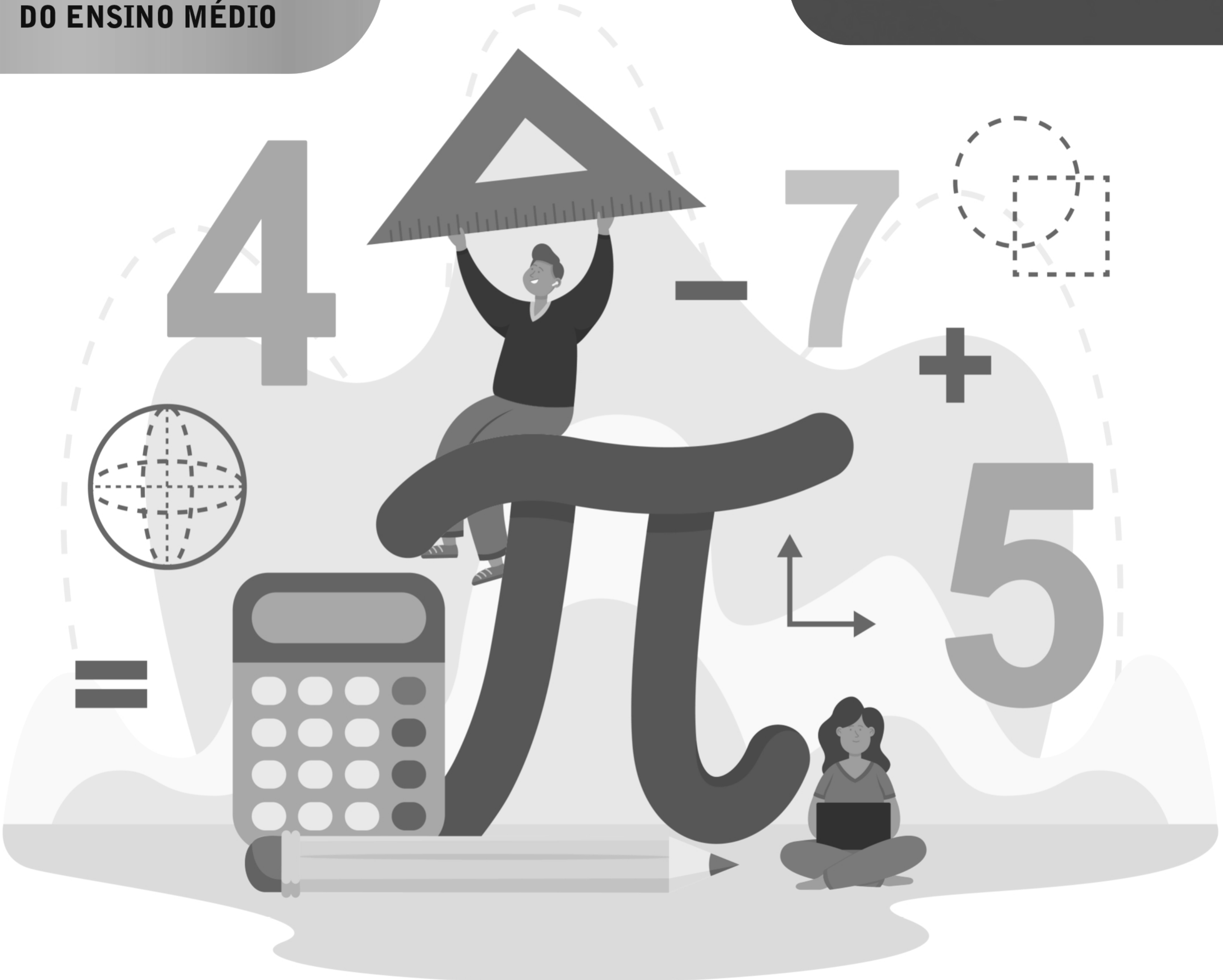
★ RECOMPOSIÇÃO DAS APRENDIZAGENS ★

CADERNO DO PROFESSOR

MATEMÁTICA

3ª SÉRIE
DO ENSINO MÉDIO

VOL. 1



RECOMPOSIÇÃO DAS APRENDIZAGENS

SECRETARIA DE **EDUCAÇÃO**

ORGANIZAÇÃO

GOVERNO DO ESTADO DO PARÁ

HELDER ZAHLUTH BARBALHO
GOVERNADOR DO ESTADO DO PARÁ

HANA GHASSAN TUMA
VICE-GOVERNADORA DO ESTADO DO PARÁ

RICARDO NASSER SEFER
SECRETÁRIO DE ESTADO DE EDUCAÇÃO - SEDUC

JÚLIO CÉSAR MEIRELES DE FREITAS
SECRETÁRIO ADJUNTO DE EDUCAÇÃO BÁSICA - SAEB

RAIMUNDO CORREA DE OLIVEIRA
DIRETOR DE FORMAÇÃO - DIFOR

DIONÍSIO JOSÉ DA COSTA SÁ
COORDENADOR DE FORMAÇÃO DOS PROFISSIONAIS DO MAGISTÉRIO

LILIAN CELINA GUEDES DE ASCUI
COORDENADORA DE COMUNICAÇÃO

EQUIPE DE ELABORAÇÃO

Júlio César Meireles de Freitas
COORDENADOR GERAL

Raimundo Correa de Oliveira
COORDENADOR DE PRODUÇÃO

Dionisio José da Costa Sá
COORDENADOR DE ELABORAÇÃO

Silvaney Fonseca Ferreira Seabra
COORDENADORA DE REVISÃO

Cláudia Regina Bezerra Ferreira
COORDENADORA DE APOIO INSTITUCIONAL

Artur Alves Pinheiro
DESIGNER

Henok Golvim da Silva
DIAGRAMAÇÃO

ELABORADORES

Antônio Francisco de Sales Junior
PROFESSOR FORMADOR DA DRE BELÉM 9

Audrey Cers de Oliveira Silva
PROFESSOR FORMADOR DA DIFOR

Wellington Evangelista Duarte
PROFESSOR FORMADOR DA DIFOR

SUMÁRIO

RECOMPOSIÇÃO DAS APRENDIZAGENS

APRESENTAÇÃO

PREZADOS PROFESSORES,

Com o compromisso de aprimorar a aprendizagem dos estudantes da rede Pública Estadual de Ensino do Estado do Pará e atender às demandas específicas detectadas em avaliações recentes, temos a satisfação de apresentar o novo material didático de Matemática para o 4º e 8º anos do Ensino Fundamental e da 3ª série do Ensino Médio. Este material consiste em uma Sequência de Atividades e foi especialmente projetado para subsidiar a prática docente em aulas de reforço escolar, visando o fortalecimento de habilidades fundamentais estabelecidas pelo SAEB, SISPAE, BNCC e ENEM.

Uma análise dos últimos resultados dessas avaliações mostrou que muitos estudantes ainda não dominam habilidades consideradas básicas para suas respectivas séries. Diante dessa realidade, o material proposto foi organizado em Sequências de Atividades, projetadas para reforçar o aprendizado e, ao mesmo tempo, preparar os alunos para o desenvolvimento de habilidades mais complexas, assim que as habilidades basilares estiverem consolidadas.

Este caderno de atividades está desenhado para ser utilizado ao longo de oito aulas, permitindo que após a prática intensiva por meio de questões de múltipla escolha, os professores possam realizar uma análise cuidadosa dos resultados para identificar e intervir nas lacunas de aprendizagem que persistirem, para isso organizamos o caderno em questões de consolidação e de aprofundamento das aprendizagens.

A exploração dos conceitos e procedimentos matemáticos tem como foco a resolução de problemas, um nível cognitivo mais complexo para os alunos. Dessa forma, partimos de um problema gerador para construir os conceitos que serão o tema de cada aula, em seguida temos de olho nos conceitos, uma sessão que aborda o conteúdo de cada aula, na sequência temos as questões de consolidação e de aprofundamento, que seguiram uma organização didática por ordem de complexidade, ou seja, das mais simples a mais complexa, respeitando assim o nível cognitivo dos alunos de forma a contribuir com a reposição e avanço das aprendizagens.

Nesse sentido, este material didático é um suporte didático-pedagógico essencial para que os professores atuem efetivamente na mediação da aprendizagem, oferecendo orientações constantes e direcionadas que são imprescindíveis para o progresso do aluno. Esperamos que seja um recurso valioso na missão de elevar o nível educacional e preencher as lacunas de conhecimento dos alunos, facilitando a continuidade dos estudos e contribuindo para um desempenho escolar mais efetivo.

SEMANA 1

Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

Objetos do conhecimento

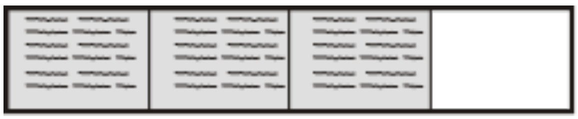
- Conjuntos Numéricos
- Representação dos números
- Operações com reais
- Porcentagem
- Notação científica

Professor(a), este material é pautado na perspectiva de resolução de problemas, assim ele iniciará com uma questão para estimular a discussão, seguido de um resumo de conceitos e posteriormente com questões ENEM e inéditas com padrão ENEM.

Solicite aos alunos que leiam e resolvam a questão seguinte, se abstenham de dar a resposta certa e convide os alunos a mostrar para turma seu raciocínio.

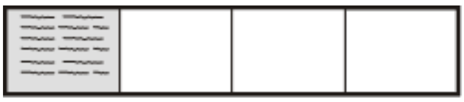
QUESTÃO 01

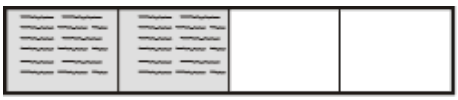
(ENEM 2010) Um professor dividiu a lousa da sala de aula em quatro partes iguais. Em seguida, preencheu 75% dela com conceitos e explicações, conforme a figura seguinte.

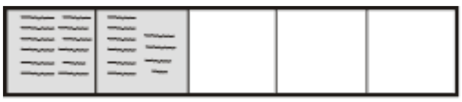


Algum tempo depois, o professor apagou a lousa por completo e, adotando um procedimento semelhante ao anterior, voltou a preenchê-la, mas, dessa vez, utilizando 40% do espaço dela.

Uma representação possível para essa segunda situação é

A 

B 

C 

D 

E 

Resolução e comentários

O gabarito da questão é **[c]**, perceba que $\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$ (duas partes num total de cinco).

Portanto, a representação

é a resposta solicitada. O aluno que optou pela alternativa [a] ou [b] possivelmente pensou numa divisão de quatro partes por ser 40%, não atentando que ao dividir o inteiro em quatro partes iguais cada parte representa 25%.

A alternativa [d] pode ter sido escolhida pelo aluno que equivocadamente representou de branco a parte solicitada, e a alternativa [e] selecionada pelos jovens que imaginaram que cada parte era 10% e selecionou quatro para ter os 40%.

DE OLHO NO CONCEITO

Nesta sequência de aulas, vamos explorar os **Conjuntos Numéricos**, entendendo seus significados, características e aplicações no cotidiano. Nosso objetivo é desenvolver uma compreensão sólida dos números, desde os mais simples utilizados na contagem até aqueles que representam medidas contínuas e fenômenos da natureza.

Ao longo das atividades, vamos trabalhar operações, exemplos práticos e situações-problema que ajudam o estudante a interpretar, comparar e utilizar diferentes tipos de números com segurança. Com isso, você terá uma base forte para avançar em conteúdos mais complexos da Matemática e para resolver questões típicas do ENEM, SAEB e do ensino médio.

Conjuntos numéricos

De modo geral, são grupos de números "organizados", de acordo com suas características, como: tipo de valor, forma de representação, posição na reta numérica e as operações possíveis que incluem esses valores.

Principais conjuntos numéricos

a) Conjunto dos números Naturais

$$\bullet = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ ...\}$$

- Não possuem partes decimais;
- São conhecidos como **não negativos**, pois além de infinitos números positivos, existe o zero;
- Os números naturais são amplamente utilizados em contagens, designar ordem, quantidade de pessoas, criação de senhas etc.

b) **Conjunto dos números Naturais não nulos** $\bullet^* = \{1, 2, 3, ...\}$. (utiliza-se * para indicar a ausência do zero)

c) Conjunto dos números Inteiros

$$\mathbb{Z} = \{...,-6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ ...\}$$

Conjunto inclui os números naturais e números negativos. Os números inteiros são amplamente utilizados em marcações de saldos financeiros (positivos ou negativos), indicadores de temperatura para marcações inteiras como – 3 °C, pontuação de um campeonato, saldo de gols, classificação de equipes, etc.

d) **Conjunto dos números Inteiros não nulos**

$$\mathbb{Z}^* = \{...,-6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ ...\}.$$

e) **Conjunto dos números Inteiros não negativos**

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, ...\}.$$

f) Conjunto dos números Racionais

$[\![= \left\{x \mid x = \frac{p}{q},\ \text{com } p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*\right\}$. Formado por números decimais finitos, frações e dízimas periódicas.

Utilizados em diversas situações como, medições de distâncias (43,72 km), cálculo de troco (R$ 20, 50), divisão de uma pizza em partes iguais, entre 8 amigos, $\left(\frac{1}{8}\text{ da pizza para cada um}\right)$ etc.

g) **Conjunto dos números Irracionais**

É formado por números decimais infinitos e não periódicos que não podem ser expressos em forma de fração de dois inteiros.

- A expansão decimal é infinita e não apresenta um período de repetição;
- Raízes quadradas ou cúbicas de números que não são quadrados ou cubos perfeitos são exemplos comuns, como por exemplo $\sqrt{3}$ e $\sqrt[3]{5}$.

Números primos

O nome "**primo**" vem do grego *protos*, que significa **"primeiro" ou "primário"**, porque esses números (como 2, 3, 5, 7) são vistos como os **blocos construtores fundamentais**; os números compostos (como 4, 6, 8) são "secundários", formados pela multiplicação de primos, assim como as cores secundárias são feitas de primárias, uma ideia que remonta aos pitagóricos.

Uma curiosidade sobre o reconhecimento de um número primo, já que ele é primário, todo número primo deve possuir apenas **dois divisores distintos: 1 e ele mesmo.**

No caso do número **1**, só possui um divisor que é ele mesmo, ou seja, o **número 1 NÃO É PRIMO.**

Observe alguns exemplos de números primos, sendo **2** o único número par.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, ...

Observação

Dois ou mais números são considerados como **PRIMOS ENTRE SI**, quando o **único divisor comum** que possuem é o número 1.

Exemplos

a) 10 e 13 (1 é o único divisor comum)
b) 20 e 27 (1 é o único divisor comum)

Operações com frações

As frações possuem conceito matemático fundamental usado para representar partes de um todo. Elas pertencem ao conjunto dos números racionais e são essenciais para descrever quantidades incompletas ou divisões.

Uma fração representa uma parte de um todo que foi dividido em partes iguais, ou uma divisão entre dois números.

Tipos de frações

a) Fração Própria: O numerador (número de cima) é **menor** que o denominador (número de baixo). Representa uma quantidade menor que um inteiro.

Exemplos:

$\frac{3}{7}$; $\frac{3}{10}$ etc.

b) Fração Imprópria: O numerador é **maior** que o denominador. Representa uma quantidade maior ou igual a um inteiro.

Exemplos:

$\frac{13}{5}$; $\frac{7}{2}$ etc.

c) Fração Aparente: O numerador é um **múltiplo** do denominador. Resulta em um número inteiro

Exemplos:

$\frac{14}{2}$; $\frac{20}{4}$ etc.

d) Fração Mista (ou Número Misto): Combina um número inteiro com uma fração própria.

Exemplos:

$3\frac{1}{2}$; $5\frac{3}{11}$ etc.

Nota: o número misto possui valor equivalente a uma soma de um valor inteiro com uma fração própria.

Exemplos:

$3\frac{1}{2} \rightarrow 3+\frac{1}{2}$; $5\frac{3}{11} \rightarrow 5+\frac{3}{11}$

e) Fração Decimal: Tem o denominador sendo uma potência de 10 (10, 100, 1000, etc.).

Exemplos:

$\frac{7}{10}$; $\frac{25}{100}$; $\frac{17}{1000}$ etc.

f) Frações equivalentes: Frações diferentes que representam a mesma quantidade

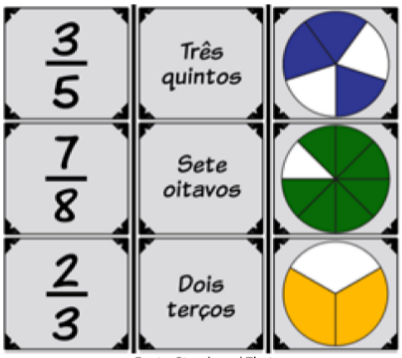
Exemplos:

$\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{6}$; $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{10}$; etc.

g) Fração Irredutível: Uma fração que não pode ser simplificada (numerador e denominador não têm divisores comuns além de 1). Neste caso, dizemos que uma fração do tipo $\frac{a}{b}$, os valores **a** e **b** são primos entre si.

Representações de frações

Os números fracionários representam divisões iguais de um inteiro, ou seja, porções de mesmo tamanho. Os números fracionários possuem nomes específicos que indicam quantas delas são necessárias para completar o inteiro. Por exemplo, os terços exigem três partes iguais para formar a unidade completa.

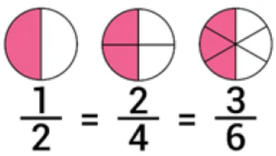


Fonte: Storyboard That

Na imagem, observamos três representações da ideia de fração: **a representação numérica, representação escrita e representação geométrica**.

Frações equivalentes

Frações equivalentes são frações que, embora escritas com numeradores e denominadores diferentes, representam a **mesma quantidade** ou o mesmo valor matemático, ou seja, representam a mesma parte do todo. São dois modos de escrever a mesma quantidade usando partes fracionárias.



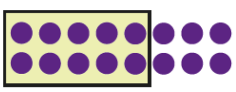
Fonte: Shutterstock

Fonte: (Recomposição das Aprendizagens 2025, Matemática 5º ano ensino fundamental, Seduc-PA, vol. 8).

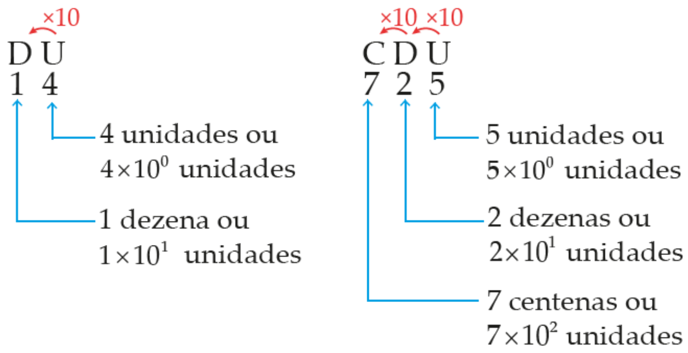
Sistema de numeração decimal

Criado pelos hindus e posteriormente aperfeiçoado pelos árabes, o Sistema de Numeração Decimal, também conhecido como Sistema de Numeração Indo-arábico, é atualmente o sistema de numeração mais utilizado e aceito em todo o mundo.

Esse sistema utiliza apenas dez algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Esses algarismos são organizados em grupos de dez, o que caracteriza o sistema como decimal, ou seja, um sistema de base 10.



Considerado um sistema posicional, pois os algarismos assumem valores de acordo com a sua posição dentro do numeral, chamado de valor posicional.



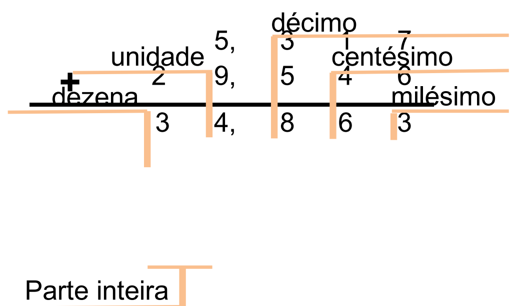
Classe dos milhões			Classe dos milhares			Classe das unidades simples		
Centena de milhão	Dezena de milhão	Unidade de milhão	Centena de milhar	Dezena de milhar	Unidade de milhar	Centena	Dezena	Unidade
Ordens								
9ª	8ª	7ª	6ª	5ª	4ª	3ª	2ª	1ª

É comum, na mudança de classe numérica a representação por um ponto (.). Porém, existem alguns impasses com esta formatação em textos e operações. Para solucionar este problema, um número como 108.425 pode ser representado por 108 425 (mais comum em provas e artigos).

Números decimais

Os números decimais e os números naturais são escritos, todos eles, no sistema posicional. Por isso, os cálculos efetivados com os números decimais são semelhantes com os que você conhece para os naturais.

Veja o exemplo de uma **adição**



Observe que somamos milésimos com milésimos, centésimos com centésimos, décimos com décimos e assim por diante.

Agora veja um exemplo de **subtração: 8 – 3,52**

	8,	0	0
–	3,	5	2
	4,	4	8

Acrescentamos "zeros" nas posições décimo, centésimo, milésimo, sem mudar seu valor numérico, para efetuar a subtração.

Observação

Zeros no final do número decimal, não alteram o valor do próprio número:

Analise as frações e os decimais dos três exemplos $\frac{7}{10}=0,7;\ \frac{70}{100}=0,70;\ \frac{700}{1000}=0,700$. Notamos que são frações que representam a mesma quantidade, ou seja,

$$0,7=0,70=0,700$$

Dízima periódica

Os números decimais que apresentam repetição infinita de um ou mais algarismos após a vírgula são chamados de **dízimas periódicas**. Eles aparecem naturalmente em diversas situações do cotidiano, principalmente em cálculos de divisão, porcentagem e medidas.

Compreender como transformar uma dízima periódica em fração (**fração geratriz**) ajuda o estudante a perceber que há sempre um número racional por trás desses decimais que "não acabam", mas seguem um padrão.

Dízima periódica simples

Uma dízima periódica simples é um número decimal infinito onde o período (o algarismo ou grupo de algarismos que se repete) começa logo após a vírgula, sem nenhum outro número "diferente" (não periódico) entre a vírgula e o período.

Exemplos:

a) 0,8888...
b) 0,12 12 12...
c) 5,17 17 17 ...
d) $0,\overline{5}$ (5 com traço significa que ele se repete infinitamente)

Dízima periódica composta

Após a vírgula, existem algarismos que não se repetem (não periódicos) antes do período começar a se repetir.

Exemplos:

a) 0,755555...
b) 3,42777777....
c) 2,37 24 24 24...

Fração geratriz de uma dízima periódica

A fração geratriz é a fração que gera a dízima periódica quando transformada em número decimal.

Os três métodos mais conhecidos, que levam ao mesmo resultado são:

a) Equação ou "subtração algébrica"
b) Utilizando uma "fórmula"
c) Usar um método de construção de sequências, geralmente a progressão geométrica convergente, caracterizando a soma da PG infinita.

Desenvolva em sala de aula pelo menos dois métodos para obter a fração geratriz

Exemplo: Determinar a fração geratriz de 0,4555...

Método 1

Vamos chamar 0,4555... de x, ou seja, x = 0,4555....
Como a parte periódica começa na casa dos centésimos, multiplicamos ambos os lados por 100. Assim temos,

100x = 45,555... (nessa configuração, temos 45 como número inteiro e 5 como parte periódica) e multiplicamos x por 10, tendo como resposta **10x = 4,555...** Observe que após a vírgula, temos partes periódicas iguais e aí, podemos realizar a subtração, obtendo a equação geratriz

$$\begin{array}{rl} & 100x = 45,555...\\ - & 10x = 4,555...\\ \hline & 90x = 41 \end{array}$$

$$\therefore\ x=\frac{41}{90}$$

Método 2

Considere a dízima periódica composta

x = a, bccc....., com parte inteira (a), parte não periódica (b) e período (c), temos

$$x=\frac{abc-ab}{90}$$

"*Juntar a parte inteira com parte não periódica e periódica **abc,** subtrair do número formado ao juntar parte inteira com parte não periódica **ab** e dividir por tantos **9 (representa o***

período) *junto com tantos* ***zeros*** *que representam a parte não periódica* ***90****".*

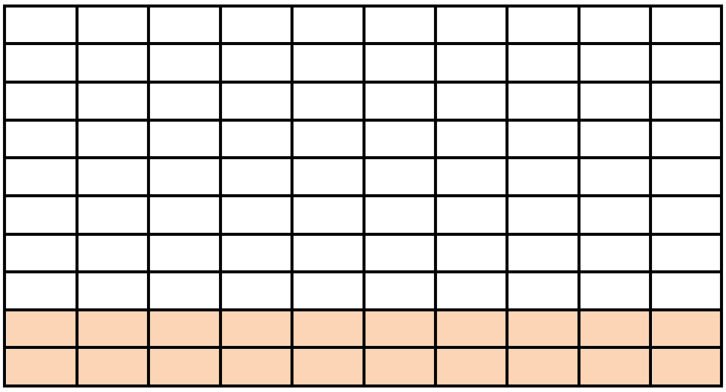
Exemplo: Determinar a fração geratriz de 3,4555...

Parte inteira: **3**
Parte não periódica, após a vírgula: **4**
Parte periódica (período): **5**

Fração geratriz: $x = 3{,}4555... = \frac{345 - 34}{90} = \frac{311}{90}$

Porcentagem

A porcentagem é uma das ideias matemáticas mais presentes em nosso dia a dia. Representada pelo símbolo **%**, ela indica uma **razão em relação a 100**, permitindo comparar valores, analisar variações e interpretar informações de forma simples e direta. Quando dizemos que algo é "20%", estamos indicando "20 partes de um total de 100".



$\frac{20}{100}$

Das 100 partes da figura, temos **20 partes pintadas e 80 partes claras, totalizando 100 partes.**

Isso é importante, pois $\frac{20}{100}$ e $\frac{80}{100}$ representam, respectivamente, **20% e 80%.**

Com ela podemos calcular aumentos e descontos, compreender juros bancários, analisar gráficos, interpretar estatísticas, entender impostos, medir rendimento escolar e até acompanhar resultados esportivos. Por isso, dominar o conceito de porcentagem é essencial para tomar boas decisões e interpretar informações com clareza no cotidiano.

Aprender porcentagem significa aprender a enxergar o mundo com mais precisão e consciência.

A porcentagem pode ser expressa de diferentes formas:

Forma Percentual	Forma Fracionária	Forma Decimal
1%	$\frac{1}{100}$	0,01
10,5%	$\frac{10{,}5}{100}$	0,105
75%	$\frac{75}{100}$	0,75

Cálculo percentual

A porcentagem está presente em praticamente todas as situações do nosso dia a dia. Sempre que lidamos com descontos, juros, notas escolares, estatísticas, reajustes, pesquisas, proporções ou comparações, estamos usando porcentagem, mesmo sem perceber.

Exemplo: Qual o valor referente a 30% de 550?

Solução:

Como o entendimento de porcentagem é "por 100" ou algo dividido por 100 partes iguais, temos que 30% de 550 é mesmo que $(30\%) \times 550$, ou seja, $\frac{30}{100} \times 550 = 165$.

Note que $\frac{30}{100} = 0{,}3$ e operação também pode ser $0{,}3 \times 550 = 165$.

ou resolvendo por regra de três

$$\begin{array}{lcl} 550 & ------- & 100\% \\ x & ------- & 30\% \end{array}$$

$$\therefore\ x = 165$$

Observação

Notamos que alguns valores percentuais são amplamente utilizados de acordo com quadro.

Porcentagem	Fração	Representação
10%	$\frac{1}{10}$	Um décimo (Dividir por 10)
25%	$\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$	Um quarto "Dividir por 4" (metade da metade)
50%	$\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$	Um meio ou uma metade (metade)
75%	$\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$	Três quartos

Aumentos e descontos percentuais

Desconto Percentual

Ocorre quando um valor é reduzido por uma certa porcentagem.
Exemplos comuns: promoções, liquidações, reduções de tarifa.

Aumento Percentual

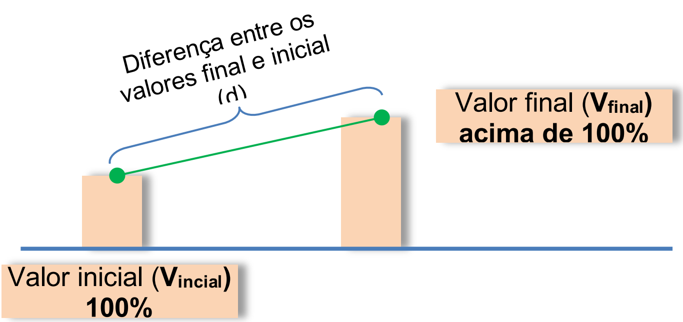
Ocorre quando um valor é acrescido de uma porcentagem.

Exemplos comuns: juros, reajuste salarial, inflação, tarifas.

Valor após **aumento** de **i%**

Os termos 1 + i e 1 – i são chamados de **fatores de aumento e desconto, respectivamente** e auxiliam em diversas situações, principalmente em etapas de aumentos e descontos sucessivos, função exponencial e matemática financeira.

Além disso, o aumento ou desconto percentual pode ser calculado utilizando uma regra de três. Observe o esquema:



Assim,

Valor inicial ------------ 100%
Diferença d ------------ x (porcentagem de aumento)

Exemplo:

O estado do Pará é um dos maiores produtores e exportadores de açaí do Brasil. Em 2024, foram exportadas 20 mil toneladas do fruto. Em 2025, devido ao aumento da demanda internacional, a exportação passou para 25 mil toneladas.

O aumento percentual da produção exportada de açaí de 2024 para 2025 foi de:

a) 10%
b) 20%
c) 25%
d) 30%
e) 40%

COMENTÁRIOS

20 mil toneladas é o valor inicial e a diferença entre 25 mil e 20 mil representa o quanto aumento de 2024 para 2025. Assim, podemos montar uma regra de três

20 mil toneladas ------------ 100%
5 mil ------------ x (porcentagem de aumento)

$$\begin{array}{l} 20 - - - - - - - \ 100\% \\ \ \ 5 \ - - - - - - - \ \ x \end{array}$$

$$\therefore \ x = \frac{500}{20} = 25\%$$

Logo, houve um aumento de 25%

a) 10%, erro comum ao dividir o aumento por um valor maior que o inicial.
b) 20%, corresponde a considerar apenas a razão direta sem multiplicar corretamente por 100.
c) 25%(Alternativa correta). O aumento de 5 mil toneladas representa 25% de 20 mil toneladas.
d) 30%, superestima o crescimento percentual.
e) 40%, seria o aumento se a produção tivesse crescido 8 mil toneladas.

Aumentos sucessivos

Quando um problema apresenta uma sequência de aumentos, onde cada etapa de acréscimo incide em cima do valor atual. Nesses casos, construiremos um fator multiplicativo para cada aumento, ou seja, para as taxas i_1, i_2, i_3, ... i_n, teremos o valor final:

$$V_{Final} = V_{Inicial} \cdot (1+i_1)\cdot(1+i_2)\cdot(1+i_3)\cdot\ldots\cdot(1+i_n)\cdot$$

Exemplo:

Um terreno custa R$120.000,00 e sofreu dois aumentos sucessivos de 20% e 40%. Qual o valor final após os aumentos?

COMENTÁRIOS

Como são dois aumentos sucessivos de 20% e 40%, temos

$$V_{Final} = 120000\cdot(1+0,2)\cdot(1+0,4) = 120000\cdot 1,2\cdot 1,4$$
$$V_{Final} = 201\,600 \text{ reais}$$

Descontos sucessivos

De modo análogo, para sequências de descontos sucessivos, de taxas i_1, i_2, i_3, ... i_n, teremos:

$$V_{Final} = V_{Inicial} \cdot (1-i_1)\cdot(1-i_2)\cdot(1-i_3)\cdot\ldots\cdot(1-i_n)\cdot$$

Exemplo:

Uma loja anunciou a promoção: “20% de desconto nos preços das etiquetas”. Luís se interessou em adquirir uma calça que custava R$200,00 na etiqueta e ao chegar ao caixa conseguiu mais 30% de desconto no que seria o valor final da calça. Quanto Luís pagou pela calça?

COMENTÁRIOS

Como são dois descontos sucessivos de 20% e 30%, temos

$$V_{Final} = 200 \cdot (1 - 0,2) \cdot (1 - 0,3)$$
$$V_{Final} = 200 \cdot 0,8 \cdot 0,7$$
$$V_{Final} = 112 \text{ reais}$$

Potenciação

Entende-se que potenciação é uma operação matemática que representa a multiplicação de números iguais, ou seja, um número (conhecido como base) por ele mesmo, n vezes.

Casos particulares

COMENTÁRIOS

- $a^n = x$ (a = base; n = expoente; x = potência)
- Se a base é negativa e o expoente é par, então a potência é positiva.
- Se a base é negativa e o expoente é ímpar, então a potência é negativa.

Em todos os casos a seguir, iremos considerar a base como valor **diferente de zero**.

Propriedades da Potenciação

Propriedade 01: Na multiplicação de potências de mesma base, a potência resultante é obtida conservando-se a base e somando-se os expoentes.

Propriedade 02: Na divisão de potências de mesma base, a potência resultante é obtida conservando-se a base e subtraindo-se os expoentes (expoente do numerador pelo expoente do denominador).

Propriedade 03: Na potência de potência, o resultado é obtido conservando-se a base e multiplicando-se os expoentes.

Propriedade 04: A potência de um produto de dois ou mais fatores pode ser obtido elevando-se cada termo ao mesmo expoente do produto.

Potência de expoente fracionário

Potências De Base 10

$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1000$
.
.
.

$$10^n = \underbrace{1000...000}_{n \text{ vezes}}$$

O expoente indica, de modo simples, o número de zeros.

Múltiplos e submúltiplos de 10

Múltiplos e submúltiplos de 10 são prefixos do Sistema Internacional (SI) usados para expressar números muito grandes ou muito pequenos em potências de 10, como Quilo (k) = 10^3 (mil), Mega (M) = 10^6 (milhão) etc.

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$$

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0,000...01}_{n \text{ casas decimais}}$$

Caro estudante, em outras áreas do conhecimento e no cotidiano, algumas unidades de medidas utilizam prefixos e sufixos que são comuns em diversas partes do mundo. Observe o quadro a seguir com alguns exemplos.

1 deci	→	1 d	→	10^{-1}	→	1 décimo
1 centi	→	1 c	→	10^{-2}	→	1 centésimo
1 mili	→	1 m	→	10^{-3}	→	1 milésimo
1 micro	→	1 μ	→	10^{-6}	→	1 milionésimo
1 nano	→	1 n	→	10^{-9}	→	1 bilionésimo
1 pico	→	1 p	→	10^{-12}	→	1 trilionésimo
1 deca	→	1 da	→	10^{1}	→	uma dezena
1 hecto	→	1 h	→	10^{2}	→	uma centena
1 quilo	→	1 k	→	10^{3}	→	um milhar
1 mega	→	1 M	→	10^{6}	→	um milhão
1 giga	→	1 G	→	10^{9}	→	um bilhão
1 tera	→	1 T	→	10^{12}	→	um trilhão

Exemplos:

a) $0,023 = 0,23\times10^{-1} = 2,3\times10^{-2} = 23\times10^{-3} = 230\times10^{-4} = \ldots$

b) $23,7892 = 237,892\times10^{-1} = 237892\times10^{-4}$

c) $230 = 23\times10 = 2,3\times10^{2} = 0,23\times10^{3} = 0,023\times10^{4} = \ldots$

d) $145000 = 1,45\times10^{5}$

COMENTÁRIOS

Algumas situações causam dúvidas para alguns estudantes. Vamos mencionar dois deles:

1º) Um erro comum é a situação com expoentes sendo separados ou não por parênteses. Neste caso, são operações diferentes.

Exemplos:

Veja a diferença entre $\left(2^{2}\right)^{3}$ e $2^{2^{3}}$.

- $\left(2^{2}\right)^{3}$ → Neste caso, trata-se de "potência de potência", como é popularmente conhecido. Assim, conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes, resultando em $\left(2^{2}\right)^{3} = 2^{2.3} = 2^{6} = 64$;
- $2^{2^{3}}$ → Neste caso, trata-se de "potência elevada a outra potência". Assim, conserva-se a base e elevamos ao resultado da outra potência, resultando em $2^{2^{3}} = 2^{8} = 256$

Os resultados são diferentes.

2º) Outro erro comum é quando se utiliza o expoente de modo a ser "distribuído" na soma ou diferença de termos. Este fato se dá pela existência da propriedade $(a\cdot b)^{n} = a^{n}\cdot b^{n}$, embora seja um produto, muitos estudantes acreditam que o processo na adição e diferença seria o mesmo. Pois bem, neste caso **não é correto** "distribuir os expoentes", ou seja, $(a+b)^{n} \neq a^{n}+b^{n}$.

O correto para uma potência cuja base é uma adição ou diferença entre termos seria utilizar conceito de potenciação.

Assim, para $(a+b)^{n}$, temos:

$$(a+b)^{n} = \underbrace{(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot\ldots(a+b)}_{\text{O fator (a+b) é repetido n vezes, considerando o valor do expoente.}}$$

Exemplos:

Veja a diferença entre $(2\cdot3)^{2}$ e $(2+3)^{2}$.

- Resolvendo a multiplicação e elevando ao expoente $(2\cdot3)^{2} = 6^{2} = 36$ ou utilizando a propriedade **4**, "distribuindo" o expoente temos que $(2\cdot3)^{2} = 2^{2}\cdot3^{2} = 4\cdot9 = 36$. Perceba que o resultado é o mesmo.
- No caso da soma, podemos somar e depois elevar ao expoente $(2+3)^{2} = (5)^{2} = 25$. O erro está na distribuição, pois $(2+3)^{2} \neq 2^{2}+3^{2} \rightarrow 5^{2} \neq 4+9 \rightarrow 25 \neq 13$. Então caro leitor, a propriedade 4 funciona para um produto ou quociente, não funcionando para adição e diferença.

Notação científica

A notação científica é uma forma de escrever números muito grandes ou muito pequenos de maneira mais simples e organizada, usando potências de 10.

O número N é escrito como produto

Sendo que

- $1 \leq a < 10$
- N é um número inteiro

Exemplos:

a) $0,00001 = 1\cdot10^{-5} = 10^{-5}$ b) $142\ 000\ 000 = 1,42\cdot10^{8}$

c) No Brasil, o comprimento do pé é um dos critérios utilizados para a definição do número do calçado. Suponha que o comprimento médio do pé de um adulto seja de 26 cm.

Disponível em: https://www.remessaonline.com.br, 18 dez. 2025

Para fins de padronização em um estudo científico, esse valor foi convertido para metros e escrito em notação científica.

Qual é a representação correta desse comprimento em metros, usando notação científica?

a) $2{,}6 \times 10^{-3}$ m

b) $2{,}6 \times 10^{-2}$ m

c) $2{,}6 \times 10^{-1}$ m

d) 26×10^{-2} m

e) $0{,}26 \times 10^{1}$ m

Solução:

1ª etapa – Conversão de cm para m.

$$1\ cm = 10^{-2}\ m$$

Portanto:

$$26\ cm = 26 \times 10^{-2}\ m$$

2ª etapa – Ajuste para notação científica

A notação científica exige que o coeficiente esteja entre 1 e 10. Então:

$$26 \times 10^{-2} = 2{,}6 \times 10^{1} \times 10^{-2} = 2{,}6 \times 10^{-1}\ m$$

Portanto, o comprimento médio do pé em metros, na notação científica correta, é:

$$2{,}6 \times 10^{-1}\ \boldsymbol{m}$$

Ordem de grandeza

A ordem de grandeza é uma estimativa baseada na potência de base 10. Quando precisamos de um número muito difícil de obter (por exemplo, a massa do Sol), utilizamos a ordem de grandeza para ter uma ideia próxima da realidade. Ordem de grandeza $\rightarrow$ OG = 10^n

1º passo: Escrever o número em notação científica $N = a \times 10^{n}$, com $1 \le a < 10$

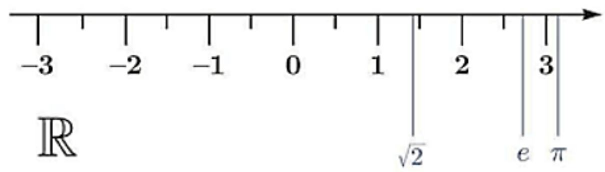
2º passo: Avaliando o valor de **a** e determinando a ordem de grandeza

$$\begin{cases} a < 3{,}16 \rightarrow \text{Ordem de grandeza é } 10^{n} \\ a \ge 3{,}16 \rightarrow \text{Ordem de grandeza é } 10^{n+1} \end{cases}$$

Representação dos números na reta real

A reta real é uma representação gráfica que associa cada número real a um ponto de uma linha orientada. Nela, o zero é o ponto de referência, os números positivos ficam à direita e os negativos à esquerda, permitindo comparar valores e compreender sua ordem.

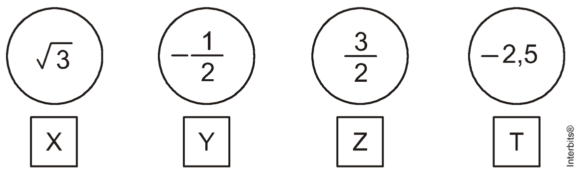
Todos os conjuntos numéricos podem ser representados na reta real, incluindo números racionais e irracionais. Essa representação facilita o entendimento de conceitos como distância, valor absoluto, intervalos e desigualdades, sendo fundamental para a aprendizagem da Matemática e para a resolução de problemas do cotidiano e do ENEM.



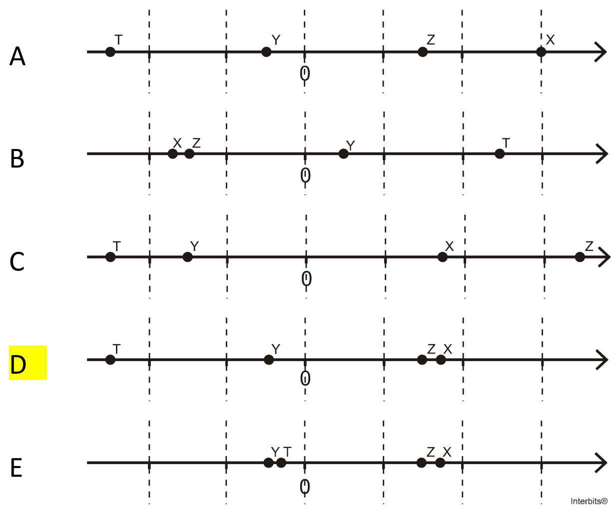
Exemplo

(ENEM PPL) Em um jogo educativo, o tabuleiro é uma representação da reta numérica e o jogador deve posicionar as fichas contendo números reais corretamente no tabuleiro, cujas linhas pontilhadas equivalem a 1 (uma) unidade de medida. Cada acerto vale 10 pontos.

Na sua vez de jogar, Clara recebe as seguintes fichas:



Para que Clara atinja 40 pontos nessa rodada, a figura que representa seu jogo, após a colocação das fichas no tabuleiro, é:



Resolução e comentários

Gabarito alternativa D

Como $x = \sqrt{3} \cong 1{,}7; y = -\frac{1}{2} = -0{,}5$ e $z = \frac{3}{2} = 1{,}5$, tem-se $t < y < z < x$. Assim, a figura que representa o jogo de Clara é a da alternativa [D]. Note que na alternativa [A], $x = 3$.

AGORA TENTE VOCÊ!

QUESTÃO 02

(ENEM PPL 2023) Uma padaria criou uma receita de bolo chamada Bolo de xícara, pois, com exceção dos ovos e do fermento, os demais ingredientes são medidos com xícaras de mesma capacidade, conforme descrito.

Bolo de xícara
Ingredientes
5 ovos
$\frac{9}{4}$ xícara de farinha de trigo
$\frac{4}{3}$ xícara de chocolate em pó
$1\frac{3}{4}$ xícara de açúcar
$\frac{5}{6}$ xícara de leite
1 colher de fermento em pó

O modo de fazer a receita orienta colocar, primeiramente, os ovos e depois ir adicionando os ingredientes cujas quantidades foram medidas em xícara, da menor para a maior quantidade. Por último, adiciona-se o fermento.

Em qual ordem os ingredientes medidos em xícara serão adicionados na receita?

A Chocolate; leite; açúcar; farinha de trigo.
B Leite; chocolate; açúcar; farinha de trigo.
C Leite; chocolate; farinha de trigo; açúcar.
D Farinha de trigo; açúcar; chocolate; leite.
E Leite; farinha de trigo; açúcar; chocolate.

Resolução e comentários

Gabarito alternativa B

Quantidades de cada ingrediente:

Farinha de trigo: $\frac{9}{4} = 2{,}25$

Chocolate em pó: $\frac{4}{3} = 1{,}33$

Açúcar: $1\frac{3}{4} = 1 + 0{,}75 = 1{,}75$

Leite: $\frac{5}{6} = 0{,}83$

Portanto, os ingredientes devem ser adicionados na seguinte ordem: leite; chocolate; açúcar; farinha de trigo, que é a sequência da alternativa [b] que é o gabarito. O aluno que equivocadamente optou pela alternativa {d} deve ter trocado e escrito do maior para o menor. O estudante que marcou equivocadamente a alternativa [a] possivelmente inverteu a fração do chocolate fazendo $\frac{3}{4} = 0{,}75$ e imaginando que esse seria o menor valor. Os estudantes que marcaram as alternativas erradas [c] e [e] identificaram o menor valor mas provavelmente olharam apenas para o numerador ou denominador para ordenar os demais elementos, cometendo assim um equívoco.

QUESTÃO 03

(ENEM PPL 2023) **"Quanto é mil trilhões Vezes infinito?"**

TOLLER, P. Oito anos. In: Paula Toller. Rio de Janeiro: Warner Music Brasil, 1998.

O trecho da canção Oito anos, de Paula Toller, foi apresentado por um professor de matemática a um grupo de cinco alunos. Em seguida, o professor solicitou que cada aluno apresentasse uma expressão matemática que traduzisse os versos citados.

Cinco respostas diferentes foram dadas:

Resposta 1: $10^9 \times \infty$
Resposta 2: $10^{12} \times \varnothing$
Resposta 3: $10^{12} \times \infty$
Resposta 4: $10^{15} \times \varnothing$
Resposta 5: $10^{15} \times \infty$

A resposta que representa matematicamente o trecho da canção é a

A 1.
B 2.
C 3.
D 4.
E 5.

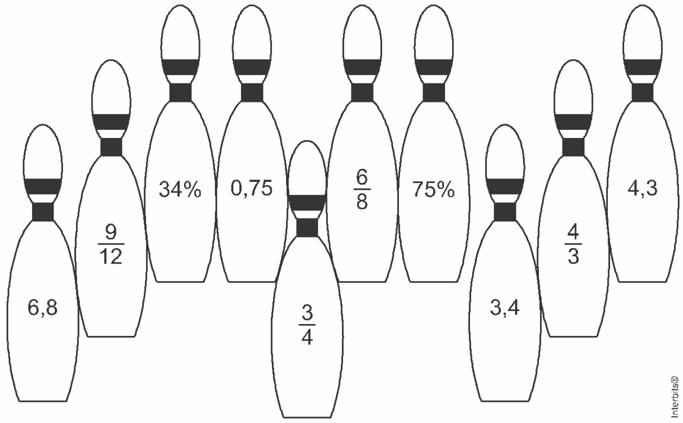
Resolução e comentários

Gabarito alternativa E

Veja que um trilhão é 10^{12} Mil trilhões equivalem a $10^3 \cdot 10^{12} = 10^{15}$. Portanto, a expressão correta é $10^{15}\infty$. Os alunos que marcaram as alternativas incorretas [b] e [d] possivelmente confundiram o símbolo de infinito e o símbolo de vazio. Os que optaram pela alternativa incorreta [a], podem ter subtraído os expoentes, já a alternativa incorreta [c] o estudante de forma desatenciosa representou apenas 1 trilhão.

QUESTÃO 04

(ENEM PPL 2019) O boliche é um esporte cujo objetivo é derrubar, com uma bola, uma série de pinos alinhados em uma pista. A professora de matemática organizou um jogo de boliche em que os pinos são garrafas que possuem rótulos com números, conforme mostra o esquema.



O aluno marca pontos de acordo com a soma das quantidades expressas nos rótulos das garrafas que são derrubadas. Se dois ou mais rótulos representam a mesma quantidade, apenas um deles entra na contagem dos pontos. Um aluno marcou 7,55 pontos em uma jogada. Uma das garrafas que ele derrubou tinha o rótulo 6,8.

A quantidade máxima de garrafas que ele derrubou para obter essa pontuação é igual a

A 2.
B 3.
C 4.
D 5.
E 6.

Resolução e comentários

Gabarito alternativa E

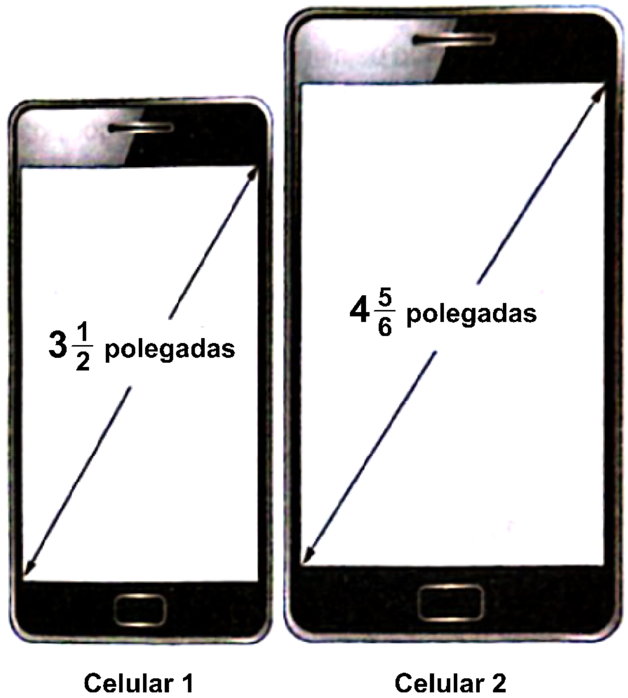
Sabe-se que o total de pontos foi 7,55 com uma das garrafas derrubadas 6,8.

Sendo 7,55 – 6,8 = 0,75 e $\frac{9}{12} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 75\% = 0,75$, podemos concluir que ele derrubou no máximo 6 garrafas. De fato, ele derrubou, no máximo, a garrafa de valor 6,8 e 5 garrafas de valor equivalente a 0,75.

Alternativa a) errada (2): Resultaria se o aluno derrubasse apenas a garrafa de 6,8 e uma de 0,75, sem considerar a maximização.
Alternativa b) errada (3): Resultaria da soma da garrafa 6.8 com apenas duas garrafas de 0.75, sem maximização.
Alternativa c) errada (4): Resultaria da soma da garrafa 6.8 com apenas três garrafas de 0.75, sem maximização.
Alternativa d) errada d (5): Resultaria da soma da garrafa 6.8 com apenas quatro garrafas de 0.75, sem maximização.

QUESTÃO 05

Atualmente, há telefones celulares com telas de diversos tamanhos e em formatos retangulares. Alguns deles apresentam telas medindo $3\frac{1}{2}$ polegadas, com determinadas especificações técnicas. Além disso, em muitos modelos, com a inclusão de novas funções no celular, suas telas ficaram maiores, sendo muito comum encontramos atualmente telas medindo $4\frac{5}{6}$ polegadas, conforme a figura.



Disponível em: www.tecmundo.com.br
Acesso em: 5 nov. 2014 (adaptado).

A diferença de tamanho, em valor absoluto, entre as medidas, em polegada, das telas do celular 2 e do celular 1, representada apenas com uma casa decimal, é

A 0,1.
B 0,5.
C 1,0.
D 1,3.
E 1,8.

Resolução e comentários

Gabarito alternativa D

Como as medidas foram representadas por dois números mistos, temos que a resposta será a diferença $4\frac{5}{6} - 3\frac{1}{2}$

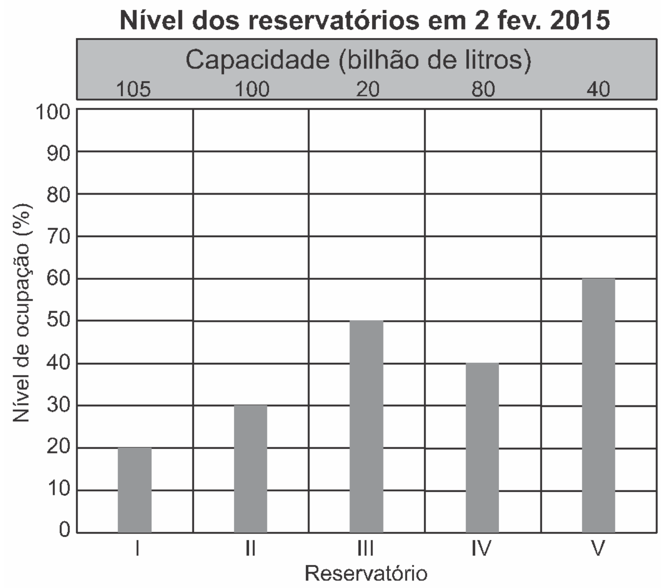
A diferença de tamanho entre as telas, em polegadas, equivale a:

$$\left(4+\frac{5}{6}\right)-\left(3+\frac{1}{2}\right)=1+\frac{5}{6}-\frac{1}{2}=\frac{6+5-3}{6}=\frac{8}{6}\cong 1,3$$

Alternativa a) errada (0,1): Pode surgir de um erro grosseiro na subtração das partes inteiras (4 – 3 = 1) seguido de uma confusão decimal onde o aluno subtrai apenas as partes decimais de forma incorreta ou ignora a parte fracionária mais significativa.
Alternativa b) errada (0,5): Provavelmente resulta da consideração apenas da parte fracionária de uma das telas (1/2 = 0,5)
Alternativa c) errada (1,0): Representa o erro de subtrair apenas as partes inteiras das medidas
Alternativa e) errada (1,8): Pode originar-se de um erro de soma em vez de subtração ou de uma conversão errada da fração

QUESTÃO 06

(ENEM 2021) O gráfico apresenta o nível de ocupação dos cinco reservatórios de água que abasteciam uma cidade em 2 de fevereiro de 2015.



Nessa data, o reservatório com o maior volume de água era o

A I.
B II.
C III.
D IV.
E V.

Resolução e comentários

Gabarito alternativa D

Os volumes em cada reservatório, em bilhões de litros, são iguais a $0,2 \cdot 105 = 21$; $0,3 \cdot 100 = 30$; $0,5 \cdot 20 = 10$; $0,4 \cdot 80 = 32$ e $0,6 \cdot 40 = 24$.

Portanto, o reservatório com maior volume é o IV.

Alternativa a) errada (I): Volume de 21 bilhões. Distrator para quem calcula corretamente, mas compara visualmente a capacidade total (105 bilhões é o maior valor de capacidade) ou comete erro de cálculo.
Alternativa b) errada (II): Volume de 30 bilhões. Um cálculo válido, mas não o maior volume total.
Alternativa c) errada (III): Volume de 10 bilhões. É o menor volume total. Distrator para quem olha apenas o maior percentual de ocupação (50% está entre os maiores percentuais visíveis no gráfico, dependendo de como é a visualização exata) sem considerar a capacidade.
Alternativa e) errada (V): Volume de 24 bilhões. Distrator para quem olha o maior percentual de ocupação (60% é o maior percentual) e assume, erroneamente, que isso implica o maior volume, sem calcular a capacidade real.

QUESTÃO 07

(ENEM 2019) A gripe é uma infecção respiratória aguda de curta duração causada pelo vírus influenza . Ao entrar no nosso organismo pelo nariz, esse vírus multiplica-se, disseminando-se para a garganta e demais partes das vias respiratórias, incluindo os pulmões.

O vírus influenza é uma partícula esférica que tem um diâmetro interno de 0,00011 mm.

Disponível em: www.gripenet.pt. Acesso em: 2 nov. 2013 (adaptado).

Em notação científica, o diâmetro interno do vírus influenza, em mm, é

A $1{,}1 \times 10^{-1}$

B $1{,}1 \times 10^{-2}$

C $1{,}1 \times 10^{-3}$

D $1{,}1 \times 10^{-4}$

E $1{,}1 \times 10^{-5}$

Resolução e comentários

Gabarito alternativa D

O diâmetro interno do vírus influenza, de 0,00011 mm, em notação científica é

$$1{,}1 \times 10^{-4}$$

-

$1{,}1 \times 10^{-4}$ mm, pois movemos a vírgula quatro casas para a direita para formar 1,1 (um número entre 1 e 10), resultando em um expoente negativo para representar o número original pequeno.
Para converter 0,00011 para notação científica:
Identifique o número: 0,00011 mm.

Mova a vírgula: Para que o número fique entre 1 e 10, você precisa mover a vírgula 4 casas para a direita, resultando em 1,1.
Determine o expoente: Como você moveu a vírgula para a direita (porque o número original é pequeno), o expoente será negativo. O número de casas movidas é 4, então o expoente é -4.

Tem-se que $0{,}00011 \text{ mm} = 1{,}1 \times 10^{-4}$

QUESTÃO 08

(ENEM 2012) João decidiu contratar os serviços de uma empresa por telefone através do SAC (Serviço de Atendimento ao Consumidor). O atendente ditou para João o número de protocolo de atendimento da ligação e pediu que ele anotasse. Entretanto, João não entendeu um dos algarismos ditados pelo atendente e anotou o número 13 98207, sendo que o espaço vazio é o do algarismo que João não entendeu.

De acordo com essas informações, a posição ocupada pelo algarismo que falta no número de protocolo é a de

A centena.

B dezena de milhar.

C centena de milhar.

D milhão.

E centena de milhão.

Resolução e comentários

Gabarito alternativa C

Analisando a posição ocupada por cada algarismos, temos

QUESTÃO 09

(ENEM 2015) No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado, No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:

Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

A 9
B 7
C 5
D 4
E 3

Resolução e comentários

Gabarito alternativa D

Carta na Mesa: Uma carta com o valor 6/8 é virada.
Valor Equivalente: O jogador deve encontrar na sua mão cartas que representem o mesmo valor:

Simplificando $\frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{3}{4} = 0{,}75 = \frac{75}{100} = 75\%$

Formação de Pares: A carta da mesa (6/8) forma pares com as cartas da mão que são equivalentes a 3/4, 0,75 ou 75%.

Reposta: 3 cartas

QUESTÃO 10

(ENEM 2011) O medidor de energia elétrica de uma residência, conhecido por "relógio de luz", é constituído de quatro pequenos relógios, cujos sentidos de rotação estão indicados conforme a figura:

Disponível em: http://www.enersul.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010.

A medida é expressa em kWh. O número obtido na leitura é composto por 4 algarismos. Cada posição do número é formada pelo último algarismo ultrapassado pelo ponteiro.

O número obtido pela leitura em kWh, na imagem, é

A 2614.
B 3624.
C 2715.
D 3725.
E 4162.

Resolução e comentários

Gabarito alternativa A

De acordo com enunciado, o "relógio medidor de luz" funciona como um relógio comum independente do sentido de rotação. Depois basta fazer a composição das classes de algarismos, seguindo as instruções:

Milhar = 2
Centena = 6
Dezena = 1
Unidade = 4

Teremos como resultado o número 2614.

SEMANA 2

Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

Objetos do conhecimento

- Sequências
- Sequências recursivas e não recursivas.
- Progressão Aritmética – PA
- Progressão Geométrica – PG

A habilidade possibilita o acionamento de dois objetos matemáticos: as sequências e os processos de contagem (análise combinatória). Abordaremos inicialmente sequências e depois, contagem.

Solicite aos alunos que leiam e resolvam a questão seguinte. Se abstenha de dar a resposta certa e convide os alunos a mostrar para turma seu raciocínio.

QUESTÃO 01

O número 5 é o primeiro termo de uma sequência. O seguinte é obtido calculando-se o quadrado do número anterior e, a seguir, somando-se seus algarismos e adicionando-se 1 à soma, isto é, $5^2 = 25 \rightarrow 2 + 5 = 7 \rightarrow 7 + 1 = 8$.

Repetindo esse processo, encontraremos o terceiro número da sequência e, assim, sucessivamente.

Qual o 100º termo dessa sequência?

A 5
B 8
C 11
D 14
E 24

Resolução e comentários

Gabarito é a **alternativa [a]:** O segredo está em perceber que a sequência não cresce indefinidamente, mas se estabiliza em um ciclo periódico, (5, 8, 11, 5, 8, 11, ...), daí, espera-se que o aluno consiga entender que o resto da divisão que definirá, qual elemento representa no ciclo. Caso os alunos marquem os itens [b] ou [c], podemos pressupor que se equivocaram na divisão, ou seja, no resto da divisão. No item [d], podemos presumir que os alunos se equivocaram na interpretação, ou seja, adicionando mais um elemento no ciclo e no item [e], podemos pressupor que o aluno somou os termos do ciclo (5 + 8 + 11 = 24).

DE OLHO NO CONCEITO

Quando falamos em sequências, geralmente pensamos em números. No entanto, uma sequência pode ser formada também por figuras geométricas, listas ordenadas de objetos ou até por acontecimentos que se repetem com certa regularidade.

O estudo dessas regularidades permite identificar padrões e prever comportamentos, sendo feito, na Matemática, por meio das progressões aritméticas, progressões geométricas e de outros tipos de sequências.

Fonte: canva.com

Podemos ter sequências numéricas, como a sequência dos números pares: 2, 4, 6, 8, 10,... que é infinita.

Podemos ter sequências finitas, como a sequência dos divisores de 9

D(9): 1,3,9.

Podemos ter sequências figurais:

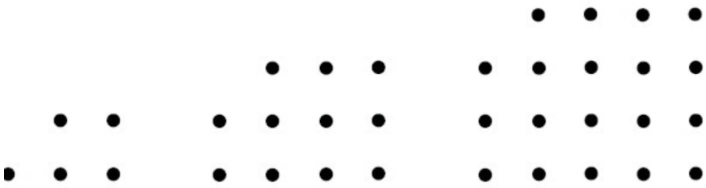


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Fonte: Prova Brasil

Logo temos diferentes tipos de sequências.

Como uma sequência é formada?

Para compor uma sequência precisamos seguir uma ordem ou padrão. Assim temos dois tipos de sequências:

As Sequências do tipo **Recursiva**: É uma sequência onde cada termo é definido a partir de um ou mais termos anteriores.
Por exemplo, a **sequência do matemático Fibonacci** onde cada termo a partir do terceiro é resultado da soma dos dois anteriores, essa sequência é observada na composição da natureza.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21…

Proponha o vídeo
https://www.youtube.com/watch?v=10JDyNffMcg

para os estudantes "enxergarem" a sequência de Fibonacci na natureza. Pergunte o que acharam e entenderam sobre a aplicação da sequência na composição da natureza.

As Sequência do tipo Não Recursiva: É uma sequência onde os termos são definidos por uma fórmula matemática, sem depender de termos anteriores.

Por exemplo, a sequência aritmética dos números pares 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16… cada termo é o dobro de sua ordem na sequência, ou seja, o n-ésimo termo é 2n.

Exemplos

a) Um time de futsal está participando de um treino de condicionamento físico durante 7 dias, sendo que um dos atletas mantém uma regularidade de distâncias percorridas com 2 km no primeiro dia, 5 km no segundo, 8 km no terceiro e assim por diante até 7º dia.

Quantos quilômetros o atleta mencionado percorreu no último dia?

a) 14 b) 17 c) 20 d) 21 e) 24

Solução

Mantendo a regularidade percebe-se que a cada dia, o atleta percorre 3 km a mais que o dia anterior. Assim:

2 km, 5 km, 8 km, 11 km, 14 km, 17 km, **20 km**

b) (Enem) Ronaldo é um garoto que adora brincar com números. Numa dessas brincadeiras, empilhou caixas numeradas de acordo com a sequência conforme mostrada no esquema a seguir.

			1			
		1	2	1		
	1	2	3	2	1	
1	2	3	4	3	2	1
			...			

Interbits®

Ele percebeu que a soma dos números em cada linha tinha uma propriedade e que, por meio dessa propriedade, era possível prever a soma de qualquer linha posterior às já construídas.

A partir dessa propriedade, qual será a soma da 9ª linha da sequência de caixas empilhadas por Ronaldo?

a) 9 b) 45 c) 64 d) 81 e) 285

Solução

primeira linha, soma é 1
segunda linha, soma é $4 = 2^2$
terceira linha, soma é $9 = 3^2$
quarta linha, soma é $16 = 4^2$
...

Soma = n^2 (onde n indica o número da linha)

Logo, a soma dos elementos da linha 9 será $S = 9^2 = 81$

Sequências "cíclicas"

Algumas sequências são ditas "cíclicas" pois elas repetem uma certa quantidade de termos como a sequência a seguir:

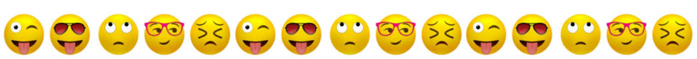
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

....

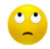
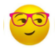
Note que os quatro primeiros elementos eles se repetem ao longo da sequência. Em geral, determinar um elemento da sequência passa por um processo de divisão e observação do resto.

Exemplo

Jacob é uma criança que adora desenhar, ele ficou desenhando emojis em sequência. Observe a imagem da folha onde ele desenhou.



Se Jacob mantém o padrão da sequência, qual o emoji que ocupará a 47ª posição?

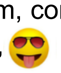
a)  b)  c)  d)  e) 

Solução

Perceba inicialmente que existem 5 emojis se repetindo

Agora veja que o 6º emoji na sequência é igual ao 1º, pois 6 = 5.1 + 1 e mais, o 11º é igual ao 1º, pois 11 = 5.2 + 1.

Note que onde o número da posição deixa resto 1 na divisão por 5 teremos o primeiro emoji da sequência, se deixar resto 2 o segundo emoji e assim por diante, de modo que se for múltiplo (deixa resto zero) o quinto emoji.

Assim, como 47 = 5.9 + 2, teremos o emoji da segunda posição,  logo o gabarito [b]

Progressão aritmética (P.A)

É dita progressão aritmética toda a sequência de variação constante, ou seja, as diferenças entre cada termo e o imediatamente anterior a ele resultam em um mesmo valor, chamado de **razão (r)**.

A partir da sequência:

$$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n).$$

$$\text{razão} \rightarrow r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = ... = a_n - a_{n-1}$$

Exemplo: Um jovem gamer está, diariamente, melhorando sua performance em um jogo, no primeiro dia ele conseguiu um máximo de 5 pontos, já no segundo dia chegou a 9 pontos, enquanto no terceiro dia atingiu 13 pontos, e nos dias seguintes manteve o padrão de crescimento.

Observe a sequência de pontos: (5, 9, 13, ...)

Temos que: 13 – 9 = 9 – 5 = 4, portanto temos uma P.A. de razão 4.

Termo Geral da P.A.

Em uma P.A, vimos que a diferença entre dois termos é igual a uma constante r, e podemos determinar qualquer termo da sequência, de acordo lei de formação

Observe a recorrência a seguir:

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r \rightarrow a_2 = a_1 + r + r \rightarrow a_3 = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r \rightarrow a_4 = a_1 + 2r + r \rightarrow a_4 = a_1 + 3r$

$a_5 = a_4 + r \rightarrow a_5 = a_1 + 3r + r \rightarrow a_5 = a_1 + 4r$

Para o termo a_n, temos

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$, com $n \in \subseteq$

Exemplo:

(ENEM) O número mensal de passagens de uma determinada empresa aérea aumentou no ano passado nas seguintes condições: em janeiro foram vendidas 33 000 passagens; em fevereiro, 34 500; em março, 36 000. Esse padrão de crescimento se mantém para os meses subsequentes.

Quantas passagens foram vendidas por essa empresa em julho do ano passado?

a) 38 000
b) 40 500
c) 41 000
d) 42 000
e) 48 000

Solução

Sendo os números mensais de passagens os termos de uma sequência teremos (33.000, 34.500, 36.000, ...) temos uma P.A. de razão r = 34.500 – 33.000 = 1.500.

Como a_1 é o mês de janeiro, a_2 é o mês de fevereiro e assim sucessivamente, queremos saber essa quantidade de passagens vendidas em julho, ou seja, o a_7.

Então usando o termo geral:

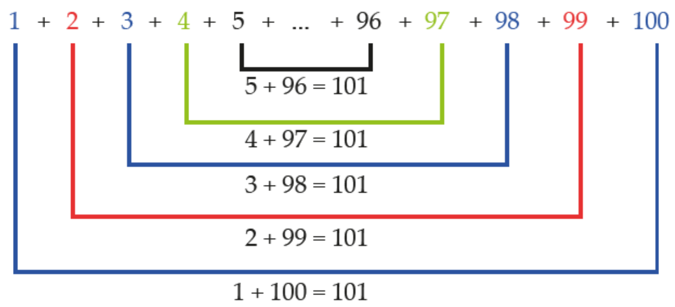
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$
$a_7 = a_1 + (7 - 1) \cdot r$
$a_7 = 33\ 000 + 6 \cdot 1\ 500$
$a_7 = 33\ 000 + 9\ 000$
$a_7 = 42\ 000$.

Soma dos n primeiros termos de uma P.A.

A fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética é historicamente atribuída ao matemático Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), ainda quando criança com aproximadamente 10 anos, resolveu um problema proposto por seu professor de somar todos os números naturais de 1 a 100. Gauss percebeu a regularidade "*a soma dos termos equidistantes aos centrais possuíam o mesmo resultado*". Demonstrou seu raciocínio, que se tornou um marco para a ciência.

$$1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100$$

Observe que a somas dos números das extremidades são iguais a 100, conforme a ilustração



Observou que o 101 aparecerá por 50 vezes, pois ele estava juntando os 100 números de 2 em 2, logo o resultado encontrado foi 101 · 50 = 5 050.

A soma da PA é o produto do número de termos pela média aritmética entre o primeiro e último termo.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Exemplo: A produção de açaí de um estado amazônico está aumentando de forma regular a cada ano. No primeiro ano, foram exportadas 10.000 toneladas, e a produção aumentou 2.500 toneladas por ano.

Considerando que essa tendência se mantenha, qual será a soma total, em tonelada, das exportações ao término de 20 anos?

a) 26.000
b) 35.500
c) 67.500
d) 355.000
e) 675.000

Solução

A sequência possui a_1 = 10.000 e r = 2.500. Precisamos do termo a_{20}.

1º passo: Podemos determinar o 20º termo, completando a sequência ou utilizando termo geral. Segue que

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r \rightarrow a_{20} = 10000 + (20-1) \cdot 2500$$
$$\therefore\ a_{20} = 57500$$

2º passo: Calcular o total, pela soma dos termos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \rightarrow S_{20} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} \rightarrow S_{20} = \frac{(10000 + 57500) \cdot 20}{2}$$

$$\therefore\ S_{20} = 675000$$

Progressão Geométrica (P.G)

É dita progressão geométrica toda sequência onde cada termo, a partir do segundo, é o produto entre uma constante (chamada de razão (q)) e o seu antecessor, para isso vamos considerar o $a_1 \neq 0$. O valor da constante q é determinado pela razão de um termo pelo antecessor, a partir do 2º.

$(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$.

$$\text{razão} \rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

Exemplo: (5, 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640, ...)

$$\text{razão} \rightarrow q = \frac{10}{5} = \frac{20}{10} = ... = 2$$

Termo Geral da P.G.

Observe a recorrência a seguir, considerando a razão q:

$$\begin{aligned}
&a_2 = a_1 \cdot q \\
&a_3 = a_2 \cdot q \rightarrow a_3 = a_1 \cdot q \cdot q \rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2 \\
&a_4 = a_3 \cdot q \rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^2 \cdot q \rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3 \\
&a_5 = a_4 \cdot q \rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^3 \cdot q \rightarrow a_5 = a_1 \cdot q^4 \\
&...
\end{aligned}$$

Para o termo a_n, temos

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, \text{ com } n \in \subseteq$$

Exemplo 1:

Durante uma epidemia, um vírus se multiplica de forma geométrica. No primeiro dia, há 100 vírus. A quantidade de vírus duplica a cada dia.

Considerando esse padrão, qual será a quantidade de vírus no 7º dia?

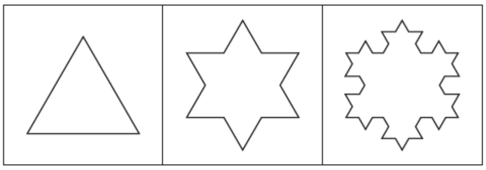
a) 1.200
b) 3.200
c) 6.400
d) 12.800
e) 25.600

Solução:
Vamos aplicar o termo geral da PG, com primeiro termo 100 e razão 2.

$$\begin{aligned}
&a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \\
&a_7 = 100 \cdot 2^{7-1} \\
&a_7 = 100 \cdot 2^6 = 100 \cdot 64 \\
&a_7 = 6400
\end{aligned}$$

Exemplo 2:

O fractal denominado floco de neve de Koch é obtido partindo-se de um triângulo equilátero. Divide-se cada lado desse triângulo em 3 segmentos de mesmo comprimento, desenha-se um novo triângulo equilátero a partir do segmento do meio e retira-se a sua base, conforme figura abaixo. Esse processo ocorre indefinidamente para obter o floco de neve.



Qual o número de lados da sétima figura, isto é, após ocorrer 6 vezes esse processo?

a) 1 024 b) 3 072 c) 4 096 d) 7 048 e) 12 288

Solução:

Primeira figura possui 3 lados, segunda 12 e a terceira 48, formando uma PG de razão q = 4, pois de 3 para 12 e de 12 para 48, quadruplica a cada etapa.

Assim, o 7º termo será

$$\begin{aligned}
&a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \\
&a_7 = 3 \cdot 4^{7-1} \rightarrow a_7 = 3 \cdot 4^6 = 12\,288
\end{aligned}$$

Outro modo seria completar a sequência

x 4 x 4 x 4 x 4 x 4 x 4

3	12	48	192	768	3 072	**12 288**

Soma dos n primeiros termos de uma P.G.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

Exemplo: Considere a sequência (40, 80, 160, ...) uma PG.

Qual o valor da soma dos 10 primeiros termos dessa sequência?

a) 40 920 b) 32 480 c) 16 720 d) 8 540 e) 6 450

Solução:

A razão da PG é $q = \frac{a_2}{a_1} \rightarrow q = \frac{80}{40} = 2$

Calculando a soma dos 10 primeiros termos

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1} \rightarrow S_{10} = \frac{40 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1}$$

$$S_{10} = \frac{40 \cdot (1024 - 1)}{1} \rightarrow S_{10} = 40 \cdot 1023 = 40\,920$$

A Progressão Aritmética de 2ª Ordem (PA de 2ª Ordem)

PA de 2ª ordem é um tema que parece difícil, mas fica simples quando você entende que ela é uma "sequência com dois andares".

O que é uma PA de 2ª Ordem?

Em uma PA comum (1ª ordem), a diferença entre os números é sempre a mesma (ex: 2, 4, 6, 8...).

Na PA de 2ª ordem, a diferença entre os números muda, mas essa mudança segue uma lógica constante.

Se você subtrair os termos de uma sequência e o resultado formar uma PA, a sequência original é uma PA de 2ª ordem.

Exemplo visual:

Sequência: 1, 3, 7, 13, 21...

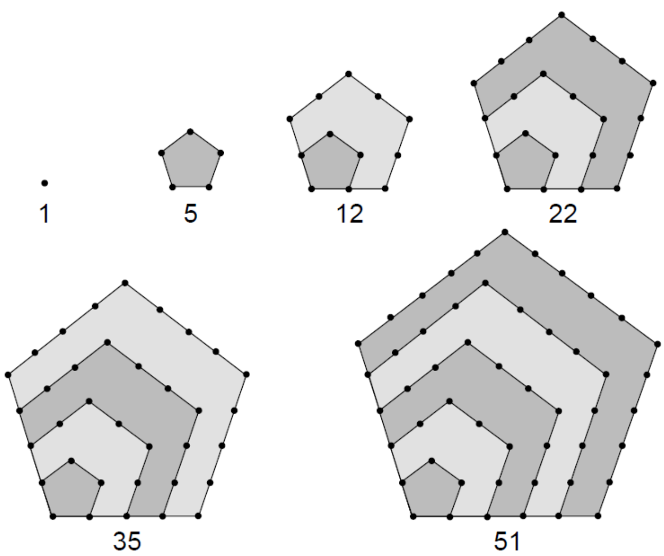
Diferença entre 3 e 1 = **2**
Diferença entre 7 e 3 = **4**
Diferença entre 13 e 7 = **6**
Diferença entre 21 e 13 = **8**

Note que os resultados (2, 4, 6, 8...) formam uma PA de razão 2.

AGORA TENTE VOCÊ!

QUESTÃO 02

(ENEM 2023) Os números figurados pentagonais provavelmente foram introduzidos pelos pitagóricos por volta do século V a.C. As figuras ilustram como obter os seis primeiros deles, sendo os demais obtidos seguindo o mesmo padrão geométrico.



O oitavo número pentagonal é:

A 117.
B 83.
C 89.
D 92.
E 114

Resolução e comentários

Gabarito é a alternativa D:

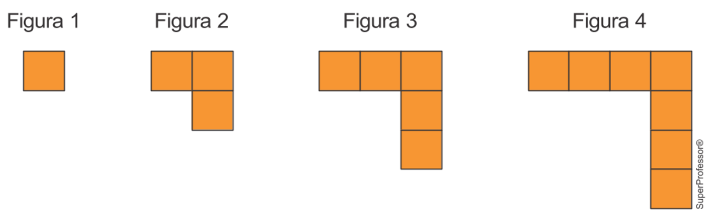
O estudante precisa reconhecer que a figura pentagonal não cresce linearmente, e sim por "camadas"

$$\left(1 \xrightarrow{+4} 5 \xrightarrow{+7} 12 \xrightarrow{+10} 22 \xrightarrow{+13} 35 \xrightarrow{+16} 51 \xrightarrow{+19} 70 \xrightarrow{+22} 92\right),$$

ou seja, é uma PA de segunda ordem, a razão cresce como PA. O aluno que optou equivocadamente pelos itens [b] e [c], podemos pressupor que errou no final 51 + 22 = 83 ou 70 + 19 = 89, no item [a] podemos presumir que o aluno somou um termo a mais na sequência e no item [e], podemos pressupor que o aluno somou um termo a mais na sequência.

QUESTÃO 03

(UERJ 2026) Observe os quatro primeiros elementos de uma sequência de figuras formadas com quadradinhos. Essas figuras seguem um mesmo padrão, ou seja, cada uma tem dois quadradinhos a mais do que a anterior.



O número total de quadradinhos necessários para formar as 17 primeiras figuras dessa sequência é:

A 285.
B 289.
C 291.
D 297.
E 321.

Resolução e comentários

Gabarito é a alternativa B:

Os números de quadradinhos da sequência são termos de uma PA, com a1 = 1 e r = 2. Sendo assim, temos que:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= a_1 + (n-1)r \\ a_{17} &= 1 + 16 \cdot 2 \\ a_{17} &= 33 \end{aligned}\right\rangle S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \rightarrow S_{17} = \frac{(1+33) \cdot 17}{2}$$

$$\therefore S_{17} = 289$$

QUESTÃO 04

(Enem Reaplicação COP 30 (PA) 2025) Em uma loja de informática, 5 dispositivos de armazenagem de dados contém as seguintes capacidades, expressas em gigabytes (GB): 32, 64, 128, 256 e 512. Nessa loja, esses dispositivos têm os preços P1, P2, P3, P4 e P5, respectivamente, os quais são determinados considerando-se R$10,00 por GB.

Qual é o termo geral da sequência desses preços?

A 2^{n+4}
B $5 \cdot 2^{n+6}$
C $10 \cdot 2^{n+4}$
D $10 \cdot (2^n + 4)$
E $10 \cdot (2^{n-1} + 32)$

Resolução e comentários

Gabarito é a alternativa C:

A sequência de preços por ser escrita como $(10 \cdot 2^5, 10 \cdot 2^6, \ldots, 10 \cdot 2^9)$. Ou seja, é uma PG de razão 2. Sendo assim, o seu termo geral é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \; a_n = 10 \cdot 2^5 \cdot 2^{n-1} \;\; \therefore a_n = 10 \cdot 2^{n+4}$$

QUESTÃO 05

O salário de determinado estagiário em uma empresa, em janeiro, era de R$1.500,00. Esse salário teve um acréscimo mensal constante, sempre sobre o valor recebido no mês anterior, durante os meses de fevereiro, março, abril e maio.

Se o salário no mês de maio foi de R$ 5.000,00, o salário no mês de abril foi de

A R$ 3 250,00.
B R$ 4 575,00.
C R$ 4 125,00.
D R$ 2 375,00.
E R$ 2 950,00.

Resolução e comentários

Gabarito é a alternativa C:

Admitindo que x seja o valor de cada acréscimo, temos:

Janeiro: 1500
Fevereiro: 1500 + x
Março: 1500 + 2x
Abril: 1500 + 3x
Maio: 1500 + 4x

Logo:

$$1500 + 4x = 5000 \Rightarrow 4x = 3500 \Rightarrow x = 875.$$

O salário no mês de abril foi de:

$$1500 + 3 \cdot 875 = R\$\ 4.125{,}00.$$

QUESTÃO 06

(UEMA 2024) As artesãs de Barreirinhas (MA) estão organizadas na Cooperativa dos Artesãos dos Lençóis Maranhenses – Artecoop. A cidade é considerada uma das principais produtoras desse artesanato. A partir de 2000, contou com a atuação de técnicos, que motivou a formação de grupos de artesãs, ganhadoras do Prêmio Top 100, em 2004.

https://www.artesol.org.br/artecoop (adaptada)

Uma das artesãs resolveu, naquele ano, vender um determinado modelo de bolsa em uma feira de exposição, nessa cidade, por R$ 36,80, cada unidade. Com o objetivo de alavancar suas vendas, a mesma decidiu fazer uma promoção em que o comprador pagaria, de acordo com a quantidade comprada, os seguintes valores, segundo o quadro abaixo:

Mercadoria com desconto (bolsa)	1ª unid.	2ª unid.	3ª unid.	4ª unid.
Valor (R$)	36,80	36,20	35,60	35,00

A artesã vendeu, neste dia, o máximo de 12 unidades desse modelo de bolsa.

Considerando que o padrão de desconto aconteceu até o limite dessa quantidade, uma senhora gaúcha, dona de uma loja, que comprou 10 unidades dessa bolsa, nesta promoção, pagou, em reais, o valor de

A 344,00

B 341,00
C 338,00
D 315,00
E 292,00

Resolução e comentários

Gabarito é a alternativa B:

Como os preços decrescem a uma taxa de R$ 0,60, os valores pagos são termos de uma PA cujo 10º termo vale:

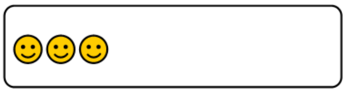
$$a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot r \; a_{10} = 36{,}80 + 9 \cdot (-0{,}60) \; a_{10} = 31{,}40$$

Portanto, o valor total pago pela cliente foi de:

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} \; S_{10} = \frac{(36{,}80 + 31{,}40) \cdot 10}{2} \therefore S_{10} = R\$341{,}00$$

QUESTÃO 07

(ENEM 2024) Uma criança, utilizando um aplicativo, escreveu uma mensagem para enviar a um amigo. Essa mensagem foi escrita seguindo estas etapas:

Etapas	Visor de escrita
1ª etapa: inseriu três figuras do tipo  no visor de escrita da mensagem;	
2ª etapa: copiou o que havia inserido anteriormente e colou (inseriu o que havia copiado) ao lado;	
3ª etapa: copiou o que tinha no visor na etapa e colou ao lado.	

A criança seguiu copiando e colando, em cada etapa, o que tinha no visor na etapa imediatamente anterior, até concluir a 20ª etapa. Em seguida, enviou a mensagem.

Qual foi o total de figuras contidas na mensagem enviada?

A 3×2^{19}

B 3×2^{20}

C 3×2^{21}

D $3 \times 2^{20} - 1$

E $3 \times 2^{20} - 3$

Resolução e comentários

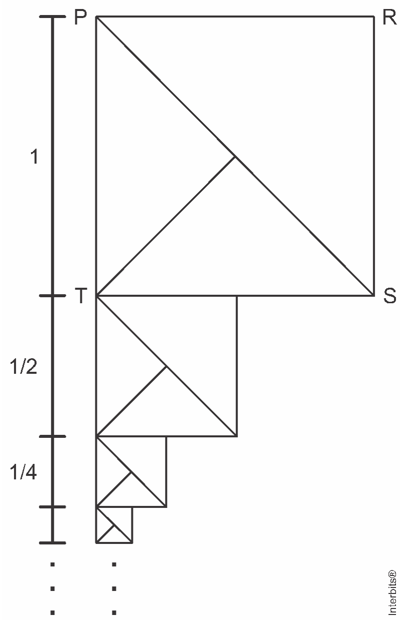
Gabarito é a alternativa A:

A sequência descrita é uma progressão geométrica de primeiro termo igual a 3 e razão 2. Sendo assim, o seu vigésimo termo é igual a:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$a_{20} = 3 \cdot 2^{20-1}$$
$$a_{20} = 3 \cdot 2^{19}$$

QUESTÃO 08

(ENEM 2020) O artista gráfico holandês Maurits Cornelius Escher criou belíssimas obras nas quais as imagens se repetiam, com diferentes tamanhos, induzindo ao raciocínio de repetição infinita das imagens. Inspirado por ele, um artista fez um rascunho de uma obra na qual propunha a ideia de construção de uma sequência de infinitos quadrados, cada vez menores, uns sob os outros, conforme indicado na figura.



O quadrado PRST, com lado de medida 1, é o ponto de partida. O segundo quadrado é construído sob ele tomando-se o ponto médio da base do quadrado anterior e criando-se um novo quadrado, cujo lado corresponde à metade dessa base. Essa sequência de construção se repete recursivamente.

Qual é a medida do lado do centésimo quadrado construído de acordo com esse padrão?

A $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

B $\left(\frac{1}{2}\right)^{99}$

C $\left(\frac{1}{2}\right)^{97}$

D $\left(\frac{1}{2}\right)^{-98}$

E $\left(\frac{1}{2}\right)^{-99}$

Resolução e comentários

Gabarito é a alternativa B:

Os lados dos quadrados constituem a progressão geométrica $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots\right)$. Portanto, a resposta é $\left(\frac{1}{2}\right)^{100-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{99}$.

QUESTÃO 09

(ENEM 2019) Após o Fórum Nacional Contra a Pirataria (FNCP) incluir a linha de autopeças em campanha veiculada contra a falsificação, as agências fiscalizadoras divulgaram que os cinco principais produtos de autopeças falsificados são: rolamento, pastilha de freio, caixa de direção, catalisador e amortecedor.

Disponível em: www.oficinabrasil.com.br.
Acesso em: 25 ago. 2014 (adaptado).

Após uma grande apreensão, as peças falsas foram cadastradas utilizando-se a codificação:

1: rolamento, 2: pastilha de freio, 3: caixa de direção, 4: catalisador e 5: amortecedor.

Ao final obteve-se a sequência:

$$5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

que apresenta um padrão de formação que consiste na repetição de um bloco de números. Essa sequência descreve a ordem em que os produtos apreendidos foram cadastrados.

O 2015º item cadastrado foi um(a)

A rolamento.
B catalisador.
C amortecedor.
D pastilha de freio
E caixa de direção.

Resolução e comentários

Gabarito é a alternativa E:

Observe que os códigos se repetem de 8 em 8. Logo, sendo $2015 = 251 \cdot 8 + 7$, podemos concluir que a resposta é 3, ou seja, caixa de direção.

QUESTÃO 10

(VUNESP) Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. Elas deverão ser empilhadas respeitando a seguinte ordem: uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já estejam na pilha.

Por exemplo:

1ª pilha	2ª pilha	3ª pilha	4ª pilha
uma tábua	duas tábuas	quatro tábuas	oito tábuas

A quantidade de tábuas empilhadas na 12ª pilha.

A 512
B 1 024
C 2 048
D 4 096
E 8 192

Resolução e comentários

Gabarito é a alternativa C:

A partir da sequência de tábuas (1, 2, 4, 8, ...) temos uma P.G. de razão 2, como estamos procurando a 12ª pilha, denotaremos isso como a_{12}, logo:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$a12 = a1 \cdot q^{12-1}$
$a_{12} = 1 \cdot 2^{11}$
$a_{12} = 2\ 048$.

SEMANA 3

Competência de área 1 - Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

Objetos do conhecimento

- Análise Combinatória
- PFC, Princípio aditivo e multiplicativo.
- Permutação.
- Arranjo.
- Combinação

Professor(a), este material é pautado na perspectiva de resolução de problemas, assim ele iniciará com uma questão para estimular a discussão, seguido de um resumo de conceitos e posteriormente com questões ENEM e inéditas com padrão ENEM.

Solicite aos alunos que leiam e resolvam a questão seguinte, se abstenha de dar a resposta certa e convide os alunos a mostrar para turma seu raciocínio.

QUESTÃO 01

(ENEM PPL 2020) Um determinado campeonato de futebol, composto por 20 times, é disputado no sistema de pontos corridos. Nesse sistema, cada time joga contra todos os demais times em dois turnos, isto é, cada time joga duas partidas com cada um dos outros times, sendo que cada jogo pode terminar empatado ou haver um vencedor.

Sabendo-se que, nesse campeonato, ocorreram 126 empates, o número de jogos em que houve ganhador é igual a:

A 64.
B 74.
C 254.
D 274.
E 266

Resolução e comentários

Gabarito é a alternativa C

Usa-se o raciocínio combinatório e subtrai os empates do total, $A_{20,\,2} = 380$ subtrai (380 - 126 = 254). Os itens [a] e [b] o aluno pode ter se equivocado ao usar combinação $C_{20,\,2} = 190$ subtrai (190 - 126 = 64) e se equivocou na subtração (190 −126 = 74).

No item [d], Aluno calcula corretamente o total (380), e subtrai o número de empates incorretamente (380 − 106 = 274) e no item [e] o aluno pode ter se equivocado na subtração (380 − 126 = 266).

DE OLHO NO CONCEITO

Trata-se de um problema em que o estudante precisa compreender os diferentes tipos de processos de contagem e a natureza dessas operações com a consideração ou não de sorteios com elementos em ordem (lista), restrições que condicionam as escolhas ou até formação de agrupamentos. No caso do problema, trata-se de uma situação de agrupamento conhecido como combinação simples.

Análise combinatória

Processos de contagem estão ligados ao cotidiano das pessoas, porém a contagem de todas as possibilidades de um acontecimento pode ser trabalhosa e não viável. Especificamente, a **Análise combinatória** é a área da matemática dedicada aos métodos de contagem, sem que haja a necessidade de apresentar todas as possibilidades de ocorrência.

Fatorial

Seja **n** um número inteiro não negativo, representamos fatorial de n **(n!)** por:

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \text{, com } n \geq 2.$$

COMENTÁRIOS

Iremos adotar como válidos os casos particulares

$$0! = 1 \text{ e } 1! = 1$$

Exemplos:

a) $3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$ b) $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$

c) $5! - 2\cdot(3! + 4) = 120 - 20 = 100$

d) $\dfrac{n!(n+5)!}{(n-1)!(n+7)!} = \dfrac{n\cdot(n-1)!(n+5)!}{(n-1)!(n+7)(n+6)(n+5)!} = \dfrac{n}{(n+7)(n+6)}$

Princípio fundamental da contagem (P.F.C)

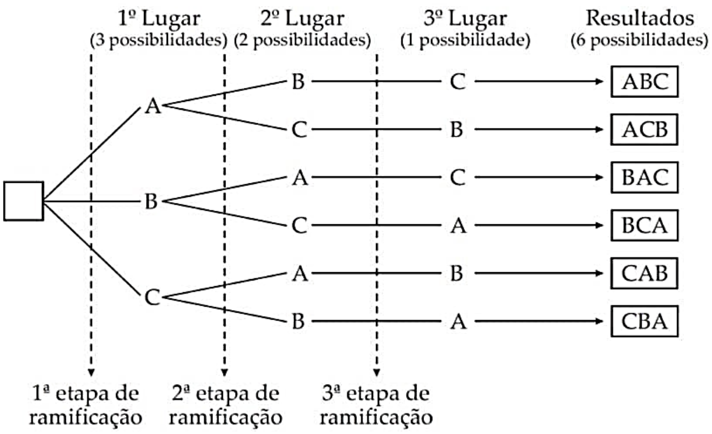
Também conhecido como **princípio multiplicativo**, pode-se considerar, de modo simples, um processo de contagem de eventos sucessivos e independentes. Vamos utilizar o exemplo motivador deste princípio:

Exemplo:

Ana, Bianca e Carla participaram de uma corrida. De quantos modos diferentes podemos obter 1ª, 2ª e a 3ª colocada?

Resolução e comentários

Analisando todos os casos, podemos montar a **árvore de possibilidades** ou **diagrama da árvore**.



Analisando a árvores, temos que

1º Lugar possibilidades	**2º Lugar** possibilidades	**3º Lugar** possibilidades	**Total de resultados**
3	2	1	$\mathbf{3 \cdot 2 \cdot 1 = 6}$

Se existe **x** modos de tomar uma decisão $\mathbf{D_1}$ e, tomada a decisão $\mathbf{D_1}$, existir **y** modos de tomar a decisão $\mathbf{D_2}$, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões $\mathbf{D_1}$ e $\mathbf{D_2}$ é o resultado do produto $x \cdot y$.

Exemplo:

(MACKENZIE) Um trem de passageiros é constituído de uma locomotiva e 6 vagões distintos, sendo um deles restaurante. Sabendo que a locomotiva deve ir à frente e que o vagão-restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, o número de modos diferentes de montar a composição é:

a) 120
b) 320
c) 500
d) 600
e) 720

Resolução e comentários

A locomotiva **L** é fixa, em seguida teremos que decidir entre 5 vagões, já que o restaurante não pode ser escolhido. Escolhido um dos cinco, sobrarão 4 vagões + restaurante, totalizando 5 decisões possíveis. Os demais seguem, descontando cada possibilidade.
Assim, temos:

$$\underbrace{1}_{\text{Locomotiva}} \cdot \underbrace{5}_{\substack{\text{1º Vagão} \\ \text{Não pode ser} \\ \text{restaurante}}} \cdot \underbrace{5}_{\substack{\text{2º Vagão} \\ \text{Pode ser} \\ \text{restaurante}}} \cdot \underbrace{4}_{\text{3º Vagão}} \cdot \underbrace{3}_{\text{4º Vagão}} \cdot \underbrace{2}_{\text{5º Vagão}} \cdot \underbrace{1}_{\text{6º Vagão}} = 600$$

Princípio aditivo

Considere **x** modos possíveis de ocorrer um evento $\mathbf{E_1}$ um evento distinto $\mathbf{E_2}$ possa ocorrer de **y** modos possíveis. Então **($\mathbf{E_1}$** ou **$\mathbf{E_2}$)** pode ocorrer de **x + y** modos diferentes.

Exemplo:

Carla pretende viajar de carro da cidade onde mora, que possui apenas duas saídas ao Norte e duas ao Sul. De quantos modos possíveis, Carla pode sair da cidade?

Resolução e comentários

Percebemos que, para sair da cidade podemos decidir sair pelas duas saídas ao Norte ou pelas duas ao Sul, assim:

Norte	Sul	Total
2 saídas	2 saídas	2 + 2 = 4

Observação

Cuidado para não confundir cada um deles. O princípio **multiplicativo** analisa as etapas sucessivas para solucionar o problema (conjunção **e**), já o **aditivo** reúne todas as possibilidades dos eventos ($E_1 \cup E_2$) e segue as propriedades da teoria dos conjuntos (conjunção ou).

Exemplo:

(UNESP) Um turista, em viagem de férias pela Europa, observou pelo mapa que, para ir da cidade A à cidade B, havia três rodovias e duas ferrovias e que, para ir de B até uma outra cidade, C, havia duas rodovias e duas rodovias e duas ferrovias. O número de percursos diferentes que o turista pode fazer para ir de A até C, passando pela cidade B e utilizando rodovia e trem obrigatoriamente, mas em qualquer ordem, é:

a) 9
b) 10
c) 12
d) 15
e) 20

Resolução e comentários

1ª situação		2ª situação	
(Rodovia) e (Ferrovia)	ou	(Ferrovia) e (Rodovia)	
3×2	+	2×2	= 10

"Princípio da preferência ou restrição"

Em algumas situações o processo de contagem pode ser organizado considerando as restrições como o ponto de partida. É claro que não é obrigatório, mas essa escolha pode facilitar bastante o desenvolvimento da contagem.

Exemplo:

De quantos modos diferentes, cinco pessoas podem ocupar os cinco lugares de um carro, em uma viagem, se apenas duas delas podem dirigir?

Resolução e comentários

Se todos pudessem dirigir, teríamos

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ possibilidades

Utilizando o **princípio da preferência**, vamos começar pelo motorista (duas possibilidades) e os demais em qualquer lugar restante.

$$\underbrace{2}_{\text{Motorista}} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48 \text{ possibilidades}$$

Observação

Alguns problemas de contagem, que envolvem uma sequência de caracteres, necessitam de uma leitura "simétrica". Um **palíndromo** pode ser uma palavra, frase ou qualquer outra sequência de caracteres, que tenha a propriedade de poder ser lida da mesma maneira tanto da **direita para a esquerda como da esquerda para a direita**.

Num palíndromo, normalmente são desconsiderados os sinais ortográficos, assim como os espaços entre palavras.

Exemplos:

a) ARARA
b) ANOTARAM A DATA DA MARATONA
c) AMOR A ROMA

Um número é **CAPICUA, ela vem do catalão CAP I CUA, "cabeça" e "cauda"** quando lido da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda representa sempre o mesmo valor.

Exemplos:

a) 2002
b) 3745473
c) 5555555

Observação: Alguns enunciados de questões de vestibulares, já foram utilizados a palavra **palíndromo** para situações de números.

d) Com os algarismos 2, 3, 4, 5, 6, quantos números de 5 algarismos podem ser formados, com leitura da esquerda para direita igual da direita para esquerda?

Resolução e comentários

Possibilidades				
5	5	5	1 opção (igual	1 opção (igual
opções	opções	opções	escolha da 2ª)	escolha da 1ª)
$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 = 125$ possibilidades				

Princípio da reflexão (Princípio do desprezo da ordem)

Em algumas situações, devemos ignorar a ordem de elementos, principalmente quando são repetidos. Quando a ordem não importa, as combinações de elementos são consideradas iguais. Esse conceito diz que, em uma contagem ou escolha, a ordem dos elementos não altera o resultado, ou seja, mudar a posição dos elementos não gera uma nova possibilidade.

Exemplo:

Quantos são os anagramas da palavra **LATA**?

Resolução e comentários

Observe que a palavra **LATA**, possui duas letras **"A"**. Quando ocorre a troca entre elas, não notamos diferenças. Porém, vamos considerar que as duas letras **"A"** da palavra **LATA** sejam diferentes. Para exemplificar isso, utilizaremos $LAT\bar{A}$.

Organizando os anagramas			
$LAT\bar{A}$	$ALT\bar{A}$	$\bar{A}LTA$	$TLA\bar{A}$
$LA\bar{A}T$	$AL\bar{A}T$	$\bar{A}LAT$	$TL\bar{A}A$
$L\bar{A}TA$	$A\bar{A}LT$	$\bar{A}ALT$	$T\bar{A}LA$
$L\bar{A}AT$	$A\bar{A}TL$	$\bar{A}ATL$	$TAL\bar{A}$
$LTA\bar{A}$	$ATL\bar{A}$	$\bar{A}TLA$	$TA\bar{A}L$
$LT\bar{A}A$	$AT\bar{A}L$	$\bar{A}TAL$	$T\bar{A}AL$

Desprezando a ordem e agora considerando as letras repetidas, teríamos apenas 12 possibilidades, pois trocar as letras **A** entre si, não resulta em diferenças.

LATA, LAAT, LTAA, TALA, TAAL, TLAA, ALTA, ATLA, AALT, AATL, ALAT, ATAL

Outro modo de determinar estes resultados seria:

$$\underbrace{N}_{\text{Número de possibilidades}} = \frac{4!}{\underbrace{2!}_{\text{Corresponde as duas letras repetidas.}}} = \frac{24}{2} = 12$$

Em situações de anagramas de n letras, com x letras iguais e outras y letras iguais, e assim por diante, podemos desprezar as repetições por

$$\boxed{\underbrace{\text{Total}}_{\text{Número de possibilidades}} = \frac{n!}{x!\,y!\ldots}}$$

Princípio de inclusão – exclusão

Existem problemas onde duas ações A e B são independentes, mas podem ocorrer juntas, ou seja, há uma interseção entre A e B, o que quer dizer que essas possibilidades serão contabilizadas duas vezes. Portanto faz-se necessário subtrair as possibilidades duplicadas:

$$N(A \text{ ou } B) = \text{possib}(A) + \text{possib}(B) - \text{possib}(A \text{ e } B)$$

Permutação simples sem elementos repetidos

Como o nome sugere, ocorre quando temos um total de ***n*** elementos e os grupos possíveis de serem formados se diferenciam apenas pela ordem desses ***n*** elementos, ou seja, pela permuta de lugar entre eles.

Todos os elementos são utilizados para formar sequências.

$$\boxed{P_n = n!}$$

Exemplos:

01. Seis amigos estão lado a lado para registrar algumas fotografias para um ensaio de formatura e ficou decidido que para cada imagem captada pelo fotógrafo, eles deveriam trocar as posições entre si. Sabe-se que não foram registradas fotos repetidas, conforme a decisão do grupo.

Qual o total de fotos registradas para a formatura?

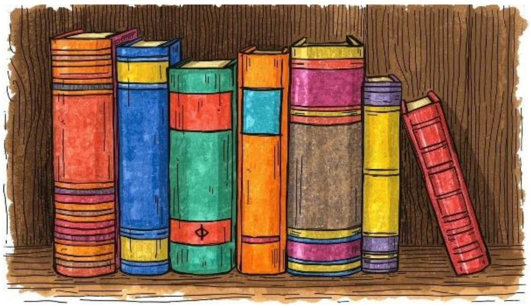
a) 6
b) 48
c) 120
d) 480
e) 720

Resolução e comentários

Observe que as fotografias são consideradas diferentes quando há uma permutação entre os amigos. Deste modo, basta calcular a permutação simples

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \text{ possibilidades}$$

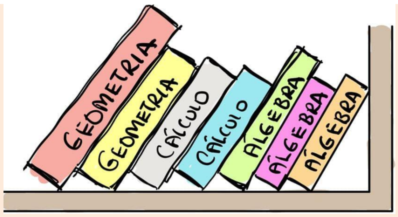
02. **(UNISC 2016)** Newton possui 7 livros distintos, sendo 3 do assunto Álgebra, 2 do assunto Cálculo e 2 do assunto Geometria.



O número de maneiras diferentes que Newton pode organizar esses livros, lado a lado em fileira, em uma estante, de forma que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos, é

a) 24 b) 36 c) 56 d) 72 e) 144

Resolução e comentários



Para garantir que os livros de mesmo assunto fiquem juntos, formaremos três grupos. Podemos permutar os grupos (P_3). Porém, dentro de cada grupo, os livros podem ser permutados: Álgebra (P_3), Cálculo (P_2) e Geometria (P_2). Assim, temos o total de possibilidades:

$$\underbrace{P_3}_{\text{Permutação dos três grupos}} \cdot \underbrace{P_3}_{\text{Permutação dos livros de Álgebra}} \cdot \underbrace{P_2}_{\text{Permutação dos livros de Cálculo}} \cdot \underbrace{P_2}_{\text{Permutação dos livros de Geometria}} = 3!3!2!2! = 144$$

Permutação simples com elementos repetidos

Sabemos que o número de anagramas de uma palavra de 3 letras é **3!**, ou seja, 6 palavras diferentes. Mas se a palavra conter letras iguais, como por exemplo a palavra ALA? Teríamos os resultados **A**LA, L**A**A, **A**AL, AL**A**, LA**A**, A**A**L

Destacamos as letras A, uma delas em negrito para diferenciar. Porém se não usarmos o destaque anterior, percebemos que são apenas três resultados possíveis:

ALA, LAA, AAL

Isso ocorre por conta das letras iguais, quando trocamos apenas a posição das letras **A** entre elas, não percebemos alteração. Aplicando o "**princípio do desprezo da ordem**" **(P.D.O)** que é o "inverso" do princípio multiplicativo, podemos eliminar as repetições dividindo o total de permutações pelo produto das permutações, de cada elemento repetido.

Considere **n** elementos, com **a** elementos iguais a **A**, **b** elementos iguais a **B**, ..., **z** elementos iguais a Z. O total de permutações dos **n** elementos é

$$\boxed{P_n^{a,\,b,\,c,\ldots,\,z} = \frac{n!}{a! \times b! \times c! \times \ldots \times z!}}$$

Exemplo:

(FGV 2009) O número de anagramas diferentes que podem ser construídos com as letras da palavra VARGAS, e que comecem e terminem com consoantes é:

a) 360
b) 15
c) 24
d) 144
e) 288

Resolução e comentários

A palavra **VARGAS** possui **4 consoantes** e duas vogais repetidas **A.** São 6 decisões a serem tomadas, garantindo duas consoantes nas extremidades. Sobrarão 4 letras restantes, com duas letras repetidas.

$$\underbrace{4}_{\text{Consoante}} \cdot \underbrace{\frac{4!}{2!}}_{\substack{\text{permutação de 4 letras}\\ \text{com duas letras repetidas}}} \cdot \underbrace{3}_{\substack{\text{Consoante}\\ \text{distinta}}} = 4 \cdot \frac{24}{2} \cdot 3 = 144$$

AGORA TENTE VOCÊ!

QUESTÃO 02

(Enem 2025) Dez casais fundaram um grupo de dança e decidiram constituir uma diretoria com três cargos: presidente, secretário e tesoureiro. Para maior representatividade, decidiu-se que no máximo uma pessoa por casal poderá ocupar um cargo nessa diretoria.

Quantas diretorias diferentes podem ser constituídas por esses 10 casais?

A $10 \times 9 \times 8$

B $20 \times 18 \times 16$

C $20 \times 19 \times 18$

D $10 \times 9 \times 8 \times 2$

E $20 \times 18 \times 16 \times 2$

Resolução e comentários

Gabarito é a alternativa B, para a vaga de presidente, há 20 possibilidades de escolha (pois há 10 casais). Para a de secretário, há 18 possibilidades (excetuados o presidente e o seu par). Analogamente, para a de tesoureiro, há 16 possibilidades. Sendo assim, a quantidade de diretorias diferentes é de $20 \cdot 18 \cdot 16.$ No item [a], se pressupõe que o aluno se equivocou na interpretação desconsiderando o casal e no item [c] o aluno não se atentou para a regra do casal, nos itens [d] e [e] podemos pressupor que o aluno considerou o casal como duplicata.

QUESTÃO 03

Uma empresa de tecnologia está desenvolvendo um novo sistema de segurança para o acesso ao seu servidor principal. Para aumentar a proteção, o sistema exige a criação de uma "Chave de Acesso Rápido" composta por **3 letras distintas**, escolhidas entre as cinco primeiras letras do alfabeto (A, B, C, D, E).
Nesse sistema, a ordem das letras é fundamental: a sequência (A, B, C) libera um nível de acesso diferente da sequência (C, B, A).

De acordo com as condições estabelecidas, o número total de "Chaves de Acesso Rápido" diferentes que podem ser criadas é:

A 10
B 15
C 20
D 60
E 125

Resolução e comentários

Gabarito é a alternativa D

Dados do problema:
Há 5 letras disponíveis: A, B, C, D e E.
A chave é formada por 3 letras distintas (não pode repetir).

A ordem importa (ABC ≠ CBA).

Quando a ordem é importante e não há repetição, usamos arranjo simples.
Cálculo
O número de arranjos de 5 elementos, tomados 3 a 3, é:

$$A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3$$

5 opções para a 1ª letra
4 opções para a 2ª letra
3 opções para a 3ª letra

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

O estudante identifica corretamente que se trata de um **Arranjo Simples** $A_{(n,p)}$, pois os elementos são distintos e a ordem importa. O cálculo realizado é $A_{(5,3)} = 5 \times 4 \times 3 = 60$. O estudante que confundiu o conceito de Arranjo com o de **Combinação** optou pela incorreta [a]. Na alternativa [b] o

estudante pode ter tentado multiplicar o número de elementos pelo número de posições sem aplicar os princípios da análise combinatória. O estudante pode ter iniciado o cálculo do arranjo corretamente, mas parou precocemente ou cometeu um erro na simplificação do fatorial fazendo 5 x 4 = 20, marcando alternativa [c].
O estudante pode ter ignorado a restrição de que as letras devem ser **distintas**. Ele aplica o Princípio Fundamental da Contagem com reposição, calculando 5^3 = 125, optando assim pela alternativa [e].

QUESTÃO 04

(ENEM PPL 2019) Uma pessoa comprou um aparelho sem fio para transmitir músicas a partir do seu computador para o rádio de seu quarto. Esse aparelho possui quatro chaves seletoras e cada uma pode estar na posição 0 ou 1. Cada escolha das posições dessas chaves corresponde a uma frequência diferente de transmissão.

A quantidade de frequências diferentes que esse aparelho pode transmitir é determinada por

A 6.
B 8.
C 12.
D 16.
E 24.

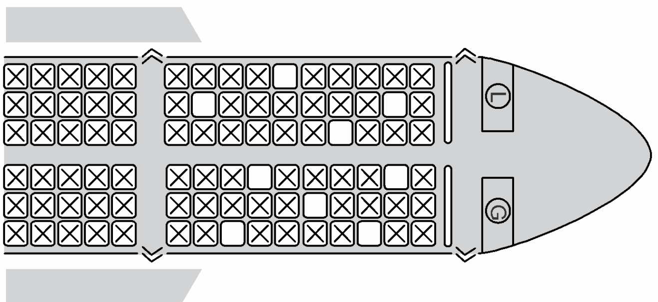
Resolução e comentários

Gabarito é a alternativa D

Como cada chave pode assumir apenas duas posições, pelo Princípio Multiplicativo, é imediato que a resposta é $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16.$

QUESTÃO 05

(ENEM 2015) Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



Disponível em: www.gebh.net. Acesso em: 30 out. 2013 (adaptado).

O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por

A $\frac{9!}{2!}$
B $\frac{9!}{7! \times 2!}$
C $7!$
D $\frac{5!}{2!} \times 4!$
E $\frac{5!}{4!} \times \frac{4!}{3!}$

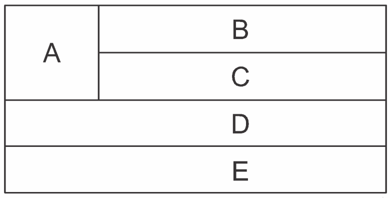
Resolução e comentários

Gabarito é a alternativa A

O resultado pedido corresponde ao número de arranjos simples de 9 objetos tomados 7 a 7 isto é, $A_{9,7} = \frac{9!}{2!}.$

QUESTÃO 06

(ENEM PPL 2015) A bandeira de um estado é formada por cinco faixas, A, B, C, D e E, dispostas conforme a figura.



Deseja-se pintar cada faixa com uma das cores verde, azul ou amarelo, de tal forma que faixas adjacentes não sejam pintadas com a mesma cor.

O cálculo do número de possibilidades distintas de se pintar essa bandeira, com a exigência acima, é

A $1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2.$
B $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2.$
C $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 3.$
D $3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 2.$
E $3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2.$

Resolução e comentários

Gabarito é a alternativa B

Por ordem: a faixa A pode ser pintada por qualquer uma das três cores; a faixa B pode ser pintada por duas das três cores (pois é adjacente à A, que já foi pintada por alguma cor); a faixa C só pode ser pintada pela cor restante (pois é adjacente à A e B, que já foram pintadas pelas outras duas cores); a faixa D só pode ser pintada pela mesma cor da faixa B (pois é adjacente à A e C, que já foram pintadas pelas outras duas cores); por fim, a faixa E pode ser pintada pelas duas cores diferentes da faixa D, da qual é adjacente. Assim, o cálculo do número de possibilidades distintas de se pintar essa bandeira é $3 \times 2 \times 1 \times 1 \times 2$.

QUESTÃO 07

(ENEM 2016) Para cadastrar-se em um site, uma pessoa precisa escolher uma senha composta por quatro caracteres, sendo dois algarismos e duas letras (maiúsculas ou minúsculas). As letras e os algarismos podem estar em qualquer posição. Essa pessoa sabe que o alfabeto é composto por vinte e seis letras e que uma letra maiúscula difere da minúscula em uma senha.

Disponível em: www.infowester.com. Acesso em: 14 dez. 2012.

O número total de senhas possíveis para o cadastramento nesse site é dado por

A $10^2 \cdot 26^2$

B $10^2 \cdot 52^2$

C $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2!}$

D $10^2 \cdot 26^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

E $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$

Resolução e comentários

Gabarito é a alternativa E

Existem $10 \cdot 10 = 10^2$ maneiras de escolher os dois algarismos e $52 \cdot 52 = 52^2$ maneiras de escolher as letras. Definidos os caracteres da senha, podemos dispô-los de $P_4^{(2,2)} = \frac{4!}{2! \cdot 2!}$ modos. Portanto, pelo Princípio Multiplicativo, segue que a resposta é $10^2 \cdot 52^2 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}$.

QUESTÃO 08

(UFMS) A quantidade de anagramas que se pode formar com as letras da palavra JABUTI que possuem as consoantes juntas é igual a:

A 24.

B 100.

C 144.

D 360.

E 720.

Resolução e comentários

Gabarito é a alternativa C

Palavra: JABUTI
- Total de letras: 6
- Consoantes: J, B, T
- Vogais: A, U, I

Queremos todos os anagramas possíveis da palavra JABUTI com as consoantes J, B e T juntas (em bloco), ou seja, consideramos esse bloco como uma única "letra" :

- Bloco (JBT)
- A
- U
- I

Temos agora 4 “elementos” para permutar: $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
As letras J, B e T podem se permutar entre si dentro do bloco:

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

Multiplicando as possibilidades:

$$24 \times 6 = 144$$

QUESTÃO 09

(PROVÃO PAULISTA 2) Uma caixa de papelão tem divisórias que formam doze compartimentos para armazenar bolas de Natal. Em cada compartimento cabe apenas uma bola. Ana numerou os compartimentos e guardou 12 bolas idênticas entre si a menos da cor. Das 12 bolas guardadas por Ana, 6 são vermelhas, 4 douradas e 2 azuis.

O número de maneiras distintas que Ana pode ter guardado as bolas é igual a

A $\frac{12!}{8!6!4!}$

B $\frac{12!}{6!4!}$

C $\frac{12! \cdot 12!}{8!4!6!6!}$

D $\frac{12!}{6!4!2!}$

E 12!

Resolução e comentários

Gabarito é a alternativa D

Cada maneira de arrumar as bolas nas gavetas difere de outra apenas pela ordem de disposição das mesmas, já que a natureza de todas as arrumações é a mesma (as mesmas bolas, das mesmas cores, em todas as disposições). Assim, o total de maneiras de arrumar as bolas nas gavetas é uma permutação de 12 elementos com repetição de 6 bolas vermelhas, 4 bolas douradas e 2 bolas azuis.

Logo, o número de maneiras é dado por:

$$P_{12}^{6,4,2} = \frac{12!}{6!4!2!}$$

QUESTÃO 10

(UERJ) Uma pessoa tem no bolso, exatamente, sete notas de valores diferentes: 2, 5, 10, 20, 50, 100 e 200 reais, como mostra a imagem.

Essa pessoa retira do bolso, ao acaso, apenas três dessas notas.

O número total de retiradas diferentes em que as três notas somam valor maior que 50 reais é igual a:

A 29
B 30
C 31
D 32
E 34

Resolução e comentários

Gabarito é a alternativa C

Número total de maneiras de retirar 3 notas dentre as 7:

$$C_{7,3} = \frac{7!}{4!\,3!} = 35$$

Número de maneiras de retirar 3 notas com a soma resultando em um valor menor que 50 reais (caso em que são retiradas 3 notas dentre as de 2, 5, 10 ou 20 reais):

$$C_{4,3} = \frac{4!}{1!\,3!} = 4$$

Portanto, a quantidade procurada de maneiras é de:

35 – 4 = 31

SEMANA 4

Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.
H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

Objetos do conhecimento

- Coordenadas Retangulares
  2D e 3D

- Projeção Ortogonal
  Vistas

- Polígonos
  Nomenclatura e Classificação

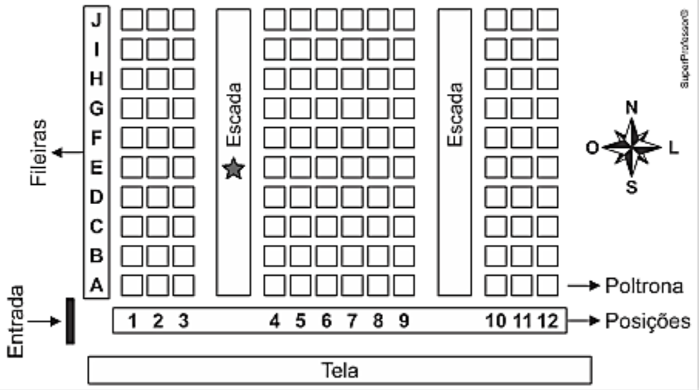
- Poliedros
  Vértice, Aresta e Face
  Relação de Euler
  Sólidos Gerados por Revolução

Professor(a), este material é pautado na perspectiva de resolução de problemas, assim ele iniciará com uma questão para estimular a discussão, seguido de um resumo de conceitos e posteriormente com questões ENEM e inéditas com padrão ENEM.

Solicite aos alunos que leiam e resolvam a questão seguinte, se abstenha de dar a resposta certa e convide os alunos a mostrar para turma seu raciocínio.

QUESTÃO 01

(ENEM 2023) Uma pessoa comprou um ingresso para o cinema em cuja entrada está afixado um mapa com a representação bidimensional do posicionamento das poltronas, conforme a figura. Essa pessoa, após consultar o mapa, começou a subir uma das escadas e parou na posição indicada pela estrela, direcionada para o norte. Ela conferiu seu bilhete e observou que, para encontrar sua poltrona, deveria partir do ponto onde estava, continuar subindo a escada na direção norte por mais quatro fileiras e olhar à sua direita, e sua poltrona será a terceira.



Nesse cinema, as poltronas são identificadas por uma letra, que indica a fileira, e um número, que fornece a posição da poltrona na fileira, respectivamente.

A poltrona dessa pessoa é a identificada por

A A6.
B H1.
C H6.
D I1.
E I6.

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa [E], a pessoa se encontra inicialmente na fileira E entre as posições 3 e 4. Ao subir quatro fileiras na direção norte e apontar a terceira poltrona à direita, a poltrona identificada é a de posição I6. Os alunos que optaram pela alternativa [d] possivelmente confundiram as direções direita e esquerda. Os estudantes que optaram pelas alternativas [b] e [c] conferiram a fileira atual, pensando de maneira equivocada que seria a fileira H. A alternativa [a] foi atrativa para os alunos que de erroneamente desceram a escada.

DE OLHO NO CONCEITO

O Sistema de Coordenadas Cartesiano (criado por René Descartes) é a base para localizar objetos no espaço e é fundamental no ENEM para questões de Geometria Analítica, Funções e até Geografia (Latitude/Longitude), ou utilizando os pontos cardeais.

O Plano Cartesiano

É formado pelo cruzamento perpendicular de duas retas numéricas. A intersecção é a Origem (0,0).

Elementos Principais:

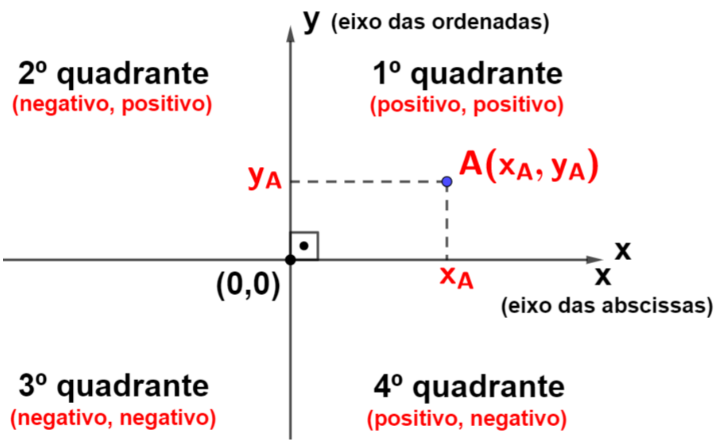
Eixo horizontal (x): Chamado de eixo das Abscissas.
Eixo vertical (y): Chamado de eixo das Ordenadas.
Par Ordenado: Todo ponto P é representado por P(x, y), ou seja a coordenada x seguida da coordenada y.

Atenção: A ordem importa! (2, 3) é diferente de (3, 2).
Os Quadrantes

O plano é dividido em 4 regiões (contadas no sentido anti-horário):

- **1º Quadrante:** $x > 0$, $y > 0$ (+, +)
- **2º Quadrante:** $x < 0$, $y > 0$ (-, +)
- **3º Quadrante:** $x < 0$, $y < 0$ (-, -)
- **4º Quadrante:** $x > 0$, $y < 0$ (+, -)

Visualização dos Quadrantes e Eixos:

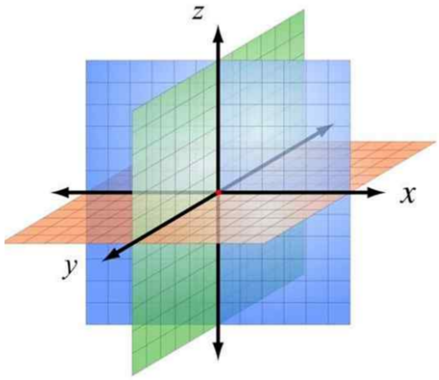


Sistema Tridimensional (3D) – O Espaço

Para representar objetos com profundidade (como sólidos geométricos), adicionamos um terceiro eixo.

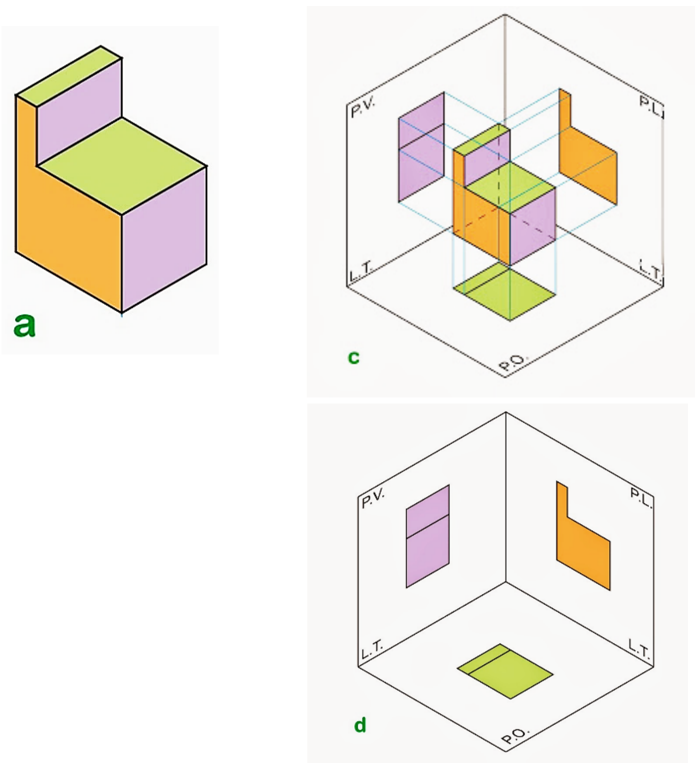
Elementos Principais:

Eixo x: Abscissas (largura).
Eixo y: Ordenadas (profundidade/comprimento).
Eixo z: Cota ou Aplicada (altura).
Terna Ordenada: O ponto é **P(x, y, z)**, necessariamente nesta ordem.



Observação

O ENEM cobra com frequência questões de Projeção Ortogonal. Imagine que o sol está exatamente acima de um objeto 3D. A sombra que ele faz no chão (plano xy) "elimina" a altura (z).
A projeção de um ponto P(x, y, z) no plano xy (chão) é P'(x, y, 0).
A projeção no plano xz (parede lateral) é P"(x, 0, z).
Na imagem a seguir temos a vista lateral (PL) , a vista frontal (PV) e a projeção ortogonal (PO).

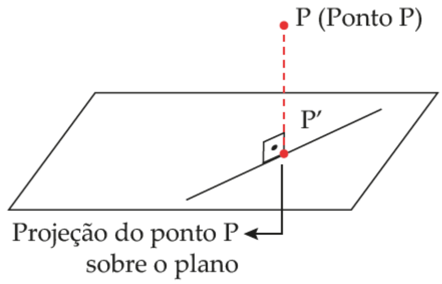


fonte: disegniti.blogspot

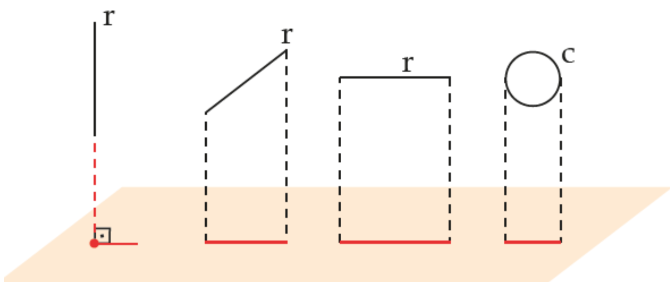
Projeção ortogonal

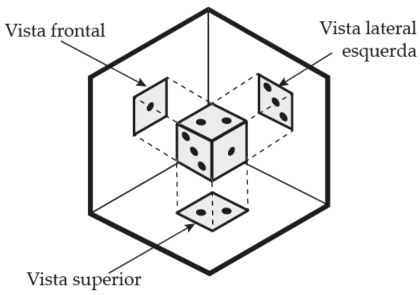
Projeção ortogonal de uma figura geométrica sobre um plano é a representação de todos os pontos da figura no plano, associados a uma espécie de "sombra".

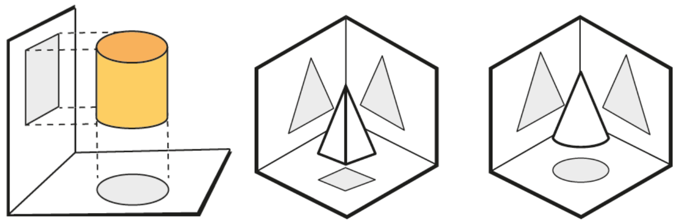
Observe a projeção ortogonal do ponto P sobre um plano.



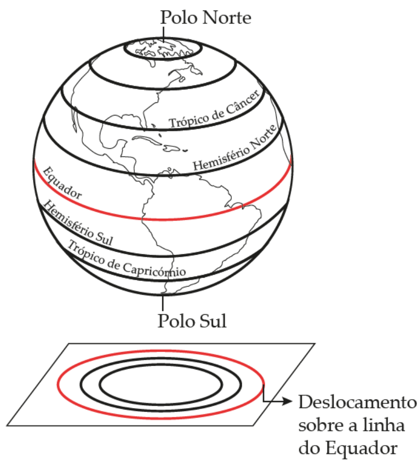
Exemplos







Projeção dos paralelos à linha do equador no plano



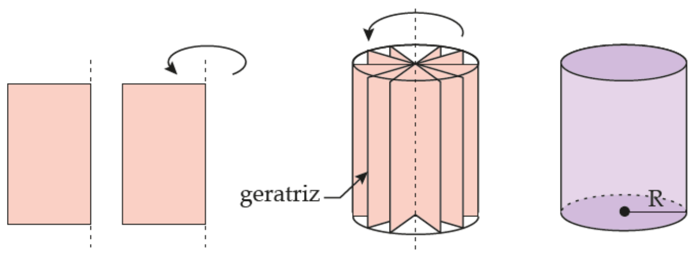
Sólidos de revolução

Entende-se como corpos tridimensionais obtidos quando uma figura plana é “girada” em torno de um eixo fixo, ou seja, com uma curva/ reta ou forma bidimensional giramos 360° ao redor de uma reta para gerar um sólido.

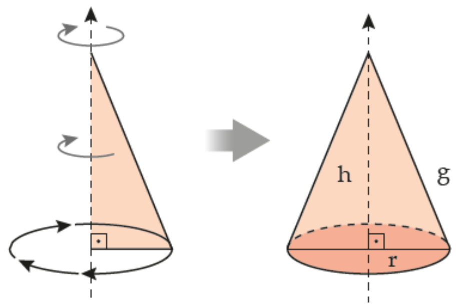
Esse processo transforma a área da figura em uma superfície sólida, obtendo formas como cilindros, cones e esferas etc.

Exemplos

a) Um retângulo, girando 360º em torno de um de seus lados, gera um cilindro circular reto



b) Um triângulo retângulo girando 360º em torno de um dos lados (cateto), gera um cone circular reto.



$$A = \frac{\left(A_{\text{de cada face}}\right) \cdot \left(N_{\substack{\text{Número de faces} \\ \text{de mesma natureza}}}\right)}{2}$$

Planificações

De modo geral, planificar um sólido é representar todas as suas superfícies em um plano, de forma que possam ser visualizadas simultaneamente e conservem suas dimensões, permitindo o estudo de sua geometria.

Poliedros

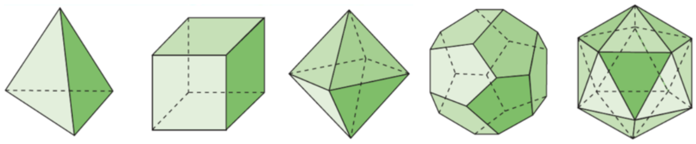
Um poliedro é um sólido geométrico limitado por uma superfície fechada composta exclusivamente por polígonos planos (figuras como triângulos, quadrados, pentágonos etc.).

Os Poliedros de Platão são sólidos geométricos extremamente especiais e simétricos. Eles recebem esse nome porque o filósofo grego Platão os associou aos elementos da natureza em sua obra Timeu.

Para que um poliedro seja classificado como "de Platão", ele deve obedecer a três critérios rigorosos:

a) Todas as suas faces devem ser polígonos regulares e iguais (por exemplo, todas as faces são triângulos equiláteros idênticos).
b) De cada vértice deve partir o mesmo número de arestas.
c) Ele deve ser um poliedro convexo que satisfaça a Relação de Euler (V + F = A + 2)

Existem apenas cinco sólidos que conseguem cumprir essas regras:



Tetraedro regular — Hexaedro regular — Octaedro regular — Dodecaedro regular — Icosaedro regular

Nomenclatura

Poliedro de Platão	Vértices	Arestas	Faces	Todas as faces são:
Tetraedro	4	6	4	Triângulos
Hexaedro	8	12	6	Quadrados
Octaedro	6	12	8	Triângulos
Dodecaedro	20	30	12	Pentágonos
Icosaedro	12	30	20	Triângulos

RELAÇÃO DE EULER

A relação de Euler relaciona o número de vértices **(V)**, arestas **(A)** e faces **(F)** de um poliedro e para todo convexo, temos:

$$V + F = A + 2$$

A relação de Euler vale para todos os poliedros convexos, porém existem outros poliedros que não são convexos, mas são **eulerianos**.

Cálculo do número de arestas de um poliedro convexo

$A_{\text{de cada face}}$: Número de “lados” de cada polígono.

$N_{\substack{\text{Número de faces} \\ \text{de mesma natureza}}}$: Representa número de polígonos com mesmo número de lados, ou seja, o número de triângulos, quadriláteros, pentágonos... que formam o poliedro.

Exemplo 1:

Uma pedra preciosa, depois de lapidada, assumiu a forma de um poliedro convexo de 8 faces triangulares, 16 faces quadrangulares e uma face octogonal. Comentam os entendidos que o valor dessa pedra é tal que cada vértice dela lhe confere 1.000 dólares em valor.

Deste modo, a pedra preciosa deve valer

A 8 mil dólares.
B 12 mil dólares.
C 25 mil dólares.

D 36 mil dólares.
E 48 mil dólares.

Resolução e comentários

A pedra preciosa do problema, possui

$$\text{N}^{\text{o}} \text{ de faces} \rightarrow F = 25 \begin{cases} \text{8 faces triangulares} \\ \text{16 faces quadrangulares} \\ \text{1 face octogonal} \end{cases}$$

Para resolver o problema, precisamos determinar o número de vértices e para isso, seguiremos dois passos:
1º passo: Cálculo do número de arestas do poliedro

$$A = \frac{\left(A_{\text{de cada face}}\right) \cdot \left(N_{\substack{\text{Número de faces} \\ \text{de mesma natureza}}}\right)}{2}$$

$$A = \frac{\overbrace{8 \times 3}^{\substack{\text{Para os} \\ \text{TRIÂNGULOS}}}}{2} + \frac{\overbrace{16 \times 4}^{\substack{\text{Para os} \\ \text{QUADRILÁTEROS}}}}{2} + \frac{\overbrace{1 \times 8}^{\substack{\text{Para o} \\ \text{OCTÓGONO}}}}{2} \Rightarrow A = 48$$

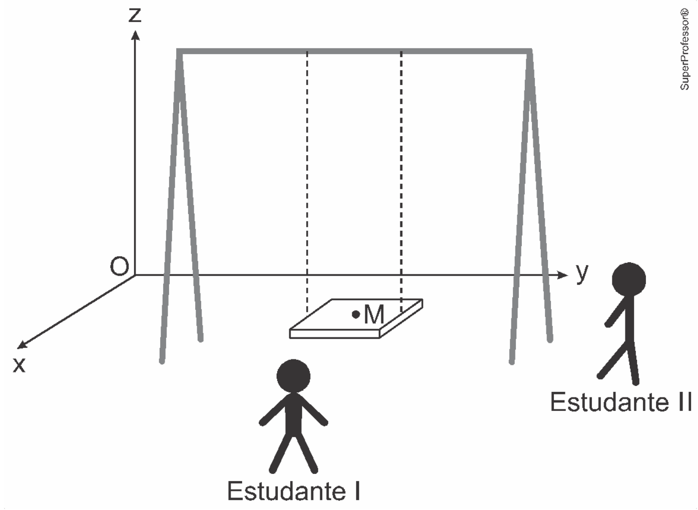
2º passo: Agora utilizar a Relação de Euler para determinar o número de vértices

$$V + F = A + 2$$
$$V + 25 = 48 + 2 \rightarrow \text{N}^{\text{o}} \text{ de vértices é: } V = 25$$

Como é conferido 1 000 dólares para cada vértice, temos como valor da pedra preciosa $25 \times 1000 = 25$ mil dólares

Exemplo 2:

(ENEM PPL 2024) Em um curso de desenho artístico, a professora organizou uma oficina prática com dois estudantes, envolvendo uma atividade de representação visual. A figura representa um balanço, constituído de um assento retangular paralelo ao plano xOy do chão, ligado a uma haste horizontal por cordas de sustentação paralelas entre si e de mesma medida. O ponto M representa a posição de um objeto, fixado pela professora, no centro do assento. Foi solicitado que o estudante **I** se posicionasse tendo vista frontal da trajetória descrita pelo ponto M, e a estudante **II**, tendo vista lateral dessa trajetória enquanto o balanço se movimentava. Nesse movimento, as cordas de sustentação permaneciam esticadas e ortogonais à haste horizontal. A professora solicitou que os estudantes observassem e descrevessem a trajetória realizada pelo ponto M ao longo do movimento.

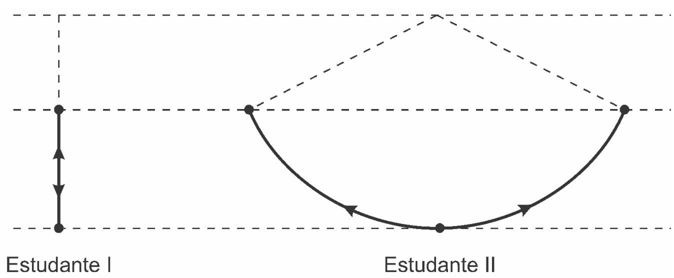


As projeções ortogonais da trajetória realizada pelo ponto M vistas pelo estudante **I** no plano yOz e pela estudante **II** no plano xOz são, respectivamente, representadas por

A um segmento de reta vertical e um segmento de reta horizontal.
B um segmento de reta vertical e uma curva em forma de parábola.
C uma curva em forma de parábola e um segmento de reta vertical.
D um arco de circunferência e um segmento de reta vertical.
E um segmento de reta vertical e um arco de circunferência.

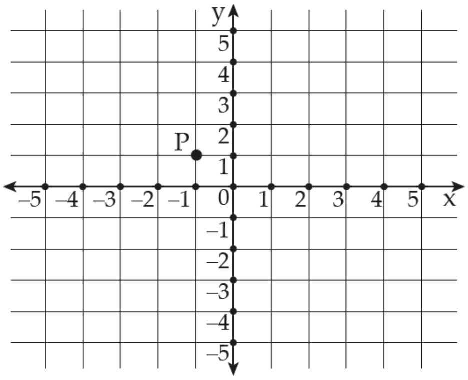
Resolução e comentários

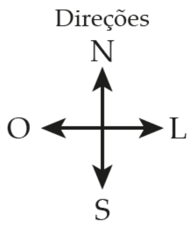
O estudante **I** enxergaria a trajetória do ponto M como um segmento de reta vertical, e a estudante **II** como um arco de circunferência.



Exemplo 3:

(ENEM) Alunos de um curso de engenharia desenvolveram um robô "anfíbio" que executa saltos somente nas direções norte, sul, leste e oeste. Um dos alunos representou a posição inicial desse robô, no plano cartesiano, pela letra P, na ilustração.





A direção norte-sul é a mesma do eixo y, sendo que o sentido norte é o sentido de crescimento de y, e a direção Leste-Oeste é a mesma do eixo x, sendo que o sentido leste é o sentido de crescimento de x.

Em seguida, esse aluno deu os seguintes comandos de movimentação para o robô: 4 norte, 2 leste e 3 sul, nos quais os coeficientes numéricos representam o número de saltos do robô nas direções correspondentes, e cada salto corresponde a uma unidade do plano cartesiano.

Depois de realizar os comandos dados pelo aluno, a posição do robô, no plano cartesiano, será

A (0; 2).
B (0; 3).
C (1; 2).
D (1; 4).
E (2; 1).

Resolução e comentários

Observando o plano cartesiano, nota-se que o Robô inicialmente está na posição **P(- 1, 1)** que representa -1 no eixo das abscissas (eixo x) e 1 no eixo das ordenadas (eixo y).

Utilizando os conceitos de norte, sul, leste e oeste:

Norte: Pra cima (eixo y, sentido positivo)
Sul : Pra baixo (eixo y, sentido negativo)
Leste : Pra direita (eixo x, sentido positivo)
Oeste: Pra esquerda (eixo x, sentido negativo)

O Robô do problema, percorreu: 4 norte, 2 leste e 3 sul. Perceba: se ele vai 4 unidades para cima e 3 para baixo (4 – 3 = 1) então ele foi, na verdade, 1 pra cima. Isso significa que o valor em y dele (ao final) aumentou em uma unidade, **ficando 2**.

E se ele percorrer 2 para leste (2 pra direita) ele aumentará o valor de x (note que leste equivale ao eixo x, sentido positivo, ou seja, vai aumentando). Neste caso, o valor que era – 1 aumentou 2 unidades (– 1 + 2 = 1), o que equivale ao valor final em x.

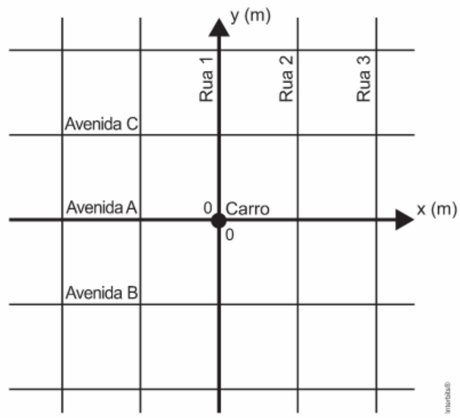
Logo, temos (valores finais) x = 1 e y = 2 , ou seja, o ponto **(1,2)**

AGORA TENTE VOCÊ!

QUESTÃO 02

(ENEM PPL 2021) Uma moça estacionou seu carro na interseção da Rua 1 com a Avenida A. Ela está hospedada em um hotel na Rua 3, posicionado a exatos 40 metros de distância da Avenida A, contados a partir da Avenida A em direção à Avenida B.

No mapa está representado um plano cartesiano cujo eixo das abscissas coincide com a Avenida A e o das ordenadas, com a Rua 1, sendo a origem (0, 0) o local onde se encontra estacionado o veículo. Os quarteirões formados pelos cruzamentos dessas vias formam quadrados de lados medindo 100 m.



A ordenada do ponto que representa a localização do hotel é

A – 60.
B – 40.
C 0.
D 40.
E 60.

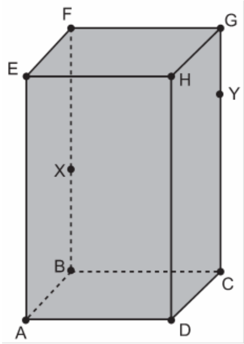
Resolução e comentários

O gabarito é letra B

se os quarteirões formados pelos cruzamentos das vias formam quadrados de lados medindo 100 m e o hotel se encontra na Rua 3, então a abscissa da posição do hotel, em metros, é $x = 200$. Ademais, como a posição do hotel corresponde a exatos 40 metros de distância da Avenida A, contados a partir da Avenida A em direção à Avenida B, segue que a ordenada da posição do hotel, em metros, é y = - 40.

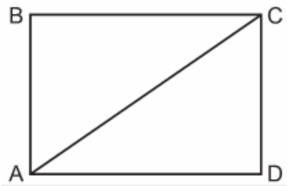
QUESTÃO 03

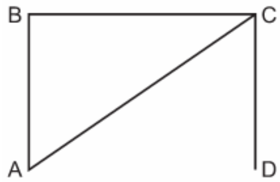
(ENEM PPL 2021) Um inseto percorreu sobre a superfície de um objeto, em formato de um prisma reto ABCDEFGH, com base retangular, uma trajetória poligonal, com vértices nos pontos: A - X - Y - G - F - E - X - G - E, na ordem em que foram apresentados.



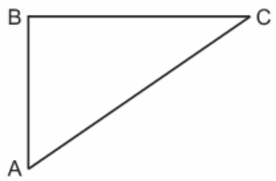
É necessário representar a projeção ortogonal do trajeto percorrido pelo inseto sobre o plano determinado pela base do prisma.

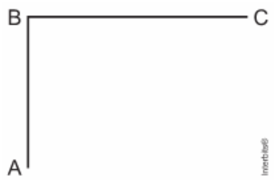
A representação da projeção ortogonal do trajeto percorrido pelo inseto é

A


B


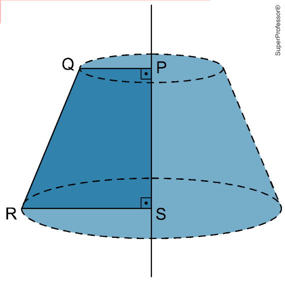
C


D


E


Resolução e comentários

O gabarito é alternativa D



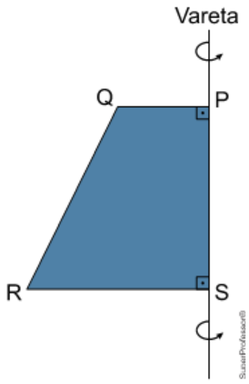
A projeção do segmento AX é o segmento AB.
A projeção do segmento XY é o segmento BC.
A projeção do segmento YG é o ponto C.
A projeção do segmento GF é o segmento CB.
A projeção do segmento FE é o segmento BA.
A projeção do segmento EX é o segmento BA.
A projeção do segmento XG é o segmento BC.
A projeção do segmento GE é o segmento CA.

Portanto, a representação da projeção ortogonal do trajeto percorrido pelo inseto é a que consta na alternativa [d]. A alternativa [e] foi opção dos alunos que equivocadamente não perceberam o último movimento e sua projeção; nas alternativas [a], [b] e [c] o aluno por equívoco projetou movimento para o vértice D e nenhum dos movimentos descritos possui projeção passando em D.

QUESTÃO 04

(ENEM 2024) Para obter um sólido de revolução (rotação de 360° em torno de um eixo fixo), uma professora realizou as seguintes etapas:
- recortou o trapézio retângulo PQRS de um material rígido;
- afixou o lado PS do trapézio em uma vareta fixa retilínea (eixo de rotação);
- girou o trapézio 360° em torno da vareta e obteve um sólido de revolução.

Observe a figura que apresenta o trapézio afixado na vareta e o sentido de giro.



O sólido obtido foi um(a)

A cone.
B cilindro.
C pirâmide.
D tronco de cone.
E tronco de pirâmide.

Resolução e comentários

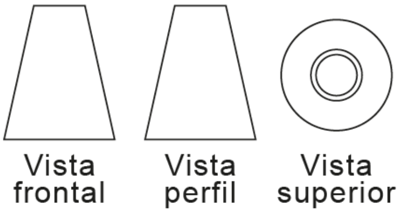
O gabarito é a alternativa D

Ao rotacionarmos o trapézio o aluno formará um tronco de cone. Os itens [a] e [b], podemos pressupor que o aluno se confundiu em qual figura plana rotacionar para formar os sólidos geométricos (triângulo e o retângulo, respectivamente) e no item [e] é possível supor que o aluno confundiu a formação da base do sólido na rotação (base quadrangular).

QUESTÃO 05

(ENEM PPL 2020) No desenho técnico, é comum representar um sólido por meio de três vistas (frontal, perfil e superior), resultado da projeção do sólido em três planos, perpendiculares dois a dois.

A figura representa as vistas de uma torre.



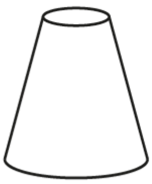
Disponível em: www.uems.br. Acesso em: 11 dez. 2012 (adaptado).

Com base nas vistas fornecidas, qual figura melhor representa essa torre?

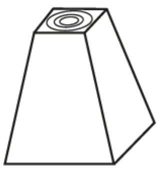
A

B

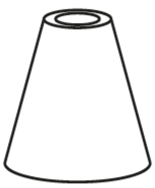
C



D



E



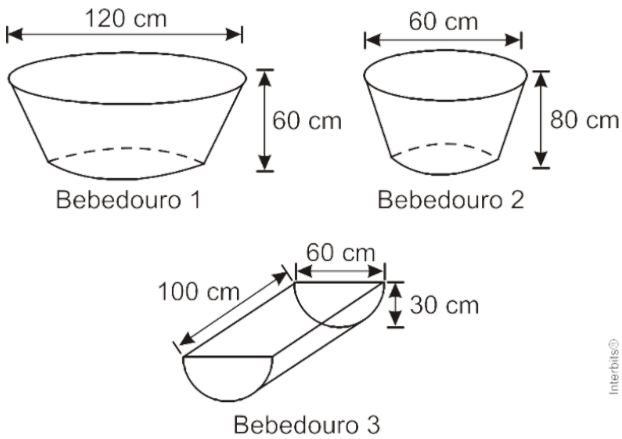
Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa E

Desde que a projeção ortogonal da seção meridiana de um tronco de cone reto é um trapézio isósceles, a única alternativa que apresenta um tronco de cone e um possível cilindro reto inscrito é a [E].

QUESTÃO 06

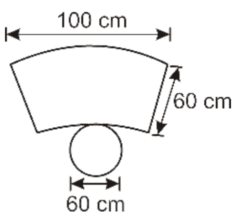
(ENEM 2010) Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura.



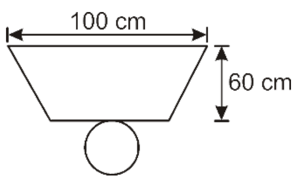
A escolha do bebedouro. In: *Biotemas*.
V.22, no. 4, 2009 (adaptado).

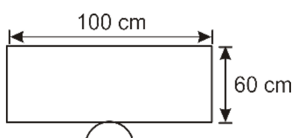
Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?

A



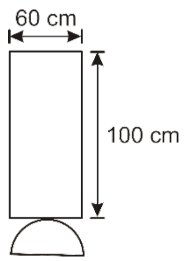
B



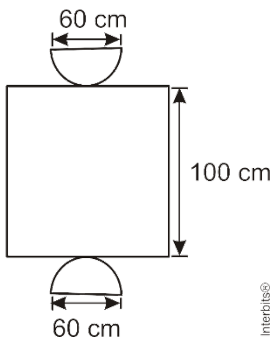


C

D



E



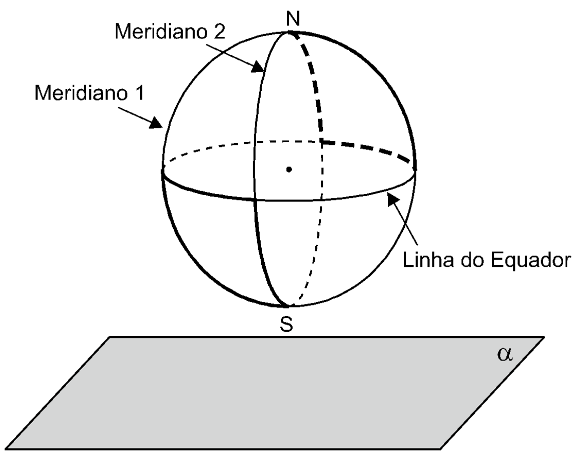
Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa E

A superfície do bebedouro 3 é constituída por dois semicírculos e por um retângulo.

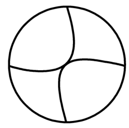
QUESTÃO 07

(ENEM 2022) Na figura estão destacadas duas trajetórias sobre a superfície do globo terrestre, descritas ao se percorrer parte dos meridianos 1, 2 e da Linha do Equador, sendo que os meridianos 1 e 2 estão contidos em planos perpendiculares entre si. O plano a é paralelo ao que contém a Linha do Equador.

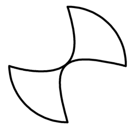


A vista superior da projeção ortogonal sobre o plano a dessas duas trajetórias é

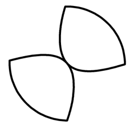
A



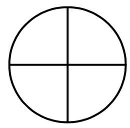
B



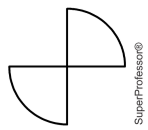
C



D



E



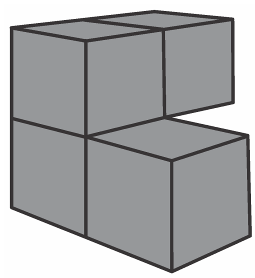
Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa E

A projeção ortogonal das duas trajetórias corresponde a dois quadrantes de raio $\frac{NS}{2}$, simétricos em relação ao ponto N' projeção ortogonal de N sobre α.Ademais, é imediato que N' = S', com S' sendo a projeção ortogonal de S sobre α.
A resposta é a figura apresentada na alternativa [E].

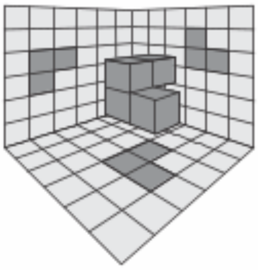
QUESTÃO 08

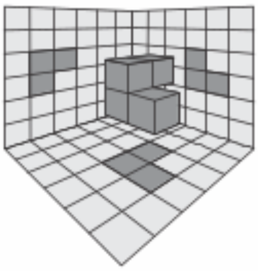
(ENEM 2020) Em um jogo desenvolvido para uso no computador, objetos tridimensionais vão descendo do alto da tela até alcançarem o plano da base. O usuário pode mover ou girar cada objeto durante sua descida para posicioná-lo convenientemente no plano horizontal. Um desses objetos é formado pela justaposição de quatro cubos idênticos, formando assim um sólido rígido, como ilustrado na figura.

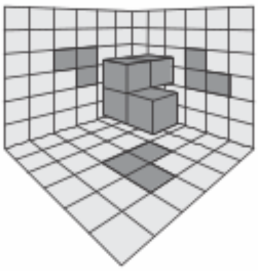


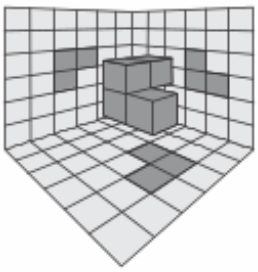
Para facilitar a movimentação do objeto pelo usuário, o programa projeta ortogonalmente esse sólido em três planos quadriculados perpendiculares entre si, durante sua descida.

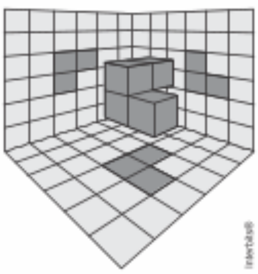
A figura que apresenta uma possível posição desse sólido, com suas respectivas projeções ortogonais sobre os três planos citados, durante sua descida é

A


B


C


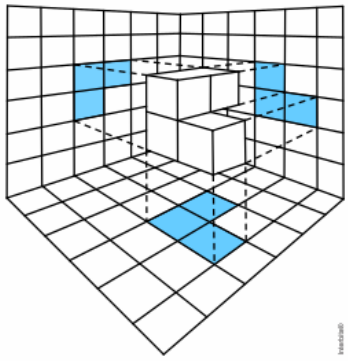
D


E


Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa E

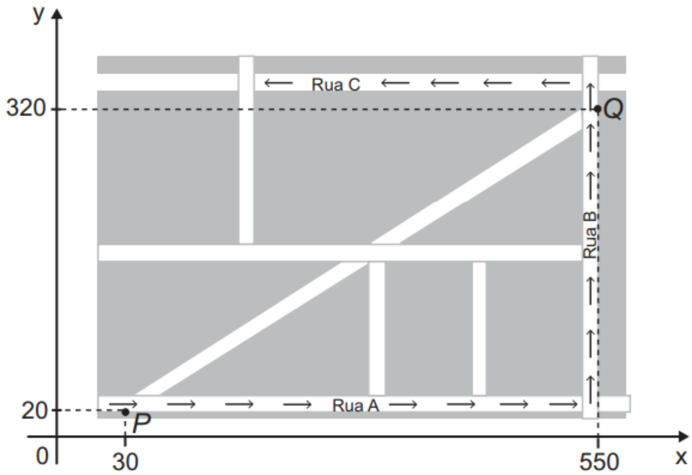
Considere a figura, em que as respectivas projeções ortogonais estão indicadas.



A alternativa que exibe uma figura compatível é a [E].

QUESTÃO 09

(ENEM 2015) Devido ao aumento do fluxo de passageiros, uma empresa de transporte coletivo urbano está fazendo estudos para a implantação de um novo ponto de parada em uma determinada rota. A figura mostra o percurso, indicado pelas setas, realizado por um ônibus nessa rota e a localização de dois de seus atuais pontos de parada, representados por *P* e *Q*.



Os estudos indicam que o novo ponto T deverá ser instalado, nesse percurso, entre as paradas já existentes P e Q, de modo que as distâncias percorridas pelo ônibus entre os pontos P e T e entre os pontos T e Q sejam iguais.

De acordo com os dados, as coordenadas do novo ponto de parada são

A (290 ; 20).
B (410 ; 0).
C (410 ; 20).
D (440 ; 0).
E (440 ; 20).

Resolução e comentários

Gabarito alternativa E

Temos os pontos P(30, 20) e Q(550, 320). A distância percorrida pelo ônibus x foi de: (550 – 30)=520 e em y, (320 – 20)=300, totalizando 820. O ponto T deve dividir a trajetória ao meio, logo, a distância percorrida de P para T deve ser 410, assim, as coordenadas desse ponto será de T (30 + 410, 20) = T(440, 20).

QUESTÃO 10

(ENEM 2022) Dentre as diversas planificações possíveis para o cubo, uma delas é a que se encontra apresentada na Figura 1.

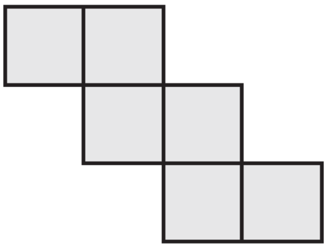


Figura 1

Em um cubo, foram pintados, em três de suas faces, quadrados de cor cinza escura, que ocupam um quarto dessas faces, tendo esses três quadrados um vértice em comum, conforme ilustrado na Figura 2.

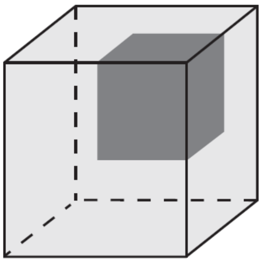
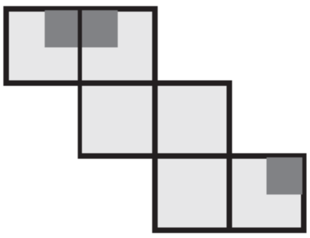


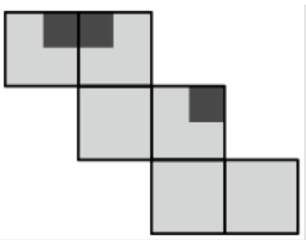
Figura 2

A planificação do cubo da Figura 2, conforme o tipo de planificação apresentada na Figura 1, é

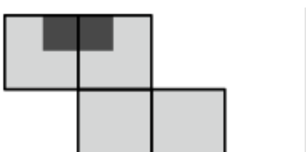
A



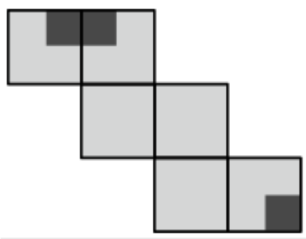
B



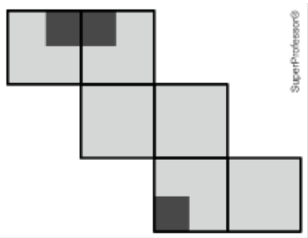
C



D



E



Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa [d], as três faces pintadas precisam ser faces adjacentes, ou seja, faces que realmente se encontram em um único vértice. Os itens [b], [c] e [e] trazem faces corretas, mas posições erradas (faces adjacentes), de modo que os quadrados pintados estão em posições diferentes ou voltados para lados incompatíveis ao montar o cubo e o item [a] está com as faces corretas, porém o canto pintado está na posição incorreta.

SEMANA 5

Competência de área 3 - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.
H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

Objetos do conhecimento

- Grandezas e Medidas
- Conceitos Básicos
- Grandezas Fundamentais e Compostas
- Escalas

- Conceitos Básicos
- Casos Uni, Bi e Tridimensionais

Professor(a), este material é pautado na perspectiva de resolução de problemas, assim ele iniciará com uma questão para estimular a discussão, seguido de um resumo de conceitos e posteriormente com questões ENEM e inéditas com padrão ENEM.

Solicite aos alunos que leiam e resolvam a questão seguinte, se abstenha de dar a resposta certa e convide os alunos a mostrar para turma seu raciocínio.

QUESTÃO 01

(ENEM 2024) Uma tubulação despeja sempre o mesmo volume de água por unidade de tempo em uma caixa-d'água, o que significa dizer que a vazão de água nessa tubulação é constante. Na junção dessa tubulação com a caixa-d'água, está instalada uma membrana de filtragem cujo objetivo é filtrar eventuais impurezas presentes na água, combinado a um bom fluxo de água. O fluxo (ϕ) de água através da superfície da membrana é diretamente proporcional à vazão de água na tubulação, medida em mililitro por segundo, e inversamente proporcional à área da superfície da membrana, medida em centímetro quadrado.

A unidade de medida adequada para descrever o fluxo (ϕ) de água que atravessa a superfície da membrana é

A $\mathrm{mL} \cdot \mathrm{s} \cdot \mathrm{cm}^2$

B $\dfrac{\mathrm{mL}}{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{cm}^2$

C $\dfrac{\mathrm{mL}}{\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}}$

D $\dfrac{\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{mL}}$

E $\dfrac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{mL} \cdot \mathrm{s}}$

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa [b], O problema descreve um fluxo ϕ que é, diretamente proporcional à vazão da tubulação (unidade: mL/s), inversamente proporcional à área da membrana (unidade: cm²). O item [a], o estudante tenta combinar as grandezas multiplicando-as diretamente, sem considerar que a área deve estar no denominador, o item [c] Essa alternativa tem exatamente as mesmas unidades da correta, apenas escritas em ordem diferente é um distrator interessante porque está certo do ponto de vista físico, porém no ENEM a resposta deve corresponder à forma apresentada entre as alternativas, no item [d], O estudante que escolhe essa alternativa, geralmente interpreta a proporcionalidade como diretamente proporcional tanto à área quanto ao tempo e o item [e], costuma atrair quem tenta resolver pela sensação visual da fração, sem estruturar a relação direta/inversa com atenção.

A unidade de medida do fluxo deve ser igual a:

$$[\Phi] = \frac{\mathrm{mL}/\mathrm{s}}{\mathrm{cm}^2} = \frac{\mathrm{mL}}{\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{s}}$$

DE OLHO NO CONCEITO

O problema apresentado requer do estudante, a compreensão do que é grandeza, dependências entre grandezas, comportamento direto ou inverso e de proporcionalidade. Temas que serão abordados a seguir.

Razão

De modo simples, razão é o quociente entre dois números, geralmente entre grandezas.
Vamos considerar a razão entre duas grandezas com valores numéricos a e b, representando por:

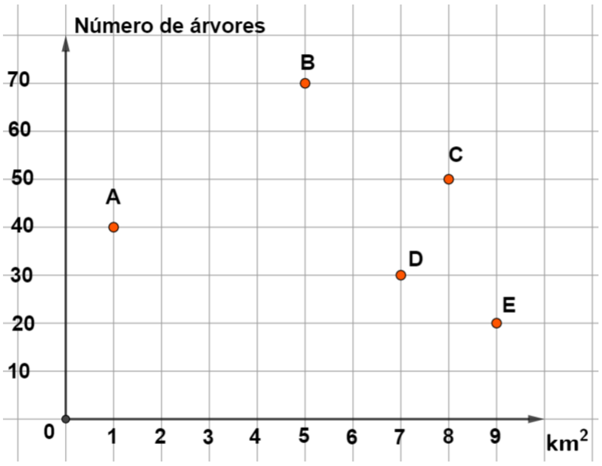
$$\frac{a}{b}\begin{matrix}\to \text{Antecedente} \\ \to \text{Consequente}\end{matrix}\left(\begin{matrix}\text{lê-se a para b ou} \\ \text{a está para b}\end{matrix}\right), \text{com } b \neq 0$$

Exemplos:

a) Em uma sala de aula com 20 alunos, 12 gostam de pizza e 8 gostam de bolo. A razão entre os alunos que gostam de pizza e bolo é

$$\frac{\text{Alunos que gostam de pizza}}{\text{Alunos que gostam de bolo}} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

b) Um grupo de biólogos catalogou a quantidade de árvores em cinco setores A, B, C, D e E por determinada área, em quilômetro quadrado, conforme o gráfico a seguir:



A menor razão entre o número de árvores por quilômetro quadrado é representada pelo setor:

a) A b) B c) C d) D e) E

Podemos calcular cada um, do seguinte modo:

$$A=\frac{40}{1}=40\ ,\ B=\frac{70}{5}=14\ ,\ C=\frac{50}{8}=6{,}25\ ,\ D=\frac{30}{7}\cong 4{,}29\ ,\ E=\frac{20}{9}=2{,}22$$

Proporção

A igualdade entre duas razões é chamada de proporção.

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$, com b e diferentes de zero

(lê-se **a** está para **b**, assim como **c** está para **d**)

K é conhecido como constante de proporcionalidade.

Uma propriedade fundamental da proporção é $a\cdot d=b\cdot c$ (O produto dos meios é igual ao produto dos extremos), ou seja:

Produto dos extremos

Produto dos meios

Propriedades

Considere $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$, com **a, b, c** e **d** não nulos e **k** a constante de proporcionalidade, temos:

a) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{b}=k\Rightarrow a=k\cdot b\\ \frac{c}{d}=k\Rightarrow c=k\cdot d\end{cases}$

b) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

c) $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$

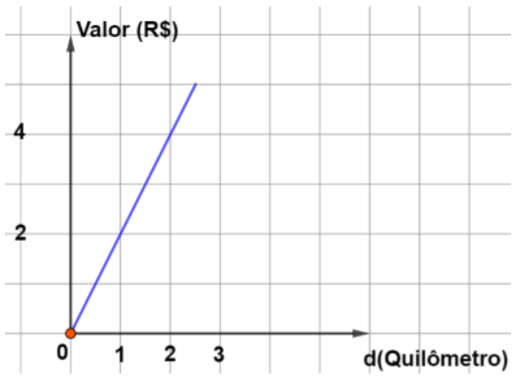
Grandezas diretamente proporcionais

Duas grandezas variáveis são consideradas diretamente proporcionais ou simplesmente proporcionais quando os valores **y** e x obedecem a seguinte condição:

$\frac{y}{x}=k$, pois $y=k\cdot x$, onde **k** é a constante de proporcionalidade (k é um número real positivo).

Podemos representar graficamente $y=k\cdot x$ por uma reta passando pela origem.

Exemplo: O valor **V** cobrado por um motorista particular é diretamente proporcional à distância **d** percorrida (em quilômetro).



Considerando a constante de proporcionalidade de R$ 2,00 por km, temos

$V=2\cdot d$.

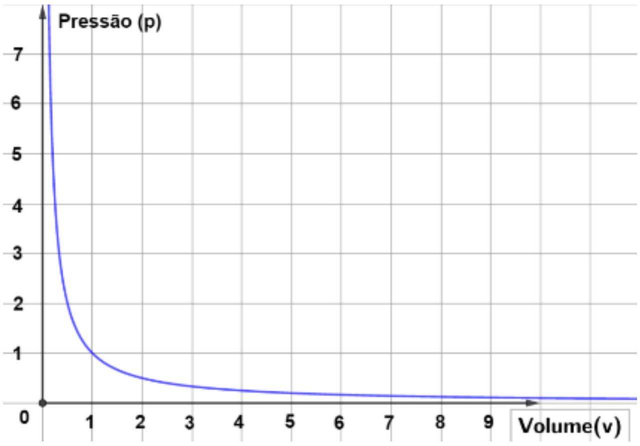
Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas variáveis são consideradas inversamente proporcionais quando os valores **y** e **x** obedecem a seguinte condição:

$x\cdot y=k$, pois $y=k\cdot\frac{1}{x}$, onde **k** é a constante de proporcionalidade.

O gráfico é conhecido como **hipérbole**.

Exemplo: A lei de Boyle-Mariotte diz que um sistema fechado, com temperatura constante, determinada massa de gás ocupa um volume inversamente proporcional a sua pressão, ou seja, $p\cdot v=k$.



Problemas sobre relações entre grandezas

Em algumas situações, as grandezas relacionam-se de modo proporcional, por meio da interpretação de uma situação-problema, obedecendo quando são diretamente ou inversamente proporcionais.

Exemplo 1:

Considere a grandeza A que é diretamente proporcional às grandezas B e C. sendo k a constante de proporcionalidade, a expressão que relaciona A, B e C é:

a) $A = k \cdot B \cdot C$

b) $B = k \cdot A \cdot C$

c) $C = k \cdot B \cdot A$

d) $k = A \cdot B \cdot C$

e) $A = k \cdot B^2 \cdot C$

Exemplo 2:

A grandeza S é diretamente proporcional em relação a T, diretamente proporcional ao quadrado de W e inversamente proporcional ao cubo de H. Qual a expressão relaciona S com W e H, sendo k a constante de proporcionalidade?

Solução: Como k é constante para o problema, temos que

$$T = \frac{k \cdot W^2}{H^3}$$

T é diretamente proporcional ao quadrado de W e inversamente proporcional ao cubo de H.

AGORA TENTE VOCÊ!

QUESTÃO 02

(ENEM 2021) A relação de Newton-Laplace estabelece que o módulo volumétrico de um fluido é diretamente proporcional ao quadrado da velocidade do som (em metro por segundo) no fluido e à sua densidade (em quilograma por metro cúbico), com uma constante de proporcionalidade adimensional.

Nessa relação, a unidade de medida adequada para o módulo volumétrico é

A $kg \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}$.

B $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$.

C $kg \cdot m^{-5} \cdot s^{2}$.

D $kg^{-1} \cdot m^{1} \cdot s^{2}$.

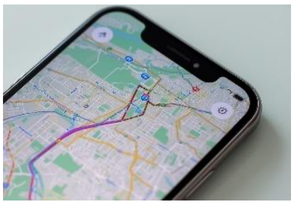
E $kg^{-1} \cdot m^{5} \cdot s^{-2}$.

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa [b], na relação $MV = \frac{m^2}{s^2}\frac{kg}{m^3} = kg\ m^{-1}\ s^2$, o item [a], essa alternativa combina as unidades corretas, mas com expoentes trocados, o que tende a surgir quando o estudante tenta multiplicar e dividir rapidamente sem atentar para regra de potência, no item [c], aqui o aluno pode ter se equivocado na potência e calculado ($\frac{m^2}{m^3} = m^5$). No item [d], esse distrator inverte os sinais dos expoentes de todas as grandezas. Geralmente atrai, quando o aluno tenta fazer uma análise dimensional invertida, como se o módulo volumétrico fosse uma grandeza "recíproca" e no item [e], É um equívoco típico quando o aluno tenta manipular mentalmente expoentes sem organizar as grandezas no formato de fração.

DE OLHO NO CONCEITO

Escala é a razão que indica a relação entre uma medida representada em um desenho, mapa ou maquete e a medida real correspondente. As duas escalas cartográficas mais importantes: Escala **numérica** e Escala **gráfica**.



Escala numérica

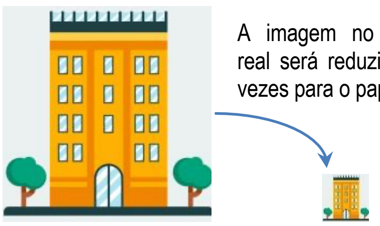
Expressa a redução das dimensões de um objeto no tamanho real em relação ao que está no papel. A escala numérica pode ser calculada pela razão entre as dimensões do objeto no papel com as dimensões do tamanho da realidade.

$$E = \frac{\text{Objeto no papel}}{\text{Objeto tamanho real}}$$

Exemplos

a) Uma escala 1: 10 000, significa que as dimensões do objeto no tamanho real foram reduzidas 10 000 vezes para o papel ou mapa. Claro que podemos interpretar de outra maneira, ou seja, um objeto no papel será ampliado 10 000 vezes, do papel ou mapa para a realidade.

b) Uma pessoa desenhou um prédio de 80 m de altura em uma folha de papel, utilizando a escala 1: 2 000. Qual a altura do prédio no papel, em centímetro?



A escala é 1: 2 000 e 80 m corresponde a 8 000 cm, temos que:

$$E = \frac{\text{Objeto no papel}}{\text{Objeto tamanho real}} \rightarrow \frac{1}{2000} = \frac{x}{8000\text{ cm}} \rightarrow x = 4\text{ cm}$$

c) A distância entre as duas cidades é de 24 km e no mapa, corresponde a 8 cm. Qual a escala numérica adotada no mapa?

Para a comparação proporcional, devemos trabalhar na mesma unidade de comprimento.

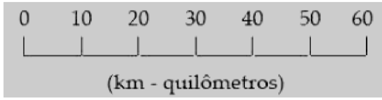
$$E = \frac{\text{Objeto no papel}}{\text{Objeto tamanho real}} \rightarrow E = \frac{8\text{ cm}}{24\text{ km}} = \frac{8\text{ cm}}{2400000\text{ cm}} = \frac{1}{300000}$$

Este resultado representa a escala 1: 300 000

Escala Gráfica

Escala gráfica é uma representação visual da escala de um desenho, mapa ou planta, geralmente feita com uma linha ou barra dividida em segmentos proporcionais à medida real.

Na escala a seguir, os espaços entre duas marcações consecutivas correspondem a 10 km.

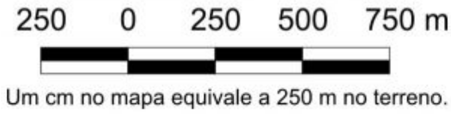


Na prática, a leitura da escala significa que: cada 1 cm no mapa corresponde a 10 km no tamanho real.

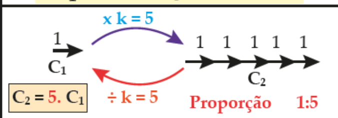
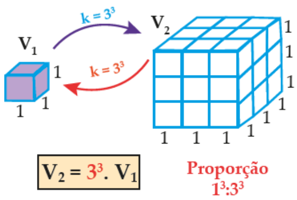
As diferenças entre escalas **numérica** e **gráfica** são: **Uma escala numérica 1: 4 000** significa que uma imagem (distâncias, cidades, países etc.) de 1 cm no mapa corresponde 4 000 cm na realidade ou a imagem no tamanho real foi reduzida 4 000 vezes para encaixar no mapa (trabalhando em mesma unidade).

A escala gráfica representa de **forma visual**, normalmente por uma linha ou barra dividida em segmentos iguais, que relaciona diretamente a medida do mapa com a realidade.

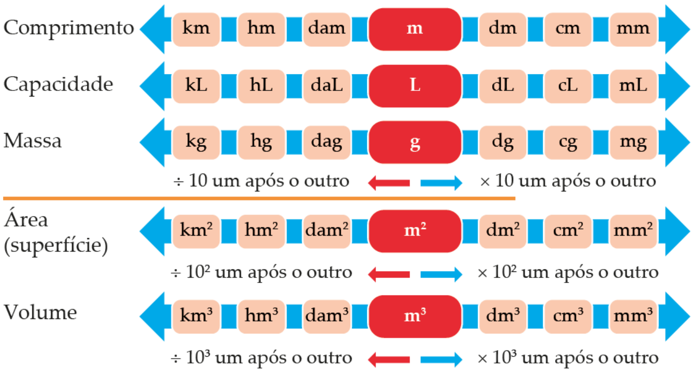
Exemplo de escala gráfica



Observação importante do uso da escala em situações com áreas / superfícies e espaços/ volumes.

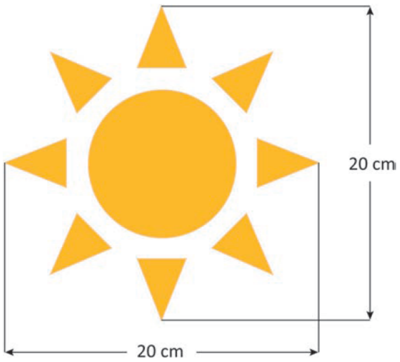
Classificação	Representação Gráfica	Constante K
Comprimento (linear) ($\mathbb{R}$)	 x k = 5; ÷ k = 5; C_1; C_2; $C_2 = 5.\ C_1$; Proporção 1:5	1 : k
Superfície (área) ($\mathbb{R}^2$)	x k = 3^2; ÷ k = 3^2; A_1; A_2; $A_2 = 3^2.\ A_1$; Proporção 1^2:3^2; **Obs.:** A escala linear é 1:3, porém como são duas dimensões, a constante K é elevado ao quadrado: K^2.	1 : k^2
Volume ($\mathbb{R}^3$)	 k = 3^3; k = 3^3; V_1; V_2; $V_2 = 3^3.\ V_1$; Proporção 1^3:3^3	1 : k^3

Convertendo unidades de medida



Exemplos:

a) Um artista, que costuma fazer desenhos com areia na praia, pediu a um banhista que fizesse um pequeno desenho, que serviria de esboço para uma grande obra de arte a ser feita na areia. Esse desenho está representado na figura.



Após a conclusão, a obra de arte obtida manteve as proporções do desenho feito pelo banhista, sendo que as medidas indicadas na figura foram ampliadas para 30 m.

Em qual escala esse desenho representa a obra de arte?

a) 1 : 1,5.
b) 1 : 2,25.
c) 1 : 10.
d) 1 : 100.
e) 1 : 150.

Solução
Tamanho do desenho: 20 cm
Figura ampliada: 30 m = 3000 cm

$$E = \frac{\text{desenho}}{\text{figura ampliada}} \rightarrow E = \frac{20\text{ cm}}{3000\text{ cm}} = \frac{1}{150}$$

Assim, a escala é 1:150

b) Uma região possui 1 km² e essa área deve ser representada em uma folha de papel, em centímetro quadrado, considerando a escala do mapa 1:10 000.

Qual a área dessa região no papel, considerando a escala?

a) 1 b) 10 c) 100 d) 120 e) 150

Solução

$$E = \frac{\text{desenho}}{\text{figura ampliada}} \rightarrow (E)^2 = \left(\frac{\text{área no desenho}}{\text{área em tamanho real}}\right)^2$$

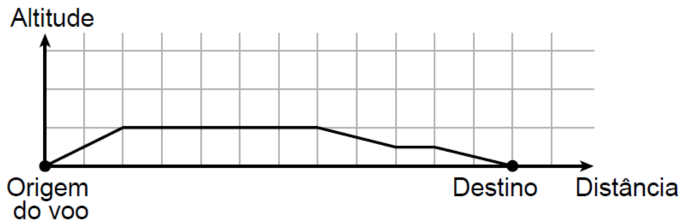
$$\left(\frac{1}{10000}\right)^2 = \frac{A_{menor}}{1\text{ km}^2} \rightarrow \left(\frac{1}{10^4}\right)^2 = \frac{A_{menor}}{10^{10}\text{ cm}^2}$$

$$\frac{1}{10^8} = \frac{A_{menor}}{10^{10}\text{ cm}^2} \rightarrow A_{menor} = \frac{10^{10}\text{ cm}^2}{10^8}$$

$$\therefore A_{menor} = 100\text{ cm}^2$$

QUESTÃO 03

(ENEM 2023) Um controlador de voo dispõe de um instrumento que descreve a altitude de uma aeronave em voo, em função da distância em solo. Essa distância em solo é a medida na horizontal entre o ponto de origem do voo até o ponto que representa a projeção ortogonal da posição da aeronave, em voo, no solo. Essas duas grandezas são dadas numa mesma unidade de medida. A tela do instrumento representa proporcionalmente as dimensões reais das distâncias associadas ao voo. A figura apresenta a tela do instrumento depois de concluída a viagem de um avião, sendo a medida de cada quadradinho da malha igual a 1 cm.



Essa tela apresenta os dados de altitude alcançada foi de 5 km.

A escala em que essa tela representa as medidas é

A 1 : 5.
B 1 : 11.
C 1 : 55.
D 1 : 5.000.
E 1 : 500.000.

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa D,

A altitude máxima do avião ocupa 1 quadradinho vertical, que mede 1 cm, o enunciado informa que a altitude real máxima foi de 5 km, o que corresponde a 5 000 m, ou seja: 5 000 m = 500 000 cm. O item [a], os alunos podem confundir metros com quilômetros ou ignorar conversão para centímetros, assumindo que 5 km equivalem a 5 m ou 5 cm no real, no item [b] podemos pressupor que os alunos contaram os quadradinhos equivocadamente ou tentaram relacionar a distância horizontal com a altitude sem conversão. O item [c], erro típico do aluno que tenta fazer regra de três usando “5 km = 500 cm” ou outra conversão incorreta e o item [e], o aluno até faz a conversão correta, mas não simplifica a escala, deixando o valor em centímetros reais

QUESTÃO 04

(ENEM 2024) O arquiteto Renzo Piano exibiu a maquete da nova sede do Museu Whitney de Arte Americana, um prédio assimétrico que tem um vão aberto para a galeria principal, cuja medida da área é 1.672 m^2.
Considere que a escala da maquete exibida é 1 : 200.

Época, n. 682, jun. 2011 (adaptado).

A medida da área do vão aberto nesta maquete, em centímetro quadrado,

A 4,18.
B 8,36.
C 41,80.
D 83,60.
E 418,00.

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa E

A maquete está na escala 1 : 200, ou seja, cada medida linear na maquete é 200 vezes menor que a real, dessa forma $área\ da\ maquete = \frac{1672\ m^2}{200^2} = \frac{16720000\ cm^2}{40000} = 418\ cm^2$, os itens [a] e [c] podemos pressupor que o aluno se equivocou na quantidade de zeros na transformação das unidades ($m^2\ para\ cm^2$), o item [b] o aluno equivocadamente aplica a relação $Escala = \frac{Desenho}{Real} \rightarrow \frac{1}{200} = \frac{x}{1672} \rightarrow x = 8{,}36$ e o item [d] o estudante pode ter se confundido de forma semelhante ao item [b] e mais a posição da vírgula.

QUESTÃO 05

O Teatro da Paz, localizado em Belém, na praça da República, é uma das mais belas expressões da arquitetura neoclássica brasileira, construído no período áureo da borracha.

Um grupo de estudantes de uma escola do Pará analisou a planta da plateia do teatro, que foi desenhada com escala 1:500, ou seja, 1 cm no desenho representa 5 metros na realidade. Na planta, a distância entre o palco e o centro da última fileira de cadeiras mede 6,5 cm.

Com base nessa escala, qual é a distância real aproximada entre esses dois pontos?

A 15,5 m
B 25 m
C 30 m
D 32,5 m
E 40 m

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa D

Como a escala é 1:500, isso significa que 1 cm no desenho representa 5 m na realidade, com isso, $6{,}5\ cm \times 5\ m / cm = 32{,}5\ m$. No item [a], indica que o estudante dividiu o valor por 2, mostrando confusão entre redução e ampliação da escala, o item [b] sugere erro por aproximação incorreta, possivelmente usando 5 cm × 5 m ao arredondar a medida, no item [c], Mostra que o aluno fez um cálculo aproximado ou arredondou o resultado correto sem aplicar a conversão exata e no item [e], Revela confusão no sentido da proporção, talvez interpretando que 1 cm representa 10 m, o que indica dificuldade em compreender o conceito de escala numérica.

QUESTÃO 06

Atualmente várias pessoas têm preferências por presentes criativos e principalmente personalizados. O mercado acompanhando a procura dos clientes possibilita, por exemplo, a possibilidade de personalizar copos e garrafas térmicas com nomes e imagens ou até mesmo produzir bonecos funko de uma pessoa.

Ocivaldo recebeu de sua esposa, como presente de casamento, um boneco com suas características obedecendo uma escala 1:11.

Qual a altura de Ocivaldo?

A 1,10 m
B 1,27 m
C 1,53 m
D 1,70 m
E 1,87 m

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa E

a) **Incorreta** (1,10 m): Este valor corresponde ao cálculo usando o boneco padrão de 10 cm de mercado. É um distrator comum para quem usa a altura padrão de mercado em vez de uma altura implícita do boneco para a questão.
b) **Incorreta** (1,27 m): Um valor intermediário, provavelmente resultado de um cálculo incorreto de escala ou conversão.
c) **Incorreta** (1,53 m): Outro valor intermediário, possivelmente erro de cálculo na conversão ou na escala.
d) **Incorreta** (1,70 m) - GABARITO: A resposta esperada, que implica um boneco de aproximadamente 15,45 cm de altura.
e) **Correta** (1,87 m): Este valor pode ser resultado de um erro onde o aluno multiplica a altura de 1,70 m pelo fator de escala novamente, ou assume que a altura do boneco é 17 cm, gerando

-

QUESTÃO 07

(ENEM 2020) A caixa-d'água de um edifício terá a forma de um paralelepípedo retângulo reto com volume igual a 28080 litros. Em uma maquete que representa o edifício, a caixa-d'água tem dimensões $2\text{ cm} \times 3{,}51\text{ cm} \times 4\text{ cm}.$

Dado: $1\text{ dm}^3 = 1\text{ L}.$

A escala usada pelo arquiteto foi

A $1:10$

B $1:100$

C $1:1000$

D $1:10000$

E $1:100000$

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa B

Sendo $28080\text{ dm}^3 = 28080000\text{ cm}^3$ e $2 \cdot 3{,}51 \cdot 4 = 28{,}08\text{ cm}^3$ o volume da maquete, temos

$$E^3 = \frac{28{,}08}{28080000} \Leftrightarrow E = \sqrt[3]{\frac{1}{1000000}}$$
$$\Leftrightarrow E = 1:100.$$

QUESTÃO 08

(ENEM 2025) Na cantina de uma escola, há cinco alimentos vendidos em pacotes com diferentes quantidades de porções. As informações nutricionais contidas nos rótulos desses produtos estão indicadas nas imagens.

Batata chips
Pacote com 3 porções de 50 g
170 mg de sódio por porção

Palitos salgados
Pacote com 4 porções de 20 g
501 mg de sódio por porção

Biscoito multigrãos
Pacote com 8 porções de 25 g
264 mg de sódio por porção

Biscoito de polvilho
Pacote com 6 porções de 15 g
175 mg de sódio por porção

Biscoito de água e sal
Pacote com 5 porções de 40 g
166 mg de sódio por porção

Uma estudante opta sempre pelo alimento com a menor quantidade total de sódio por pacote.

Qual desses produtos deve ser o escolhido pela estudante?

A Batata chips.
B Palitos salgados.
C Biscoito multigrãos.
D Biscoito de polvilho.
E Biscoito de água e sal.

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa A

Quantidade de sódio em cada pacote:

Batata chips: $3\ porções \cdot 170\ mg/porção = 510\ mg$
Palitos salgados: $4\ porções \cdot 501\ mg/porção = 2004\ mg$
Biscoito multigrãos: $8\ porções \cdot 264\ mg/porção = 2112\ mg$
Biscoito de polvilho: $6\ porções \cdot 175\ mg/porção = 1050\ mg$
Biscoito de água a sal: $5\ porções \cdot 166\ mg/porção = 830\ mg$

Portanto, a estudante deve escolher a batata chips.

QUESTÃO 09

(ENEM 2025) Uma pessoa pretende instalar um kit de gás natural veicular (GNV) em seu carro. Na loja que escolheu para realizar a compra e instalação desse kit, havia cinco modelos de cilindro para armazenamento do gás, cujas capacidades, em metro cúbico, eram, respectivamente: 10, 14, 17, 21 e 25. O preço do cilindro é proporcional à sua capacidade. Esse carro rodará 30 km diariamente, 7 dias por semana, e o consumo do GNV é de 1 m^3 a cada 13 km rodados. A pessoa escolherá o modelo de cilindro de menor preço e que garanta apenas um abastecimento semanal.

Nessas condições, qual será a capacidade, em metro cúbico, do cilindro escolhido por essa pessoa?

A 10
B 14
C 17
D 21
E 25

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa C

Volume necessário de GNV para rodar 1 semana:

$$V = 30\ \frac{km}{dia} \cdot 7\ dias \cdot \frac{1}{13}\ \frac{m^3}{km} \cong 16{,}15\ m^3$$

Portanto, a pessoa deve escolher o cilindro de 17 m^3.

QUESTÃO 10

(ENEM 2025) Em um laboratório, um recipiente contém 10 litros de uma solução composta apenas pelas substâncias S1 e S2. Dessa solução, 99,95% é de S1. Uma quantidade de S1 será retirada dessa solução, mantendo a quantidade inicial de S2, de modo que 99,90% da nova solução seja de S1.

Qual é a quantidade de S1, em litro, que será retirada?

A 0,0050
B 0,0100
C 0,5000
D 4,9775
E 5,0000

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa E

Quantidade inicial de S_1:

$$\frac{99{,}95}{100} \cdot 10\ L = 9{,}995\ L$$

Retirando x litros de S_1, devemos ter:

$$9{,}995 - x = \frac{99{,}90}{100} \cdot (10 - x)\ 9{,}995 - x = 9{,}990 - 0{,}999x\ 0{,}001x = 0{,}005\ \therefore x = 5\ L$$

SEMANA 6

Competência de área 4 - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.
H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

Objetos do conhecimento

- Relações entre Grandezas
- Regra de Três
- Simples
- Composta
- Divisão proporcional

Professor(a), este material é pautado na perspectiva de resolução de problemas, assim ele iniciará com uma questão para estimular a discussão, seguido de um resumo de conceitos e posteriormente com questões ENEM e inéditas com padrão ENEM.

Solicite aos alunos que leiam e resolvam a questão seguinte, se abstenha de dar a resposta certa e convide os alunos a mostrar para turma seu raciocínio.

QUESTÃO 01

Uma gráfica imprime panfletos para eventos culturais. Em uma semana, 4 máquinas, trabalhando no mesmo ritmo, imprimem 12 000 panfletos em 5 dias.

Mantidas, as mesmas condições de trabalho, quantos panfletos serão impressos em 5 dias por 6 máquinas?

A 6 000
B 8 000
C 18 000
D 24 000
E 30 000

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa C

A produção é diretamente proporcional ao número de máquinas.

4 ——— 12000
6 ——— x

$4x = 6 \cdot 12000$

$\therefore x = 18000$

Na alternativa incorreta [b] o erro foi aplicar proporcionalidade inversa, na [a] o aluno calculou o proporcional para 2 máquinas e não completou a questão. Na alternativa incorreta [d] o aluno provavelmente dobrou o valor. Na alternativa errada [e] o aluno fez o cálculo, de forma equivocada, adicionando mais 6 máquinas ao valor anterior.

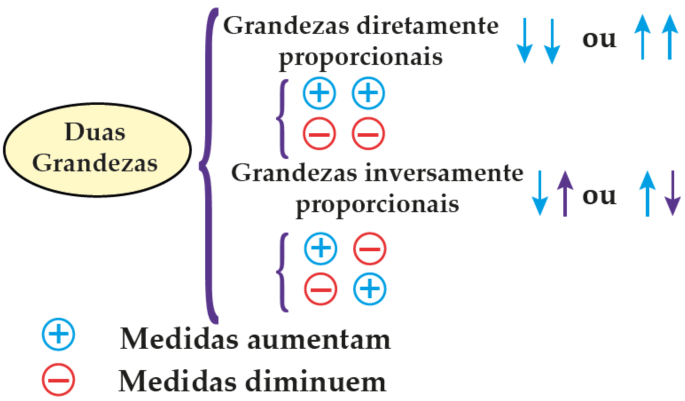
DE OLHO NO CONCEITO

A regra de três é um método matemático utilizado para resolver problemas de proporcionalidade entre grandezas. Surgiu na Antiguidade, sendo aplicada por diversas civilizações em atividades como comércio, construções e organização social. Ao longo do tempo, foi aperfeiçoada e ganhou destaque na Idade Média, tornando-se essencial para cálculos do cotidiano.

Seu princípio fundamental é simples: conhecendo três valores relacionados, é possível determinar um quarto valor desconhecido, desde que exista uma relação proporcional entre eles.

Observação: Iremos apresentar **um dos VÁRIOS MODOS** de resolver um problema de **REGRA DE TRÊS**. Desenvolva em sala outras perspectivas que fortaleçam a compreensão proporcional do estudante sobre o tema.

Vamos denotar as variações de duas das grandezas quando comparadas.



Regra de três simples

Quando trabalhamos com duas grandezas envolvidas (diretamente ou inversamente proporcionais), temos a regra de três simples.

Regra de três simples direta

Quando as grandezas são diretamente proporcionais, dizemos que a regra de três é direta, ou seja, as grandezas variam no mesmo sentido, quando uma aumenta, a outra também aumenta e vice-versa.

Exemplo:

Uma empresa utiliza 12 peças de plástico para produzir 4 ventiladores de uso doméstico. O número de peças de plástico, mantida a proporção, do mesmo tipo da primeira situação, necessário para produzir 20 ventiladores será

a) 20
b) 30
c) 40
d) 50

e) 60

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa E

As grandezas são diretamente proporcionais, aumentando o número de ventiladores, também aumenta o número de peças de plástico:

Peças	nº de ventiladores
12	4
x	20

$$\frac{12}{x} = \frac{4}{20} \to 4x = 12 \cdot 20$$

$$\therefore\ x = 60$$

Regra de três simples inversa

Quando as grandezas são inversamente proporcionais, dizemos que a regra de três é inversa, ou seja, as grandezas variam em sentidos opostos, quando uma aumenta, a outra diminui na mesma proporção e vice-versa.

Exemplo:

Uma empresa de costura com 6 costureiras consegue terminar uma demanda de serviço em 24 dias.

Para o mesmo serviço com 8 costureiras, que trabalham nas mesmas condições das anteriores, quantos dias serão necessários para terminá-lo?

a) 12
b) 16
c) 18
d) 20
e) 22

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa C

As grandezas são inversamente proporcionais, aumentando o número de costureiras, diminuindo o número de dias na mesma proporção.

nº de costureiras	nº de dias
6	24
8	x

Neste caso, iremos inverter a razão 6/8, resultando em 8/6. Assim,

$$\frac{8}{6} = \frac{24}{x} \to 8x = 6 \cdot 24$$

$$\therefore\ x = 18$$

Regra de três composta

A regra de três composta segue o mesmo raciocínio da simples, só que são associadas mais de duas grandezas e todas devem ser comparadas individualmente com aquela que possui a medida desconhecida.

Exemplo 1:

Em uma agência bancária, dois caixas atendem em média seis clientes em 10 minutos. Considere que, nesta agência, todos os caixas trabalham com a mesma eficiência e que a média citada sempre é mantida.

Assim, o tempo médio, em minuto, necessário para que cinco caixas atendam 45 clientes é de

a) 45
b) 30
c) 20
d) 15
e) 10

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa B

*A grandeza que possui a incógnita **x** é a grandeza "tempo em minutos". Quanto mais caixas para atendimento, menos minutos serão necessários (inversamente proporcionais). Quanto "mais minutos" para atendimento, mais clientes serão atendidos (diretamente proporcionais).*

nº de caixas	nº de clientes	tempo
2	6	10 min (fixo)
5	45	x

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{6}{45} = \frac{10}{x} \to 5 \cdot 6 \cdot x = 2 \cdot 45 \cdot 10$$

$$\therefore\ x = 30$$

Divisão em partes diretamente proporcionais

Considere um número V que será dividido em partes diretamente proporcionais aos valores a, b e c. Significa que V será dividido na proporção a: b: c.

Vamos considerar o valor V igual à soma de três parcelas x, y e z (que são as respostas): x + y + z = V. A constante de proporcionalidade será representada por k.

$$\text{Valor V} \to \begin{cases} x = ka \\ y = kb \\ z = kc \end{cases} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{Valor V}}{a+b+c} = k$$

Exemplo 1:

Uma pessoa pretende dividir R$6.000,00 de lucro com três funcionários de uma empresa, de modo proporcional ao número de anos de serviços prestados a ela. Os funcionários Adriano, Bianca e Célia receberam essa bonificação, considerando que já trabalham há 2, 4 e 6 anos.

Os valores, em real, que Adriano, Bianca e Célia, devem receber, respectivamente são

a) 1 500, 2 000 e 2 500
b) 1 000, 2 000 e 3 000
c) 2 000, 3 000 e 1 000
d) 3 000, 2 000 e 1 000
e) 2 500, 2 000 e 1 500

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa B

Sejam A, B e C os valores que Adriano, Bianca e Célia receberão proporcionais aos anos 2, 4, e 6, respectivamente, temos:

$$\text{Valor R\$ 6 000,00} \rightarrow \begin{cases} A = 2k \\ B = 4k \\ C = 6k \end{cases}, \text{ sendo } A + B + C = 6000$$

$$2k + 4k + 6k = 6000 \Rightarrow k = 500 \therefore \begin{cases} A = 2k = 2 \cdot 500 = 1000 \\ B = 4k = 4 \cdot 500 = 2000 \\ C = 6k = 6 \cdot 500 = 3000 \end{cases}$$

Divisão em partes inversamente proporcionais

Considere um número V que será dividido em partes **inversamente proporcionais** aos valores a, b e c. Significa que V será dividido na proporção de $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$

Vamos considerar o valor V igual à soma de três parcelas x, y e z (que são as respostas): $x + y + z = V$. A constante de proporcionalidade será representada por k.

$$\text{Valor V} \rightarrow \begin{cases} x = k\frac{1}{a} \\ y = k\frac{1}{b} \\ z = k\frac{1}{b} \end{cases} \text{ ou } \frac{\text{Valor V}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = k$$

Exemplo2:

O lucro de R$6 200,00 de um restaurante será dividido entre três funcionárias, de modo inversamente proporcional ao número de faltas durante o mês. Sabe-se que Ângela, Bruna e Carla faltaram 2, 3 e 5 vezes, respectivamente. O valor, em real, que Bruna irá receber é:

a) 1000 b) 1200 c) 2000 d) 3000 e) 3200

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa C

Sejam A, B e C os valores que Ângela, Bruna e Carla receberão de modo inversamente proporcionais às faltas 2,3 e 5, respectivamente, temos:

$$\text{Valor R\$ 6 200,00} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{k}{2} \\ B = \frac{k}{3} \\ C = \frac{k}{5} \end{cases}, \text{ sendo } A + B + C = 6200$$

$$\frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{5} = 6200 \Rightarrow \frac{31 \cdot k}{30} = 6200 \Rightarrow k = 6000 \therefore \begin{cases} A = 3000 \\ B = 2000 \\ C = 1200 \end{cases}$$

Divisão em partes diretamente e inversamente proporcionais

Exemplo 3:

Uma gratificação de R$380,00 será dividida para duas pessoas de uma empresa, de modo que as partes sejam diretamente proporcionais ao número de anos de trabalho prestados na mesma e inversamente proporcionais às quantidades de faltas durante o período. Sabe-se que Denis e Talita estão há 2 e 3 anos na empresa e faltaram 5 e 2 vezes, respectivamente. Os valores, em reais, destinados para Denis e Talita, respectivamente são:

a) 80 e 300
b) 300 e 80
c) 120 e 260
d) 260 e 120
e) 200 e 180

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa A

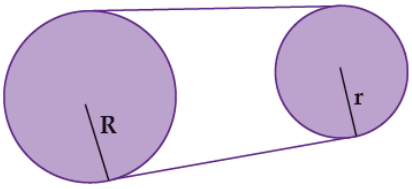
Sejam D e T os valores que Denis e Talita receberão, de modo diretamente proporcionais a 2 e 3 e inversamente a 5 e 2, respectivamente.

$$\text{Valor R\$ 380,00} \rightarrow \begin{cases} D = \frac{2K}{5} \\ T = \frac{3k}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{2k}{5} + \frac{3k}{2} = 380 \Rightarrow k = 200$$

Resposta

$$D = \frac{2K}{5} = \frac{2 \times 200}{5} = 80 \text{ , } T = \frac{3k}{2} = \frac{3 \times 200}{2} = 300$$

Proporcionalidade com circunferências



A relação entre o número de voltas entre as circunferências possui comportamento inversamente proporcional. Quanto maior a circunferência, menor o número de voltas. Se as circunferências são do mesmo tamanho, o número de voltas de cada uma é igual.

$$\frac{C_{maior}}{C_{menor}} = \frac{2\pi R}{2\pi r} = \frac{R}{r} \begin{array}{l} \rightarrow \text{Número de voltas da menor circunferência} \\ \text{Número de voltas da maior circunferência} \end{array}$$

QUESTÃO 02

Uma equipe de limpeza realiza a higienização de um ginásio em 12 horas, utilizando 8 funcionários, todos com o mesmo rendimento.

Se o número de funcionários for aumentado para 12, o tempo necessário para realizar o mesmo serviço será, aproximadamente,

A 6 h
B 8 h
C 9 h
D 10 h
E 12 h

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa B

Funcionários e tempo são inversamente proporcionais.

$$x = \frac{12 \cdot 8}{12} = 8$$

O aluno que optou pela incorreta [a] de maneira equivocada reduziu o tempo pela metade, pois o aumento foi da metade do número de funcionários. Nas alternativas incorretas [c] e [d] o aluno possivelmente errou alguma simplificação na resolução.

$$x = \frac{12 \cdot 12}{8} = \frac{12 \cdot 12}{4+4} = \frac{12}{4} \cdot \frac{12}{4} = 3 \cdot 3 = 9$$

Na alternativa incorreta [e] o aluno ignora a alteração no número de funcionários por não compreender que são inversamente proporcionais.

QUESTÃO 03

Uma fábrica produz 600 peças em 5 dias, utilizando 10 operários, todos com o mesmo rendimento.

Quantas peças serão produzidas em 8 dias, com 15 operários, mantendo-se, o mesmo ritmo de trabalho?

A 900
B 960
C 1 260
D 1440
E 1 860

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa D

A produção é diretamente proporcional ao número de operários e ao tempo.

Peças	**Dias**	**Operários**
600	5	10
x	8	15

$$\frac{600}{x} = \frac{5}{8} \cdot \frac{10}{15} \rightarrow x = \frac{600 \cdot 8 \cdot 15}{5 \cdot 10} = 1440$$

Nas incorretas [a] e [b] os alunos por equívoco usaram somente uma grandeza.

$$x = \frac{600 \cdot 8}{5} = 960 \quad \text{ou} \quad x = \frac{600 \cdot 15}{10} = 900$$

Na alternativa incorreta [c] o aluno calculou o acréscimo separadamente, usando uma grandeza de cada vez, e adicionou os acréscimos ao valor original 600+300+360=1260. Na incorreta [e] o aluno fez o cálculo separado e somou os resultados 900+960=1860.

QUESTÃO 04

Para pavimentar uma estrada, 6 máquinas levam 10 dias, trabalhando 8 horas por dia.

Se forem utilizadas 8 máquinas, trabalhando 6 horas por dia, em quantos dias o serviço será concluído?

A 6
B 8
C 10
D 13
E 18

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa C

Máquinas → proporcional inversa

Horas/dia → proporcional inversa

Dias → variável

$$\frac{10}{x} = \frac{6}{8} \cdot \frac{8}{6} \quad \rightarrow \quad x = \frac{10 \cdot 8 \cdot 6}{6 \cdot 8} = 10$$

Nas alternativas erradas [b] e [d] o aluno equivocadamente considerou apenas uma grandeza aplicando regra de 3 simples. Nas alternativas incorretas [a] e [e] o considerou uma variação direta e uma inversa.

QUESTÃO 05

Um engenheiro civil organizou duas equipes de pedreiros, I e II, para a construção de um muro bastante extenso. Todos os pedreiros, de ambas as equipes, apresentam o mesmo rendimento por hora trabalhada frente à construção planejada. A equipe I era composta por 3 pedreiros, que construíram 36 metros quadrados de muro, em 2 dias, trabalhando 6 horas por dia. A equipe II era composta por 5 pedreiros, que trabalharam 8 horas diárias, durante 6 dias.

Quantos metros quadrados a equipe II construiu a mais do que a equipe I?

A 144
B 180
C 204
D 240
E 276

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa C

Por regra de três composta, obtemos a quantidade de metros quadrados construída pela equipe II.

pedreiros	m^2	dias	horas / dia
↓ 3	↓ 36	↓ 2	↓ 6
5	x	6	8

$$\frac{36}{x} = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{8}$$
$$x = 240\ m^2$$

Portanto, o número de metros quadrados que a equipe II construiu a mais do que a equipe I foi de 240 – 36 = 204.

QUESTÃO 06

Uma escola recebeu R$12.000,00 para investir em três projetos pedagógicos A, B e C. Esse valor será dividido diretamente proporcional ao número de estudantes participantes de cada projeto.

O projeto A possui 20 estudantes, o B possui 30 e o C possui 50. O valor destinado ao projeto B será

A R$ 2.400,00
B R$ 3.000,00
C R$ 3 600,00
D R$ 4 000,00
E R$ 6 000,00

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa C

A soma das partes é:
20 + 30 + 50 = 100

Cada parte vale:

$$x = \frac{12000}{100} = 120$$

Projeto B:

30 x 120 = 3,600

O aluno que optou pela alternativa errada:

A: confundiu com o projeto A
B: faz a divisão em partes iguais, mas por falta de atenção na leitura dividiu por 4 projetos.
D: faz a divisão em partes iguais.

E: confundiu com o projeto C.

QUESTÃO 07

(ENEM 2019) Para contratar três máquinas que farão o reparo de vias rurais de um município, a prefeitura elaborou um edital que, entre outras cláusulas, previa:

- Cada empresa interessada só pode cadastrar uma única máquina para concorrer ao edital;
- O total de recursos destinados para contratar o conjunto das três máquinas é de R$ 31.000,00;
- O valor a ser pago a cada empresa será inversamente proporcional à idade de uso da máquina cadastrada pela empresa para o presente edital.

As três empresas vencedoras do edital cadastraram máquinas com 2, 3 e 5 anos de idade de uso.

Quanto receberá a empresa que cadastrou a máquina com maior idade de uso?

A R$ 3.100,00
B R$ 6 000,00
C R$ 6.200,00
D R$ 15.000,00
E R$ 15.500,00

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa B

Sejam x, y e $z,$ respectivamente, os valores recebidos pelos contratos das máquinas com $2, 3$ e 5 anos de idade de uso. Logo, temos

$$2x = 3y = 5z = k,$$

com k sendo a constante de proporcionalidade.

Em consequência, vem

$$x + y + z = 31000 \Leftrightarrow \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{5} = 31000$$
$$\Leftrightarrow k = 30000.$$

A resposta é $z = \frac{30000}{5} = \text{R\$ } 6.000{,}00.$

QUESTÃO 08

(ENEM) Para se construir um contrapiso é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 m³ de concreto.

Qual é o volume de cimento, em m³, na carga de concreto trazido pela betoneira?

A 1,75
B 2,00
C 2,33
D 4,00
E 8,00

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa B

O Volume de 14 m^3 será dividido em partes proporcionais:

1 parte de cimento
4 partes de areia
2 partes de brita

Totalizando 7 partes.

Considere C, A e B, os volumes proporcionais de cimento, areia e brita, respectivamente, de modo

$$k = \frac{C + A + B}{1 + 4 + 2} = \frac{14\ m^3}{7} = 2\ m^3$$

Assim, o volume que compete ao Cimento é C = 2k, ou seja,

$$C = 2 \cdot k = 2 \cdot 1 = 2\ m^3$$

QUESTÃO 09

Uma verba de R$11 000,00 será distribuída entre três equipes inversamente proporcional ao tempo gasto por cada uma para concluir uma tarefa.

As equipes X, Y e Z levaram, respectivamente, 3, 6 e 9 horas para concluir a tarefa.

O valor recebido pela equipe X será

A R$ 1.830,00
B R$ 2 000,00
C R$ 3.000,00
D R$ 3.660,00
E R$ 6 000,00

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa E

Como a divisão é inversa, utilizam-se os inversos dos tempos:
1/3, 1/6, 1/9

MMC = 18:

igualando os denominadores nos leva a adição:

$$\frac{6}{18}+\frac{3}{18}+\frac{2}{18}=\frac{11}{18}$$

Dividindo o valor 11000 pelo resultado da soma e multiplicando pelo valor da equipe x

$$\frac{11000}{\frac{11}{18}}\cdot\frac{1}{3}=11000\cdot\frac{18}{11}\cdot\frac{1}{3}=6000$$

Os alunos que optaram:
A: se equivocou e fez em partes diretamente proporcionais.
D: errou, pois dividiu em partes iguais.
B e C: se equivocaram na parte pedida, respondendo os valores de Z e Y respectivamente.

QUESTÃO 10

Uma herança de R$ 84 000,00 deve ser dividida entre três pessoas na razão 2 : 3 : 7.

O valor recebido pela pessoa correspondente à maior razão será

A R$ 14.000,00
B R$ 21.000,00
C R$ 28.000,00
D R$ 42.000,00
E R$ 49 000,00

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa E

Soma das razões:

2 + 3 + 7 = 12

Valor de cada parte:

84,000 /12 = 7,000

Maior razão:

7 x 7,000 = 49,000

Os alunos que de forma equivocada optaram por:
A e B: fizeram para as razões menores, 2 e 3 respectivamente.
C: fizeram, de forma errada uma divisão igualitária para 3 pessoas.
D: provavelmente não se atentaram ao comando dividindo pela primeira razão 2

SEMANA 7

Competência de área 6 - Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.
H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

Objetos do conhecimento

- Gráficos
- Tabelas

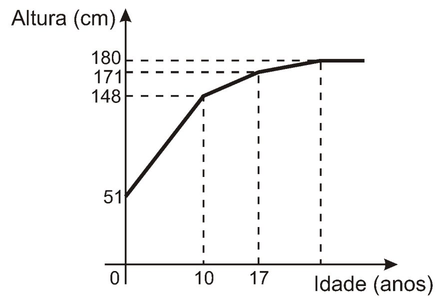
Professor(a), este material é pautado na perspectiva de resolução de problemas, assim ele iniciará com uma questão para estimular a discussão, seguido de um resumo de conceitos e posteriormente com questões ENEM e inéditas com padrão ENEM.

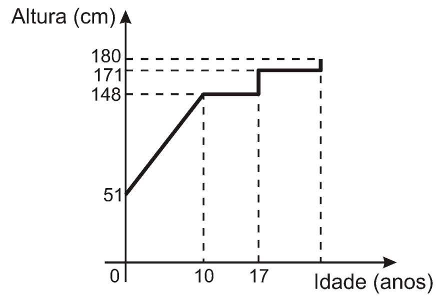
Solicite aos alunos que leiam e resolvam a questão seguinte, se abstenha de dar a resposta certa e convide os alunos a mostrar para turma seu raciocínio.

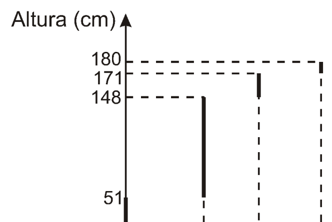
QUESTÃO 01

(ENEM 2010) Acompanhando o crescimento do filho, um casal constatou que, de 0 a 10 anos, a variação da sua altura se dava de forma mais rápida do que dos 10 aos 17 anos e, a partir de 17 anos, essa variação passava a ser cada vez menor, até se tornar imperceptível. Para ilustrar essa situação, esse casal fez um gráfico relacionando as alturas do filho nas idades consideradas.

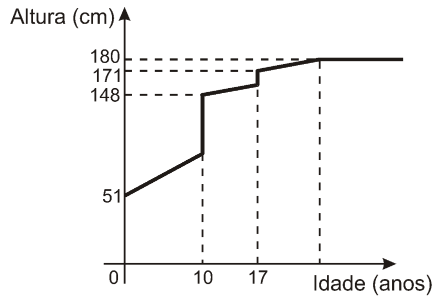
Que gráfico melhor representa a altura do filho desse casal em função da idade?

A


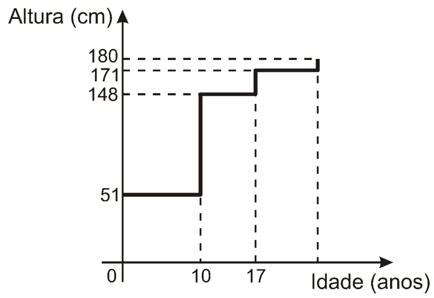
B


C


D



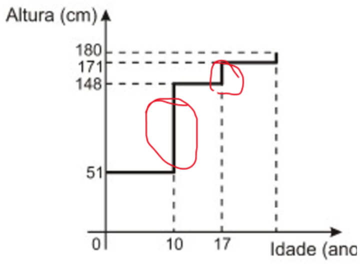
E



Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa A

É o mais adequado, logo o gabarito, pois a inclinação de 10 a 17 é maior que a inclinação para valores maiores que 17 e menor que a inclinação de 0 a 10. Todos os demais gráficos, nas alternativas [b], [c], [d] e [e], possuem um erro marcante e recorrente, vejamos.



Os pedaços em destaque, que se fazem presente nas alternativas incorretas indicam um crescimento no ano em questão. percebam que o texto fala de crescimento ao longo de um intervalo de tempo, não caracterizando o crescimento em um ano específico.

DE OLHO NO CONCEITO

Em geral essa habilidade associa o conhecimento de leitura de gráficos e tabelas com outro conhecimento, neste momento trabalharemos a apresentação de gráficos e tabelas.

Tabelas e Quadros

Tanto tabelas quanto quadros organizam informações de forma estruturada.

a) Quadro

Geralmente é usado para apresentar informações mais qualitativas ou listas.

Pode ter texto corrido, tópicos ou misturar dados de forma menos rígida.

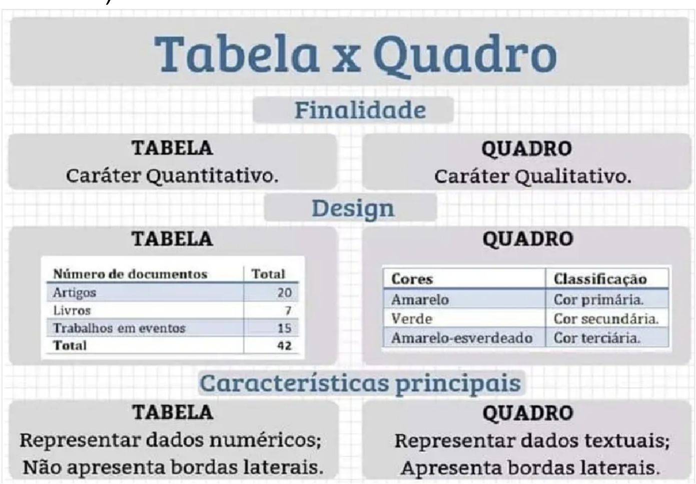
Exemplo: Um quadro resumo de fórmulas, um quadro comparativo de vantagens/desvantagens.

b) Tabela

Usada para organizar dados quantitativos e, às vezes, qualitativos de maneira mais formal e precisa.

Elementos Essenciais:

Título: Indica o conteúdo da tabela.
Cabeçalho (ou Coluna Indicadora): Identifica as categorias nas linhas ou colunas.
Corpo: Contém os dados.
Fonte: Indica de onde os dados foram obtidos (muito importante no ENEM!).
Tipos Comuns: Tabela de Frequências (absoluta e relativa) e Tabela de Dupla Entrada (cruzando duas variáveis).



Fonte: https://pt.scribd.com/

Tipos de Gráficos

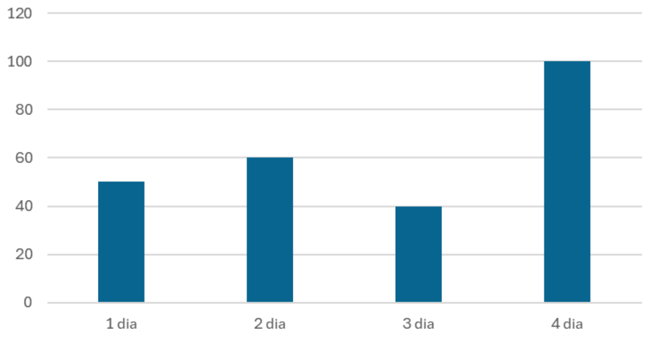
Gráficos são representações visuais de dados que facilitam a comparação e a identificação de tendências.

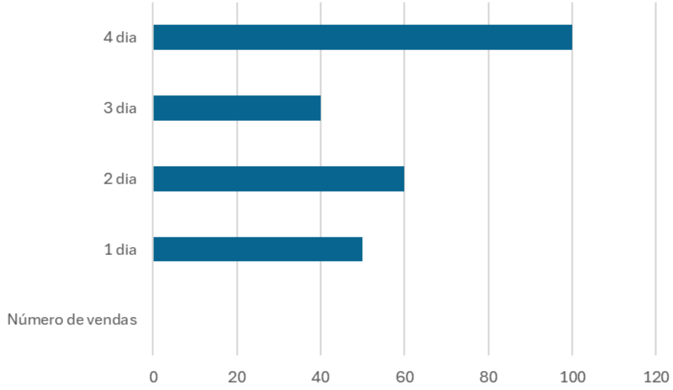
a) Gráfico de Barras

Uso: Comparar a frequência ou quantidade de diferentes categorias (variáveis qualitativas ou discretas).

Vertical (Colunas): As categorias ficam no eixo horizontal e os valores/frequências no eixo vertical. Ideal para mostrar a evolução no tempo ou comparar volumes.

Horizontal (Barras): As categorias ficam no eixo vertical e os valores/frequências no eixo horizontal. Útil quando os nomes das categorias são longos.



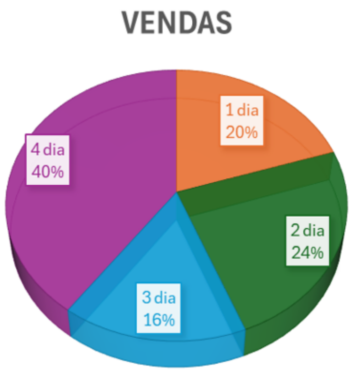


b) **Gráfico de Setores (ou "Pizza")**

Uso: Mostrar a composição de um todo (100%).
Cada fatia (setor) representa uma proporção do total, geralmente expressa em porcentagem.

Observação: A soma de todos os setores deve ser 100%, correspondendo a um ângulo total de 360º.
Cálculo: Para achar o ângulo de um setor, use a regra de três:

Parte(setor) ---------- ângulo do setor
Total(100%) ---------- 360º



c) **Gráfico de Linha (ou de Segmentos)**

Uso: Mostrar a evolução de um dado ao longo do tempo (séries temporais) ou a relação entre duas variáveis contínuas.

Os pontos de dados são conectados por linhas, destacando a tendência de crescimento, decrescimento ou estabilidade.

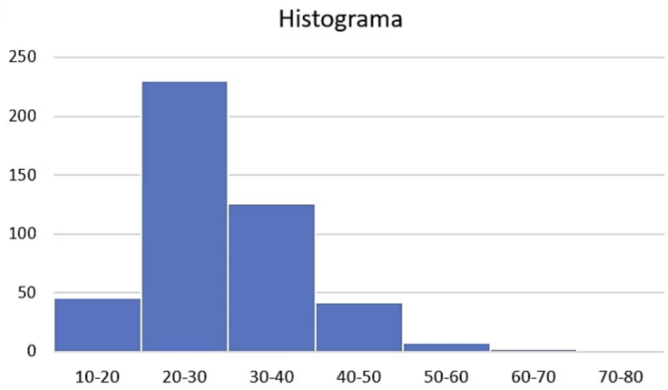
FONTE: https://maxplanilhas.com.br/

d) **Histograma**

Uso: Representar a distribuição de frequências de dados contínuos (ex: faixas de altura, classes de renda).

Características Principais:

As barras são adjacentes (grudadas), indicando que a variável é contínua.
A base da barra representa a classe (intervalo), e a altura representa a frequência (absoluta ou relativa) dessa classe.

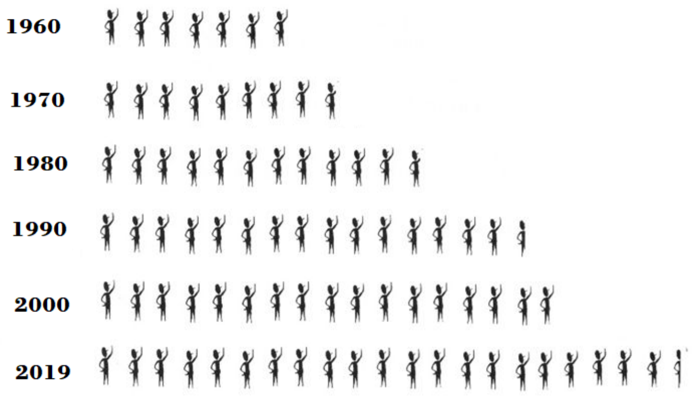


FONTE: https://vilesoft.com.br/

e) **Pictograma**

Uso: Usar ícones ou figuras relacionados ao tema para representar as quantidades.
Vantagem: É mais atrativo e fácil de entender.

Atenção: A chave (legenda) indica quanto cada figura representa. Exemplo: um desenho de carro pode valer 100 carros vendidos.



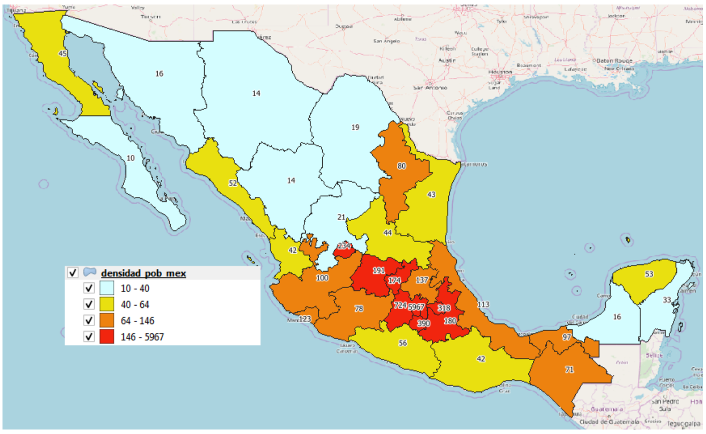
Cada símbolo representa 10.000.0000 habitantes

FONTE: https://geniodoenem.com.br/

f) Cartograma

Uso: Representar dados estatísticos em uma área geográfica (mapa).

Geralmente usa diferentes cores, texturas ou tons para indicar a intensidade de um fenômeno em cada região (ex: taxa de natalidade por estado, densidade populacional).

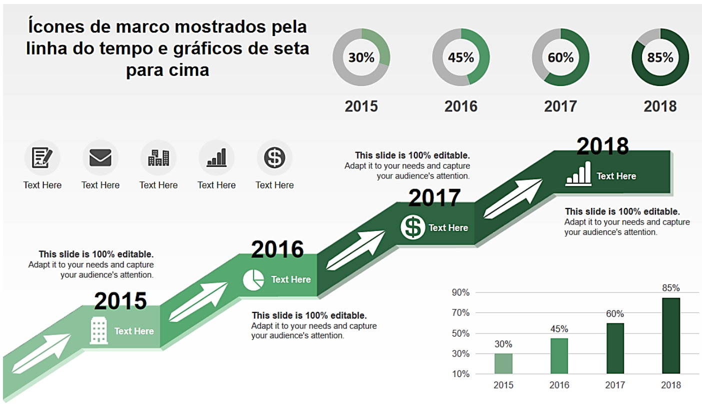


Fonte: https://fity.club/

g) Infográfico

Uso: Uma apresentação visual que combina texto, dados (em gráficos e tabelas), ilustrações, e outros elementos visuais para explicar um assunto complexo de forma clara e rápida.

É o tipo mais completo e envolve a interpretação de todos os elementos em conjunto.



Fonte: slideteam.net

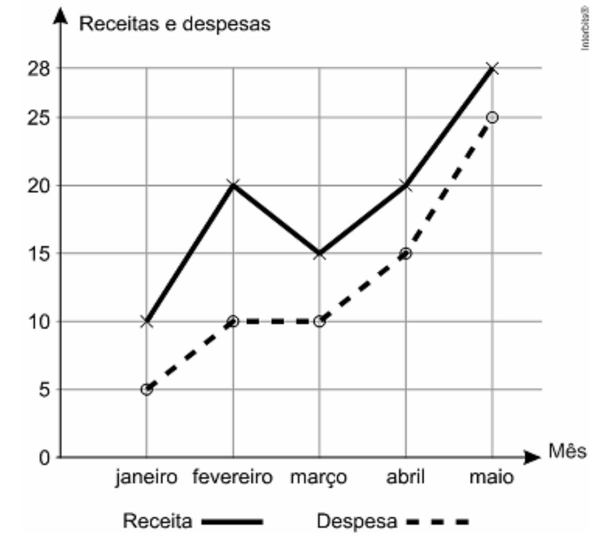
Observações

Leitura do Eixo: Sempre identifique o que está sendo medido nos eixos X (horizontal) e Y (vertical).
Escala: Verifique a escala dos eixos. Uma escala que não começa em zero pode distorcer a visualização.
Fonte e Título: Leia a fonte e o título para contextualizar a informação.
Cálculo de Proporção: Seja capaz de converter valores em porcentagens e vice-versa, especialmente em gráficos de setores e barras.

AGORA TENTE VOCÊ!

QUESTÃO 02

(ENEM 2021) A receita R de uma empresa ao final de um mês é o dinheiro captado com a venda de mercadorias ou com a prestação de serviços nesse mês, e a despesa D é todo o dinheiro utilizado para pagamento de salários, contas de água e luz, impostos, entre outros. O lucro mensal obtido ao final do mês é a diferença entre a receita e a despesa registradas no mês. O gráfico apresenta as receitas e despesas, em milhão de reais, de uma empresa ao final dos cinco primeiros meses de um dado ano.



A previsão para os próximos meses é que o lucro mensal não seja inferior ao maior lucro obtido até o mês de maio.

Nessas condições, o lucro mensal para os próximos meses deve ser maior ou igual ao do mês de

A janeiro.
B fevereiro.
C março.
D abril.
E maio.

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa B

Sendo 10 – 5 = 5, 20 – 10 = 10 , 15 – 10 = 5, 20 – 15 = 5 e 28 – 25 = 3 podemos concluir que o maior lucro, até maio, foi obtido no mês de fevereiro, que é o resultado pedido. O aluno que optou pela incorreta [a] possivelmente se confundiu optando pela menor receita, enquanto que optou pela incorreta [e] optou pelo menor lucro. Os alunos que optaram pelas alternativas [c] e [d] realizaram operações equivocadas ou tiveram dificuldades na leitura das informações do gráfico.

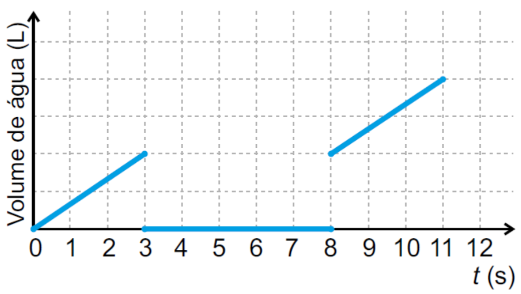
QUESTÃO 03

(ENEM 2023) Estudantes trabalhando com robótica criaram uma “torneira inteligente” que automatiza sua abertura e seu fechamento durante a limpeza das mãos. A tecnologia funciona da seguinte forma: ao se colocarem as mãos sob a torneira, ela libera água durante 3 segundos para que a pessoa possa molhá-las. Em seguida, interrompe o fornecimento de água por 5 segundos, enquanto a pessoa ensaboa suas mãos, e finaliza o ciclo liberando água para o enxágue por mais 3 segundos.

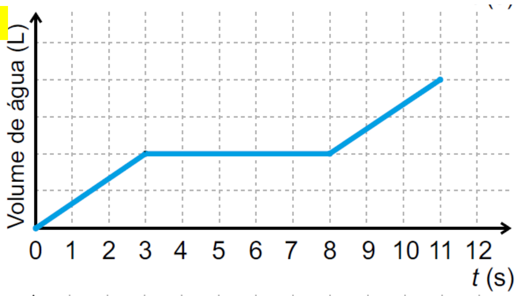
Considere o tempo (t), em segundo, contado a partir do instante em que se inicia o ciclo. A vazão de água nessa torneira é constante.

Um esboço de gráfico que descreve o volume de água acumulado, em litro, liberado por essa torneira durante um ciclo de lavagem das mãos, em função do tempo (t), em segundo, é

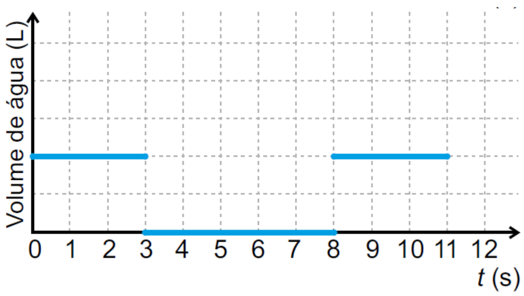
A



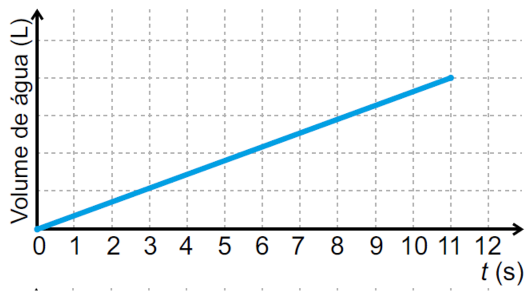
B



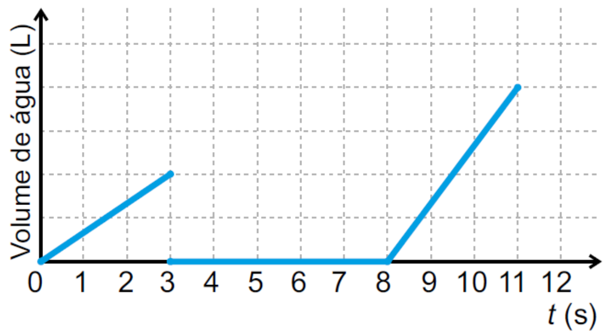
C



D



E



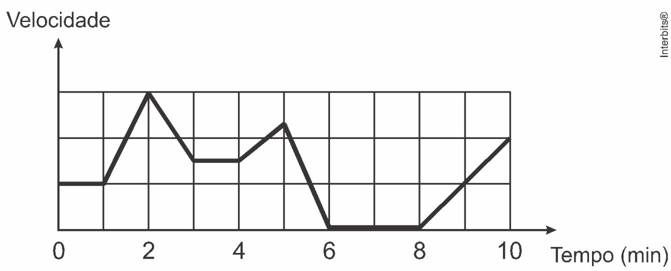
Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa B

O gráfico apresenta o volume de água acumulado liberado pela torneira, pois o volume acumulado deve aumentar entre os instantes de 0 a 3 s e 8 a 11 s, e deve permanecer constante (e não nulo) entre os instantes de 3 a 8 s. As alternativas incorretas [a], [c] e [e] foram opção dos alunos que não identificaram que o constante entre 3 e 8 s não pode ser nulo, a alternativa incorreta [d] foi atrativa para os alunos que, possivelmente por equívoco, consideraram variação linear em todo intervalo.

QUESTÃO 04

(ENEM 2017) Os congestionamentos de trânsito constituem um problema que aflige, todos os dias, milhares de motoristas brasileiros. O gráfico ilustra a situação, representando, ao longo de um intervalo definido de tempo, a variação da velocidade de um veículo durante um congestionamento.



Quantos minutos o veículo permaneceu imóvel ao longo do intervalo de tempo total analisado?

A 4
B 3
C 2
D 1
E 0

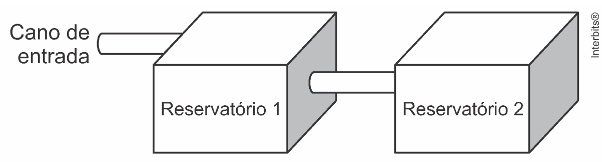
Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa C

Analisando o gráfico, percebe-se que a velocidade atinge valor igual a zero entre os minutos 6 e 8, portanto o carro permaneceu imóvel por 2 minutos.

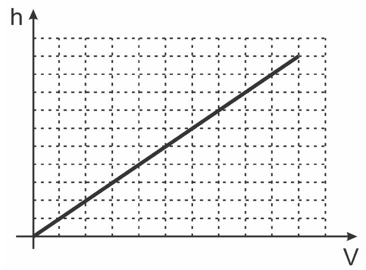
QUESTÃO 05

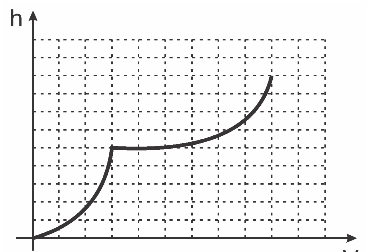
(Enem 2017) A água para o abastecimento de um prédio é armazenada em um sistema formado por dois reservatórios idênticos, em formato de bloco retangular, ligados entre si por um cano igual ao cano de entrada, conforme ilustra a figura.

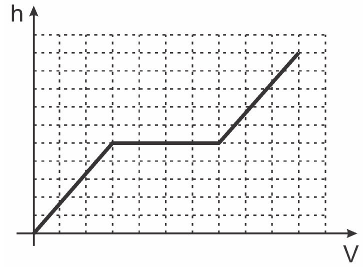


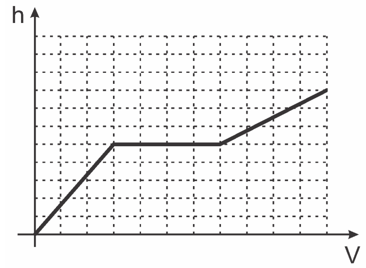
A água entra no sistema pelo cano de entrada no Reservatório 1 a uma vazão constante e, ao atingir o nível do cano de ligação, passa a abastecer o Reservatório 2. Suponha que, inicialmente, os dois reservatórios estejam vazios.

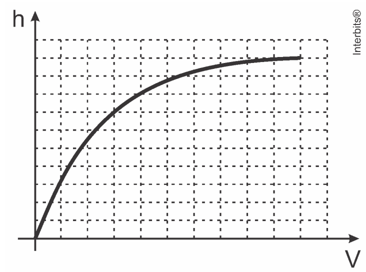
Qual dos gráficos melhor descreverá a altura h do nível da água no Reservatório 1, em função do volume V da água no sistema?

A


B


C


D


E


Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa D

O reservatório 1 se encherá de água numa vazão constante até atingir o nível do cano de ligação. A partir daí, terá seu nível estabilizado até que o reservatório 2 atinja o mesmo nível e, após isso, se encherá a uma vazão constante, porém menor que a inicial. O gráfico que melhor exemplifica essa situação é o apresentado na alternativa [D].

QUESTÃO 06

Em uma cidade, o valor total da conta de energia elétrica é obtido pelo produto entre o consumo (em kWh) e o valor da tarifa do kWh (com tributos), adicionado à Cosip (contribuição para custeio da iluminação pública), conforme a expressão:

$$\text{Valor do kWh (com tributos)} \times \text{consumo (em kWh)} + \text{Cosip}$$

O valor da Cosip é fixo em cada faixa de consumo. O quadro mostra o valor cobrado para algumas faixas.

Faixa de consumo mensal (kWh)	Valor da Cosip (R$)
Até 80	0,00
Superior a 80 até 100	2,00
Superior a 100 até 140	3,00

Superior a 140 até 200	4,50

Suponha que, em uma residência, todo mês o consumo seja de 150 kWh, e o valor do kWh (com tributos) seja de R$ 0,50. O morador dessa residência pretende diminuir seu consumo mensal de energia elétrica com o objetivo de reduzir o custo total da conta em pelo menos 10%.

Qual deve ser o consumo máximo, em kWh, dessa residência para produzir a redução pretendida pelo morador?

A 134,1

B 135,0

C 137,1

D 138,6

E 143,1

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa C

O valor total da conta de energia elétrica para o consumo de $150\,\text{kWh}$ é igual a $0{,}5\cdot 150+4{,}5=\text{R\$ }79{,}50.$ Assim, reduzindo em 10% o valor da conta, ele pagará $0{,}9\cdot 79{,}5=\text{R\$ }71{,}55.$

QUESTÃO 07

O quadro a seguir mostra a distribuição percentual de fontes de energia utilizadas em uma cidade fictícia em 2022:

Energia elétrica	40%
Energia solar	25%
Energia eólica	20%
Energia térmica	15%

Considerando os dados, qual conclusão pode ser corretamente inferida?

A A energia solar é a principal fonte utilizada na cidade.

B A soma das energias renováveis (solar e eólica) não supera a principal fonte.

C A energia elétrica representa a maior parcela do consumo energético.

D A energia térmica é a fonte mais utilizada na cidade.

E A participação da energia eólica é maior que a da energia solar.

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa C

O aluno que optou pela alternativa:

A se equivocou, pois, solar é 25%, menor que elétrica (40%).

B possivelmente não realizou, ou errou, a adição: solar + eólica = 45%, que é maior que elétrica isolada, mas o comando pede a principal fonte, não comparação de blocos.

D possivelmente se confundiu, pois, a energia térmica é a menor (15%).

E possivelmente se confundiu, uma vez que a eólica (20%) é menor que solar (25%).

QUESTÃO 08

(ENEM 2024) Uma pessoa planeja fazer um intercâmbio com duração de dois meses consecutivos a serem escolhidos dentre os seguintes meses: abril, maio, junho e julho.

A tabela apresenta as cinco cidades possíveis para o intercâmbio de seu interesse (X, Y, Z, W e K), com as respectivas temperaturas máximas mensais registradas no mesmo período do ano anterior.

Temperaturas máximas (°C)

Cidade	Abril	Maio	Junho	Julho
X	17	27	20	25
Y	24	22	21	25
Z	20	20	28	20
W	13	24	20	19
K	19	25	26	19

Seu médico recomendou que, com base nos dados fornecidos na tabela, ela escolhesse a cidade que apresentasse, em dois meses consecutivos, a maior média de temperatura máxima mensal e fizesse o intercâmbio nesse período.

Qual cidade a pessoa deve escolher para satisfazer adequadamente a recomendação médica?

A X

B Y

C Z

D W

E K

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa E

As únicas cidades que apresentam dois meses consecutivos de temperaturas máximas são as cidades W e K. E, dentre essas cidades, a que possui maior média nesses meses é a K, que é o local a ser escolhido para o intercâmbio.

QUESTÃO 09

(Enem PPL 2018) Um comerciante abrirá um supermercado, no mês de outubro, e precisa distribuir 5 produtos de limpeza em uma gôndola de cinco prateleiras que estão dispostas uma acima da outra (um tipo de produto por prateleira).

Ele sabe que a terceira prateleira oferece uma melhor visibilidade dos produtos aos clientes. Ele fez uma pesquisa sobre o número de vendas desses produtos, nos meses de agosto e setembro, em uma loja da concorrência (mostrada a seguir), e pretende incrementar suas vendas, em relação a seu concorrente, colocando na terceira prateleira de seu supermercado o produto que teve o maior índice de aumento nas vendas no mês de setembro em relação ao mês de agosto, na loja concorrente.

Produto	Número de unidades vendidas em agosto	Número de unidades vendidas em setembro
I	400	450
II	210	395
III	200	220
IV	300	390
V	180	240

O comerciante deve colocar na terceira prateleira o produto número

A I.
B II.
C III.
D IV.
E V.

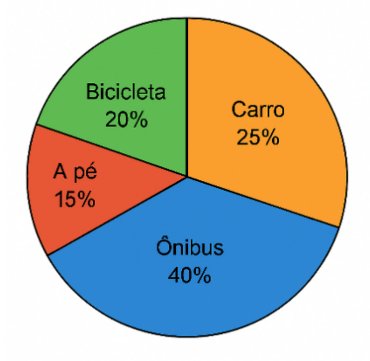
Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa B

É imediato que o produto número II apresentou o maior índice de aumento nas vendas no mês de setembro em relação ao mês de agosto. Basta notar que tal índice foi maior do que 50%.

QUESTÃO 10

Texto de apoio:
O gráfico de pizza mostra a distribuição de meios de transporte utilizados por estudantes de uma escola em 2023:



De acordo com o gráfico, podemos concluir que

A O carro é o meio de transporte mais utilizado.
B A bicicleta e a pé somam mais que ônibus.
C O ônibus é o meio de transporte predominante entre os estudantes.
D A pé representa a segunda maior parcela de transporte.
E A bicicleta é utilizada por mais estudantes que o carro.

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa C

O aluno que optou pela alternativa incorreta [a] se equivocou, pois, carro (25%) é menor que ônibus (40%). Quem marcou a incorreta [b] possivelmente realizou uma adição incorreta ou se confundiu com os valores a adicionar uma vez que bicicleta + a pé = 35%, menor que ônibus (40%). Na alternativa Incorreta [d] se confundiu, visto que a pé (15%) é a menor parcela. Na alternativa incorreta [e] possivelmente o aluno inverteu as informações, visto que bicicleta (20%) é menor que carro (25%).

SEMANA 8

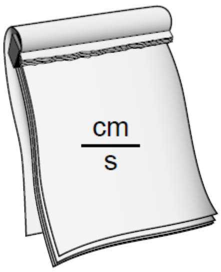
Retrospectiva das semanas anteriores

Exercícios das Habilidades Abordadas Anteriormente no Livro.

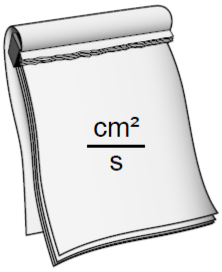
QUESTÃO 01

(ENEM PPL 2023) Um equipamento monitora o volume de água que passa por uma tubulação em um período de tempo. Um técnico rascunhou cinco possibilidades de unidade de medida para a grandeza que esse equipamento monitora.

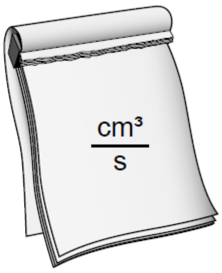
Nas imagens, cm significa centímetro, e s significa segundo.



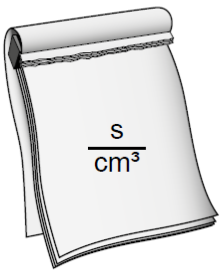
Rascunho I



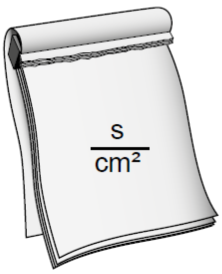
Rascunho II



Rascunho III



Rascunho IV



Rascunho V

O rascunho que expressa corretamente uma unidade de medida para a grandeza que esse equipamento monitora é o

A I.
B II.
C III.
D IV.
E V.

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa C

O volume deve ser medido em cm^3 e o tempo em segundos (s), a unidade correta é $\frac{cm^3}{s}$.

QUESTÃO 02

Durante o inverno, a região Sul do Brasil costuma registrar temperaturas negativas, atraindo turistas que desejam ver neve. A imagem a seguir mostra a previsão da temperatura mínima registrada em cinco cidades da Serra Catarinense em uma determinada noite.

- São Joaquim: -4 °C
- Urupema: -6 °C
- Lages: -1 °C
- Bom Jardim: 0 °C
- Urubici: -3 °C

Com base nas informações apresentadas, a cidade que registrou a temperatura mais baixa nessa noite foi

A Lages.
B Bom Jardim.
C Urubici.
D São Joaquim.
E Urupema.

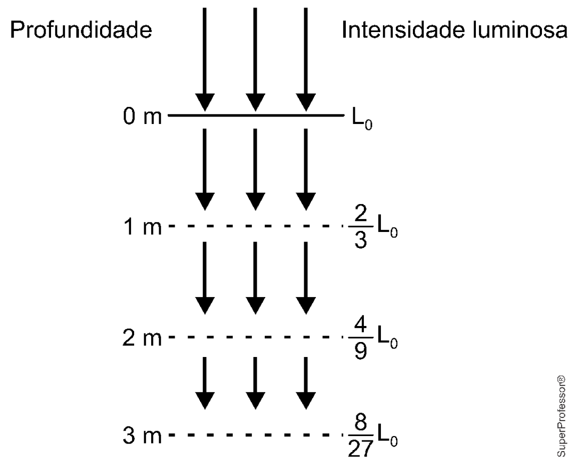
Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa E

O aluno que identifica corretamente que, na reta numérica dos inteiros, -6 é o valor mais à esquerda (menor) dentre as opções apresentadas localizou o gabarito [e]. O aluno que optou pela alternativa [a] pode ter confundido a magnitude do número (1) com o seu valor relativo, ignorando que -6 é menor que -1. O aluno que marcou a alternativa [b] pode acreditar que o "0" é o menor valor possível, desconhecendo ou ignorando a existência de números negativos. O aluno que marcou a incorreta [c] pode ter se equivocado com a ordenação dos números negativos, achando que -3 é "mais baixo" que -6 porque 3 é menor que 6 (pensamento de números naturais). Na alternativa incorreta [d] o aluno cometeu o erro na comparação entre -4 e -6. O aluno reconhece que é negativo, mas falha em identificar o menor valor absoluto como o mais distante de zero no sentido negativo.

QUESTÃO 03

(ENEM 2023) O esquema mostra como a intensidade luminosa decresce com o aumento da profundidade em um rio, sendo L0 a intensidade na sua superfície.



Considere que a intensidade luminosa diminui, a cada metro acrescido na profundidade, segundo o mesmo padrão do esquema.

A intensidade luminosa correspondente à profundidade de 6 m é igual a

A $\frac{1}{9}L_0$

B $\frac{16}{27}L_0$

C $\frac{32}{243}L_0$

D $\frac{64}{729}L_0$

E $\frac{128}{2187}L_0$

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa D

A sequência de intensidades luminosas corresponde a uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$. Sendo assim, a intensidade luminosa correspondente à profundidade de 6 m (sétimo termo da PG) é igual a:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_7 = L_0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{7-1}$$

$$\therefore a_7 = \frac{64}{729}L_0$$

QUESTÃO 04

(ENEM 2024) Um hospital tem 7 médicos cardiologistas e 6 médicos neurologistas em seu quadro de funcionários. Para executar determinada atividade, a direção desse hospital formará uma equipe com 5 médicos, sendo, pelo menos, 3 cardiologistas.

A expressão numérica que representa o número máximo de maneiras distintas de formar essa equipe é

A $\frac{7!}{4!} \times \frac{6!}{4!}$

B $\frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!}$

C $\frac{7!}{3! \times 4!} + \frac{6!}{2! \times 4!} + \frac{5!}{1! \times 4!}$

D $\left(\frac{7!}{3! \times 4!} + \frac{6!}{2! \times 4!}\right) \times \left(\frac{7!}{4! \times 3!} + \frac{6!}{1! \times 5!}\right) \times \left(\frac{7!}{5! \times 2!} + \frac{6!}{0! \times 6!}\right)$

E $\left(\frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{6!}{2! \times 4!}\right) + \left(\frac{7!}{4! \times 3!} + \frac{6!}{1! \times 5!}\right) + \left(\frac{7!}{5! \times 2!} + \frac{6!}{0! \times 6!}\right)$

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa E

como a equipe tem 5 pessoas, e no mínimo 3 são cardiologistas, as composições possíveis são, $\binom{7}{3} \times \binom{6}{2} + \binom{7}{4} \times \binom{6}{1} + \binom{7}{5} \times \binom{6}{0}$.

Quantidade de maneiras de escolhermos:

3 médicos cardiologistas e 2 neurologistas:

$$C_{7,3} \cdot C_{6,2} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!}$$

4 médicos cardiologistas e 1 neurologista:

$$C_{7,4} \cdot C_{6,1} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{1! \cdot 5!}$$

5 médicos cardiologistas:

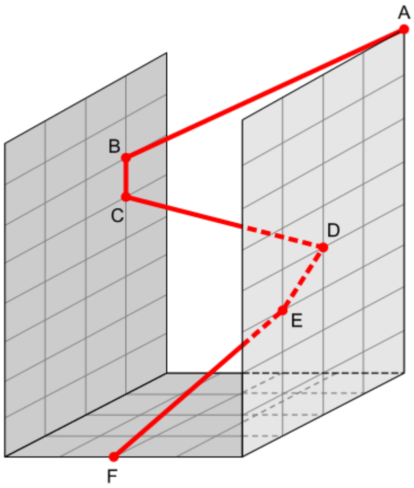
$$C_{7,5} \cdot C_{6,0} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{0! \cdot 6!}$$

Portanto, a expressão numérica buscada é:

$$\frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{6!}{2! \cdot 4!} + \frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{1! \cdot 5!} + \frac{7!}{5! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{0! \cdot 6!}$$

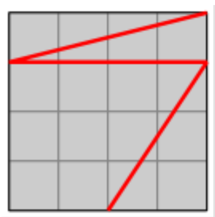
QUESTÃO 05

(ENEM 2024) Em um jogo virtual para celular, um personagem pode percorrer trajetórias retilíneas voando ou se deslocando ao longo de paredes. Considere que o personagem descreve a trajetória ABCDEF, em que os pontos A, D e E estão em um plano paralelo ao que contém os pontos B e C, sendo esses dois planos ortogonais ao plano da base que contém o ponto F, conforme a figura.

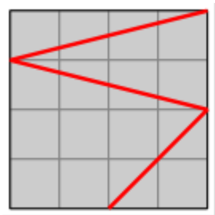


A projeção ortogonal, sobre o plano da base, da trajetória ABCDEF descrita pelo personagem é

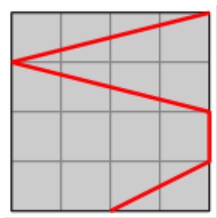
A



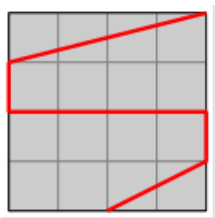
B



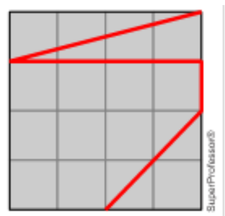
C



D



E

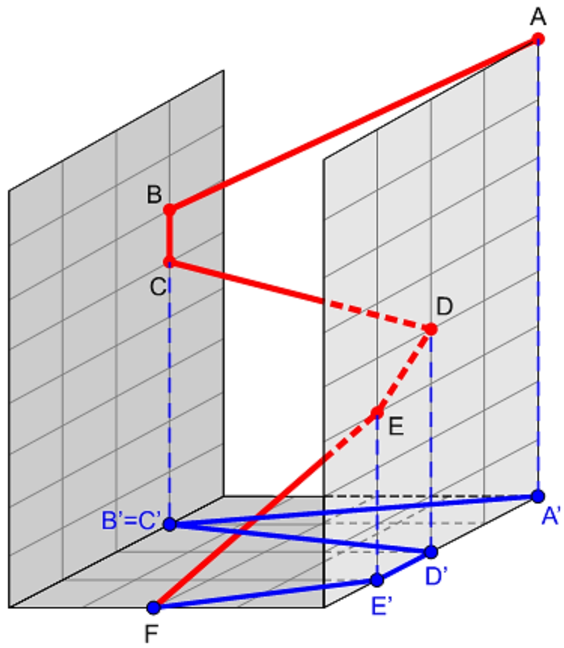


F

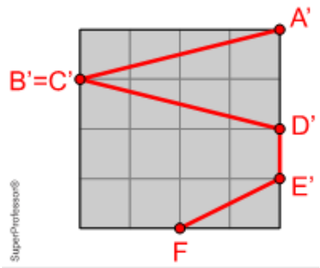
Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa C

Fazendo a projeção da trajetória ABCDEF sobre o plano da base, obtemos:



O que equivale à projeção ilustrada na alternativa [C]:



QUESTÃO 06

(ENEM 2021) Em uma corrida automobilística, os carros podem fazer paradas nos boxes para efetuar trocas de pneus. Nessas trocas, o trabalho é feito por um grupo de três pessoas em cada pneu. Considere que os grupos iniciam o trabalho no mesmo instante, trabalham à mesma velocidade e cada grupo trabalha em um único pneu. Com os quatro grupos completos, são necessários 4 segundos para que a troca seja efetuada. O tempo gasto por um grupo para trocar um pneu é inversamente proporcional ao número de pessoas trabalhando nele. Em uma dessas paradas, um dos trabalhadores passou mal, não pôde participar da troca e nem foi substituído, de forma que um dos quatro grupos de troca ficou reduzido.

Nessa parada específica, com um dos grupos reduzido, qual foi o tempo gasto, em segundo, para trocar os quatro pneus?

A 6,0
B 5,7
C 5,0
D 4,5
E 4,4

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa A

Se o número de pessoas foi reduzido para $\frac{2}{3}$ da quantidade inicial, então o tempo aumentará para $\frac{3}{2}$ do valor inicial, ou seja, passará a ser de $\frac{3}{2}\cdot 4 = 6$ segundos.

QUESTÃO 07

O extrato bancário é uma representação numérica das movimentações financeiras de uma pessoa ou empresa. Nele, valores positivos indicam créditos (entradas de dinheiro) e valores negativos indicam débitos (saídas de dinheiro).
Observe a movimentação da conta de uma pequena empresa durante um dia de operações:

Descrição da Movimentação	Valor (R$)
Saldo Inicial	- 450,50
Depósito de Cliente	+ 600,00
Pagamento de Fornecedor	- 250,50
Tarifa Bancária	- 19,00

Ao final desse dia, o saldo dessa empresa e o seu significado financeiro correspondem a um valor de

A – R$ 120,00, indicando que a empresa ficou devendo ao banco.
B + R$ 120,00, indicando que a empresa tem recursos disponíveis.
C – R$ 119,00, indicando que a empresa ficou devendo ao banco.
D + R$ 419,00, indicando que a empresa recuperou todo o prejuízo.
E – R$ 1.320,00, indicando a soma de todas as movimentações.

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa A

(A) Correto. O aluno realiza as operações corretamente: $(-450,50 + 600,00) = +149,50$. Em seguida: $(+149,50 - 250,50) = -101,00$. Por fim: $(-101,00 - 19,00) = -120,00$. Reconhece que o sinal negativo representa dívida.
(B) Incorreto. O aluno realiza o cálculo absoluto corretamente (chega a 120), mas erra o sinal ou a interpretação do resultado, acreditando que o saldo final é positivo (credor).
(C) Incorreto. O aluno ignora a casa decimal ou o valor da tarifa bancária no cálculo final, ou erra a subtração de números inteiros (subtraindo 19 de 101 de forma equivocada, ex: confundindo sinais).
(D) Incorreto. O aluno ignora o saldo inicial negativo (-450,50) e considera apenas as operações do dia como se a conta partisse de zero: $(600 - 250,50 - 19 = 330,50)$ ou comete erros grosseiros de aproximação, focando apenas no depósito de 600.
(E) Incorreto. O aluno soma todos os valores em módulo (ignora os sinais de negativo), tratando tudo como entrada ou tudo como "volume de dinheiro movimentado": $450,50 + 600 + 250,50 + 19$.

QUESTÃO 08

(ENEM PPL 2023) Um estudante de arquitetura projetou um prédio de 32 m de altura a ser construído em uma maquete, em papel-cartão, na escala 1 : 50.

Nesse caso, na maquete, a altura do prédio mede

A 0,32 m.
B 0,50 m.
C 0,64 m.
D 1,00 m.
E 1,32 m.

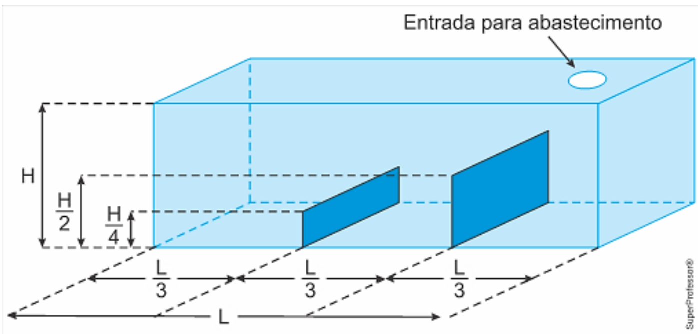
Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa C

a escala 1:50 significa que 1 unidade na maquete representa 50 unidades na realidade, assim, basta dividir a altura real pela razão de redução, $\frac{32\,m}{50} = 0{,}64\,m$.

QUESTÃO 09

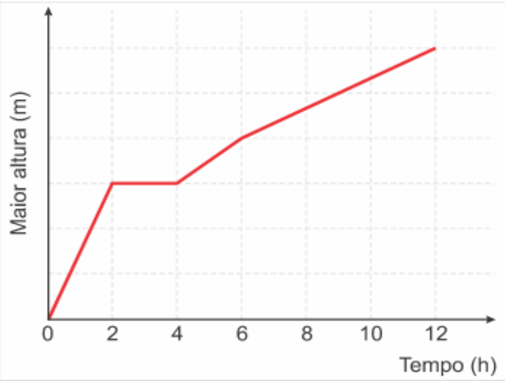
(ENEM 2024) Um tanque, em formato de paralelepípedo reto retângulo, tem em seu interior dois anteparos verticais, fixados na sua base e em duas paredes opostas, sendo perpendiculares a elas, conforme a figura.



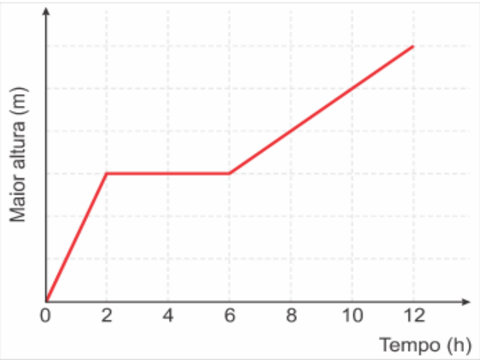
Esses anteparos, de espessuras desprezíveis, estão instalados de maneira a dividir a base do tanque em três retângulos congruentes, tendo suas alturas iguais à metade e a um quarto da altura do tanque. O tanque é abastecido por uma entrada situada no teto, através de um duto que despeja água a uma vazão constante, sendo necessárias 12 horas para finalizar o seu enchimento.

O gráfico que descreve, em cada instante, a maior altura de coluna de água, dentre aquelas que vão sendo formadas ao longo do enchimento do tanque, é

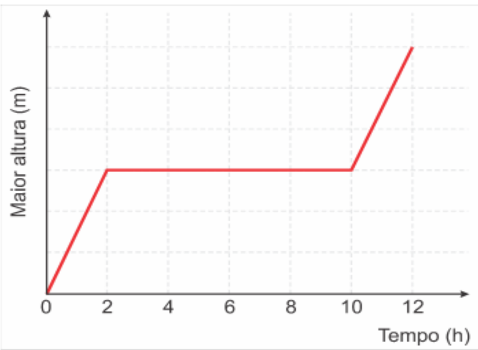
A



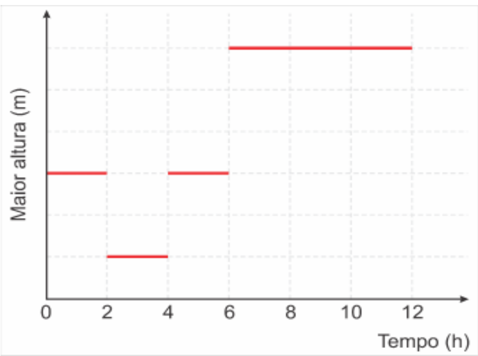
B



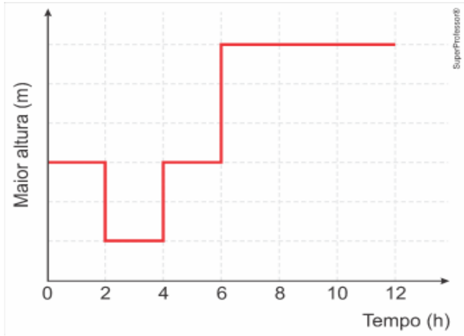
C



D



E



Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa B

Como o tanque demora 12 horas para ser enchido e o tempo de enchimento de cada compartimento é proporcional ao seu volume, concluímos que o tempo necessário para encher o primeiro compartimento até uma altura de $\frac{H}{2}$ é de:

$$\Delta t_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12\ h = 2\ h$$

Analogamente, o tempo necessário para encher o segundo e o terceiro compartimentos até uma altura de $\frac{H}{2}$ é de:

$$\Delta t_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 12\ h = 4\ h$$

E o tempo para encher o volume restante é de:

$$\Delta t_3 = 12\ h - 2\ h - 4\ h = 6\ h$$

Sendo assim, a altura da coluna de água deve crescer linearmente entre 0 e 2 h, permanecer constante entre 2 e 6 h, e voltar a crescer linearmente entre 6 e 12 h. O que nos leva ao gráfico da alternativa [B].

QUESTÃO 10

(ENEM 2020) Uma das Sete Maravilhas do Mundo Moderno é o Templo de Kukulkán, localizado na cidade de Chichén Itzá, no México. Geometricamente, esse templo pode ser representado por um tronco reto de pirâmide de base quadrada.

As quantidades de cada tipo de figura plana que formam esse tronco de pirâmide são

A 2 quadrados e 4 retângulos.

B 1 retângulo e 4 triângulos isósceles.

C 2 quadrados e 4 trapézios isósceles.
D 1 quadrado, 3 retângulos e 2 trapézios retângulos.
E 2 retângulos, 2 quadrados e 2 trapézios retângulos.

Resolução e comentários

O gabarito é a alternativa C

O tronco de pirâmide de base quadrada é obtido ao cortar uma pirâmide por um plano paralelo à base. A base original e a seção feita pelo corte são quadrados → portanto, há 2 quadrados (superior e inferior).
As faces laterais, que antes eram triângulos, tornam-se trapézios isósceles, porque, o corte é paralelo à base, e as arestas inclinadas mantêm o mesmo comprimento e inclinação.

GOVERNO DO ESTADO DO PARÁ

SECRETARIA DE
EDUCAÇÃO