RECOMPOSIÇÃO DAS APRENDIZAGENS

MATEMÁTICA

Caderno do Aluno

3º Ano ensino médio

QUINZENAS 9,10,11 E 12

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO
GOVERNO DO PARÁ

3º Ano ensino médio

Elaboradores

Elias J. Bechara Soares Jr.
Professor Formador / DRE 03 - Belém

Gesson José Mendes Lima
Professor Formador / PEI

Gleidson Diego dos Reis Monteiro
Professor De Área / COEM

Jacob Jonhison Corrêa Brito
Professor Formador / DRE 08 - Belém

Roberto da Silva Nunes
Professor Formador / DRE 06 - Belém

QUINZENA 9

D17 - Resolver problema envolvendo equação do 2º grau.

D26 - Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau.

17ª SEMANA

17ª SEMANA
17ª SEMANA
17ª SEMANA

D17 - Resolver problemas que envolvendo equação do 2º grau.

EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM

- O aluno será capaz de resolver equações do 2º grau de forma algébrica e gráfica, utilizando métodos como fatoração, quadrado perfeito e fórmula quadrática.
- O aluno será capaz de identificar e escrever equações do 2º grau a partir de situações problemas, utilizando linguagem matemática apropriada.
- O aluno será capaz de resolver problemas que envolvem equações do 2º grau em contextos variados, como física, economia e engenharia.
- O aluno será capaz de analisar e interpretar as soluções de equações do 2º grau, considerando a existência e a natureza das raízes (reais ou complexas).

DETALHAMENTO DAS HABILIDADES

- Espera-se que os alunos sejam capazes de entender a relação entre a equação e o gráfico de uma equação do 2º grau, bem como entender a teoria que está por trás das equações do 2º grau, incluindo a forma geral, os coeficientes e as soluções Além disso, é fundamental que sejam capazes de analisar e resolver problemas que envolvam essas equações, utilizando métodos e técnicas, tais como fatoração, completamento de quadrados, a fórmula de Bhaskara. E por fim, sejam capazes de aplicar a equação do 2º grau em problemas como de física, economia etc.
- A seguir, são apresentadas habilidades da BNCC diretamente ligadas às expectativas de aprendizagem elencadas para o descritor focal (D17):

- (EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
- (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau;
- (EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

RESUMO TEÓRICO

EQUAÇÃO DO 2.º GRAU AO LONGO DA HISTÓRIA, NA ESCOLA E NO MUNDO CONTEMPORÂNEO

Existem contribuições relevantes sobre equação do 2º grau ao longo da história. Dentre essas contribuições, destacam-se, alguns casos raros, como por exemplo, o tratamento feito em uma equação do 2º grau pelos Egípcios por volta do ano 1950 a.C. Isso pode ser observado no Papiro de Berlim, na Alemanha.

Na Mesopotâmia, os primeiros registros datam de aproximadamente 1700 a.C. e foram encontrados em uma tábua de argila, por meio de palavras, a resolução de problemas envolvendo essa equação. A resolução desse problema, era representada como “uma receita de bolo”, pois seu processo de resolução seguia alguns passos até chegar à solução, que, no caso em questão, apresentava somente uma raiz positiva.

Na Grécia, por volta de 500 a 200 a.C., os problemas matemáticos recebiam tratamento geométrico, cuja solução era encontrada através de uma equação do 2º grau. Em “Os Elementos” de Euclides, na **Proposição 28 - Livro VI,** encontramos o seguinte problema:

Dividir um segmento de reta de modo que o retângulo contido por suas partes seja igual a um quadrado dado, não excedendo este o quadrado sobre metade do segmento de reta dada.

Em linguagem matemática atual, ele ficaria

$$x^2 - px + q^2 = 0, \text{ com } p = r + s \text{ e } q^2 = r \cdot s,$$

onde **p** e **q** são segmentos dados, **r** e **s** são segmento de reta e solução da equação, respectivamente.

Na Índia, a matemática hindu contribuiu com a resolução de uma equação do 2º grau através de grandes personalidades como, Aryabhata (séc. VI d.C.), Brahamagupta (séc. VII d.C.), Sridhara (séc. XI d.C.) e Bhaskara (1114-1185). Segundo o próprio Bhaskara, a regra que ele utilizava e que deu originou à fórmula atual era devido a Sridhara e que curiosamente é chamada, somente no Brasil, de Fórmula de Bhaskara.

Por volta de 825, na Arábia, Mohamed ibn-Musa al-Khowarizmi apresenta a equação do 2° grau, bem como sua resolução, de forma retórica, além de uma comprovação geométrica denominada método de completar quadrados, método geométrico distinto do utilizado pelos gregos.

Ao discutirmos o tema equação do 2º grau, no contexto escolar, é fundamental resgatar seu vínculo histórico e sua importância e finalidade no mundo contemporâneo em que vivemos. É importante evidenciar aplicações envolvendo o referido tema, entre as quais destacamos aplicações na **Física**, ao calcularmos a trajetória de uma bola de futebol para prever onde ela irá aterrissar; já na **Engenharia**, a equação do 2.º grau é utilizada para calcular a resistência de materiais e/ou dimensionamentos de vigas e pilares; enquanto na **Biologia**, podemos utilizar essa equação para modelar o crescimento populacional. Com isso, demonstra-se que o objeto matemático, equação do 2.º grau, discutido no âmbito escolar, possui significado e os discentes precisam estudá-lo para garantir a construção de seu arcabouço teórico e/ou processo cognitivo, bem como para futuras aplicações, seja no contexto escolar ou fora dele. Isso concretiza o que os documentos oficiais definem como as aprendizagens essenciais, que todos os discentes devem adquirir como garantia ao final da educação básica.

Equação do segundo grau

Considera-se equação do 2.º grau, toda equação da forma $ax^2+bx+c = 0$, onde a, b e c são reais dados, sendo $a \neq 0$.

Obs1: O primeiro membro da última equação também é conhecido como trinômio do 2.º grau e **a**, **b** e **c** são seus coeficientes.
Obs2: Da última equação ou trinômio do 2.º grau, tem-se o número Δ (lê-se delta) dado por $\Delta = b^2-4ac$. Tal número é o discriminante da equação ou do trinômio do 2.º grau.

Equações do 2.ºgrau completas e incompleta.

As equações do **2º grau completas,** são aquelas que apresentam todos os coeficientes, ou seja, a, b e c são diferentes de zero($a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c \neq 0$)

Exemplo 1 - $5x^2 + 2x + 2 = 0$ é completa, pois todos os coeficientes são diferentes de zero (a = 5, b = 2 e c = 2).

Uma equação do segundo grau é **incompleta** quando b = 0 ou c = 0 ou b = c = 0.

Exemplo 2 — equações do 2° grau incompletas

a) $3x^2 = 0$ é incompleta, pois a = 2, b = 0 e c = 0.
b) $x^2 + 4 = 0$ é incompleta pois, a = 1 e b = 0.
c) $-5x^2 - 6x = 0$, é incompleta pois, a = -5, b = -6 e c = 0.

Forma canônica do trinômio do 2.º grau.

Dados a, b e c ϵ R, com a ≠ 0, tem-se

$$ax^2+bx+c = a[(x+\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] .$$

De fato, basta ver que

$$ax^2+bx+c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

$$= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a})$$

$$= a[(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}]$$

$$= a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}]. \qquad (1.0) \qquad \blacksquare$$

Qual a importância em se discutir o valor do discriminante (Δ)?
Sejam a, b e c reais dados.

(1) A equação $ax^2+bx+c = 0$ possui raízes reais se e somente se $\Delta \geq 0$.
(2) Se $\Delta \geq 0$, então a soma **S** e o produto **P** das raízes da equação do item (1) são dadas por

$$S = -\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad P = \frac{c}{a}$$

(3) A equação $ax^2 + bx + c = 0$ possui raízes reais se e somente se $\Delta \geq 0$.

De fato, dada equação $ax^2+bx+c = 0$**.** Temos pela equação (1.0) que sua forma fatorada é:

$$ax^2 + bx + c = a[(x +\frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}].$$

Logo,

$$a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = 0.$$

Daí segue,

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}, \qquad (2.0)$$

ou ainda,

$$4a^2.(x+\frac{b}{2a})^2 = \Delta$$

Como $(x+\frac{b}{2a})^2 \geq 0$ para todo x ϵ R e $4a^2 > 0$, para todo **a** ϵ R^*. Logo, $4a^2.(x+\frac{b}{2a})^2 \geq 0$. Se a equação tiver raízes reais, então Δ ≥ 0.

Afirmação: as raízes da equação são dadas por $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ e $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

De fato, segue de (2.0)

$$(x+\frac{b}{2a}) = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a},$$

ou ainda,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Portanto, as raízes da equação são $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Se Δ ≥ 0, então a soma **S** e o produto **P** das raízes da equação do item (1) são dadas por

$$S = -\frac{b}{a} \quad e \quad P = \frac{c}{a}$$

Note que que a soma **S** é dada por,

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Donde segue,

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}.$$

E o produto **P** é dado por,

$$x_1.x_2 = (\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}).(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}),$$

ou ainda,

$$x_1.x_2 = \frac{(-b)^2+\Delta}{4a^2}.$$

Logo,

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

Portanto,

$$S = \frac{-\mathrm{b}}{\mathrm{a}} \qquad e \qquad P = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$$

Fórmula Resolutiva (erroneamente dita de Bhaskara)

Quando $\Delta \geq 0$, a fórmula $\frac{-\mathrm{b}\pm\sqrt{\Delta}}{2\mathrm{a}}$ para as raízes da equação do 2.º grau $ax^2+bx+c = 0$ é conhecida como fórmula de Bhaskara.

Obs3: As fórmulas $S = \frac{-\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$ e $P = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$ são conhecidas como fórmulas de Viète.
Obs4: Se $\Delta = 0$, então a equação possui duas raízes reais e iguais.

Métodos para resolver uma equação do 2º grau.

Para resolver uma equação do segundo grau, existem três métodos principais: **fatoração**, **completando o quadrado** e a **fórmula quadrática (Bhaskara).**

Exemplo 3: Resolver a equação de segundo grau $x^2 - x - 2 = 0$ utilizando os três métodos: **fatoração, completando o quadrado** e **fórmula quadrática (Bhaskara).**

a) Resolução da equação $x^2 - x - 2 = 0$, utilizando **o método da fatoração.**

Solução: Para resolver uma equação do 2.º grau pelo método da fatoração, aplicamos a fórmula de Viéte, de posse da Soma (S) e o Produto (P) das raízes, fatoramos a equação. Em seguida, encontramos suas raízes.
Dada a equação $x^2 - x - 2 = 0$, temos que $a = 1$, $b = -1$ e $c = -2$. Utilizando esses valores na fórmula de Viéte, $S = \frac{-\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$ e $P = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$. Obtemos, $S = \frac{-(-1)}{1} = 1$ e $P = \frac{-2}{1} = -2$.
Agora, fatorando a equação $x^2 - x - 2 = 0$. Obtemos, $x^2 - x - 2 = (x+1) . (x-2) = 0$. Em seguida, resolvendo a equação proveniente dessa fatoração, temos $x+1 = 0$ ou $x - 2 = 0$.
Portanto, as raízes **x = -1 e x = 2**.

b) Resolução da equação $x^2 - x - 2 = 0$, utilizando o método do **completamento do quadrado.**

Solução: Para resolver a equação do tipo $ax^2+bx+c = 0$ pelo método do completamento do quadrado, devemos dividir a equação toda por **a,** com $a \neq 0$. Em seguida**.** acrescentar e retirar o termo $(\frac{b}{2a})^2$. Em nosso exemplo, a equação é $x^2 - x - 2 = 0$, a = 1 e b = -1, logo devemos, apenas, acrescentar e retirar da equação, o termo $(\frac{-1}{2.1})^2$. Assim, $x^2 - x + (\frac{-1}{2.1})^2 - (\frac{-1}{2.1})^2 - 2 = 0$. Daí segue, $(x^2 - x + \frac{1}{4.}) - \frac{1}{4.} - 2 = 0$, ou ainda $(x - \frac{1}{2.})^2 - \frac{9}{4.} = 0$.

Da última igualdade, temos $(x - \frac{1}{2.})^2 = \frac{9}{4.}$. E para encontrar as raízes da equação, extraímos a raiz quadrada em ambos os membros na última equação, em seguida isolamos o x, isto é, $x = \frac{1}{2.} \pm \frac{3}{2}$. Portanto, as raízes procuradas são **x = 2** e **x = -1**.

c) Resolução da equação $x^2 - x - 2 = 0$, utilizando a fórmula quadrática (Bhaskara).

Solução:
Para resolvermos a equação acima pelo método que utiliza fórmula quadrática ("Bhaskara"), basta utilizar a fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, onde $\Delta = b^2 - 4ac$.

Dada a equação $x^2 - x - 2 = 0$. Temos que a =1, b = -1 e c = -2.

Calculando $\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-2) = 9$ e substituindo em $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Obtemos,
$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{9}}{2.1}$, ou ainda, $x = \frac{1 \pm 3}{2}$. Portanto, as raízes da equação são x = 2 e x = -1.

ATIVIDADES PROPOSTAS

QUESTÃO 01

(OBMEP) Para cercar um terreno retangular de 60 metros quadrados com uma cerca formada por dois fios de arame foram usados 64 metros de arame.

Qual é a diferença entre o comprimento e a largura do terreno?
A) 4 m B) 10 m C) 16 m D) 64 m E) 124 m

QUESTÃO 02

Um engenheiro está projetando uma área retangular para um jardim de inverno. Ele deseja que a área do jardim seja de 160 metros quadrados. Além disso, quer que o comprimento do jardim seja 2 metros maior que 75% da largura.

Qual é o perímetro aproximado desse jardim?

A) 13,33 m B) 25,33 m C) 50,66 m D) 120 m E) 160 m

QUESTÃO 03

A cidade de Belém do Pará está se preparando para receber a Cop 30 (30ª Conferência das Nações Unidas sobre Mudança do Clima). A hotelaria local está trabalhando para atender à demanda por hospedagem. Um hotel em Belém está oferecendo quartos a um preço que varia de acordo com a quantidade de quartos ocupados. O preço por quarto é dado pela função $P(x) = 150 – x$, onde x é o número de quartos ocupados.

O custo de manter um quarto ocupado é de R20,00 por noite, e o hotel tem um custo fixo de R$ 500,00 por dia. O Custo Total do hotel é dado pela função $C(x) = 20x + 500$, onde x é o número de quartos ocupados.

A Receita Total do hotel é dada pela função $R(x) = P(x)$, onde x é o número de quartos ocupados.

Sabendo que o Ponto de Equilíbrio ocorre quando a Receita Total R(x) for igual ao Custo Total C(x), isto é, $R(x) = C(x)$.

Qual é o número, aproximado, de quartos que o hotel deve ocupar para atingir o ponto de equilíbrio?

A) 4 B) 126 C) 133 D) 134 E) 500

QUESTÃO 04

Uma empresa de eventos está planejando uma festa de aniversário em um salão de festas. O salão cobra um aluguel fixo de R$ 1.500,00 por evento, mais um valor adicional por convidado, que varia de acordo com a quantidade de convidados. O preço por convidado é dado pela função $P(x) = 50 + x/10$, onde x é o número de convidados. O custo total do evento é dado pela função $C(x) = 1500 + 50x – x^2/10$, onde x é o número de convidados.

Já a receita total do evento vem das vendas de ingressos, que é dada pela função $R(x) = P(x) \cdot x$, onde x é o número de convidados.

Qual é o número de convidados que a empresa deve ter para que a receita total seja igual ao custo total?

A) 70 B) 80 C) 87 D) 111 E) 122

QUESTÃO 05

Em uma competição de matemática, os estudantes precisam desvendar o valor de x em uma equação polinomial de 2º grau utilizando o método da fatoração. Dado que a equação é $(x^2 - 25) = 0$.

Qual é o valor do conjunto solução para x?
A) {5} B) {0, -25} C) { -5} D) { -5, 5} E) { -25, 25}

D26 - Relacionar as raízes de um polinômio com sua decomposição em fatores do 1º grau

EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM

- **Compreender** o conceito de raiz de um polinômio.
- **Decompor** polinômios em fatores do 1º grau, compreendendo como as raízes se relacionam com os coeficientes da equação, como indicado pelo teorema fundamental da álgebra.
- **Entender** como a multiplicidade das raízes afeta a fatoração e a decomposição em fatores do 1º grau, levando em conta o número de vezes que cada raiz se repete.

DETALHAMENTO DAS HABILIDADES

Com este descritor, visa-se o desenvolvimento da compreensão dos processos de fatoração de expressões algébricas, especialmente no contexto dos polinômios, perpassando por equações e funções polinomiais de 2º grau, ou que recaiam em uma equação ou função desse tipo. A fatoração é uma habilidade central na matemática, pois, ao decompor polinômios em fatores mais simples, o estudante não só facilita o processo de resolução das equações, mas também adquire a capacidade de compreender suas propriedades e aplicá-las em situações variadas, como problemas contextuais e desafios matemáticos.

Do ponto de vista pedagógico, a abordagem dessa habilidade deve ser orientada por práticas que integrem teoria e aplicação prática. Este aprendizado também envolve a construção de um raciocínio lógico e a habilidade de identificar e aplicar estratégias de fatoração em diferentes contextos. Ao elaborar e resolver problemas, o estudante não só desenvolve sua capacidade de resolver equações, mas também se prepara para utilizar a álgebra de maneira mais ampla, tornando-se apto a analisar, interpretar e intervir em situações que exigem pensamento crítico e habilidades matemáticas.

A seguir, é apresentada a habilidade da BNCC que melhor se relaciona ao que busca esse descritor, estando ligada às expectativas de aprendizagem elencadas para o descritor focal (D26):

- **EF09MA09:** Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau**.**

RESUMO TEÓRICO

DECOMPOSIÇÃO DE POLINÔMIOS EM FATORES

DO 1º GRAU

Definição de polinômio

Um polinômio é uma função do tipo

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Com $a_n \neq 0$, onde cada coeficiente a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ são constantes e n é definido como o grau do polinômio.

Exemplo: $Q(x) = 2x^5 - x^3 + 10x^2 + 3x - 1$

Raiz de um Polinômio

Tomando-se o polinômio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Define-se como raiz de $P(x)$ todo α se, e somente se, $P(\alpha) = 0$.

Obs.: Note que ao se igualar um polinômio a zero ele se transforma em uma equação polinomial.

$$P(x) = 0 \quad \rightarrow \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

Decomposição de um polinômio em fatores de 1º grau

Dado um polinômio $P(x)$, em sua forma genérica, com n raízes,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

podemos escrevê-lo como um produto de fatores do 1º grau na forma:

$$P(x) = a_n \,.\, (x - x_1).(x - x_2).(x - x_3). \ldots .(x - x_{n-1}).(x - x_n)$$

Onde x_1, x_2, x_3, ... , x_{n-1}, x_n são raízes da equação polinomial.

Exemplo: Seja o polinômio $P(x)$ de 3º grau, tal que suas raízes são $x_1 = 4$, $x_2 = -1$ e $x_3 = -2$, com $a = 1$. Sua forma fatorada é dada por:

$$P(x) = (x - 4).(x + 1).(x + 2)$$

Exemplo: Determine a forma fatorada do polinômio $R(x) = 2x^2 - 20x + 18$ em fatores de 1º grau.

Solução. Precisamos encontrar as raízes da equação

$$2x^2 - 20x + 18 = 0$$

Então, usando a fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau, temos:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \quad \rightarrow \quad \Delta = (-20)^2 - 4.2.18 \quad \rightarrow \quad \Delta = 400 - 144 \quad \rightarrow \quad \Delta = 256$$

Aplicando o valor de Δ para determinar as raízes:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \quad \rightarrow \quad x = \frac{-(-20) \pm \sqrt{256}}{2.2} \quad \rightarrow \quad x = \frac{20 \pm 16}{4}$$

Daí, segue que:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{20 + 16}{4} = \dfrac{36}{4} = 9 \\ x_2 = \dfrac{20 - 16}{4} = \dfrac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

Portanto, como $R(x)$ tem $a = 2$ e suas raízes são $x_1 = 9$ e $x_2 = 1$, sua fatoração em fatores de 1º grau é dada por:

$$R(x) = 2.(x-1).(x-9)$$

Exemplo: Determine a forma fatorada do polinômio $S(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ em fatores de 1º grau.

Solução. Precisamos encontrar as raízes da equação

$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$$

Primeiro, realizamos uma substituição de incógnita, fazendo $x^2 = y$. Com essa substituição, a equação passa a ser

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

Usando a fórmula resolutiva de uma equação do 2º grau, temos:

$$\Delta = b^2 - 4.a.c \quad \rightarrow \quad \Delta = (-5)^2 - 4.1.4 \quad \rightarrow \quad \Delta = 25 - 16 \quad \rightarrow \quad \Delta = 9$$

Aplicando o valor de Δ para determinar as raízes:

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} \quad \rightarrow \quad y = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2.1} \quad \rightarrow \quad y = \frac{5 \pm 3}{2}$$

Daí, segue que:

$$\begin{cases} y_1 = \dfrac{5 + 3}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ y_2 = \dfrac{5 - 3}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Agora que já encontramos os valores de y, que substituiu a incógnita x, podemos, enfim, determinar as raízes da equação inicial. Lembrando que fizemos $x^2 = y$, podemos substituir cada um dos dois valores encontrados para y, determinando os valores de x. Sendo assim,

Para $y = 1$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm\sqrt{1}$$

Para $y = 4$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x^2 = \pm 1 \qquad\qquad\qquad\qquad x^2 = \pm 2$$

Portanto, como $S(x)$ tem $a = 1$ e suas raízes são $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -2$ e $x_4 = 2$, sua fatoração em fatores de 1º grau é dada por:

$$S(x) = (x + 1).(x - 1).(x + 2).(x - 2)$$

Raízes múltiplas

Pode ocorrer que uma ou mais raízes sejam iguais, nesse caso, essas raízes são definidas como múltiplas.

Exemplo. Seja o polinômio $Q(x)$ definido por

$$Q(x) = (x - 1).(x - 1).(x - 2)(x - 2)(x - 2)(x + 4)$$

Note que a raiz $x = 1$ ocorre duas vezes e raiz $x = 2$ ocorre três vezes. A quantidade de vezes que uma raiz ocorre entre as raízes de uma equação polinomial determina a multiplicidade dessa raiz. Neste exemplo, a raiz $x = 1$ tem multiplicidade 2, enquanto a raiz $x = 2$ tem multiplicidade 3. No caso da raiz $x = -4$, sua multiplicidade é 1, pois ocorre uma única vez.

Aplicações no cotidiano

1. Engenharia e Construção

Aplicação: Cálculo de estruturas, como pontes ou edifícios.

Como se aplica: As equações que descrevem a resistência ou o comportamento estrutural muitas vezes são polinômios. Encontrar suas raízes ajuda a prever pontos de falha, equilíbrio ou instabilidade.

2. Economia e Finanças

Aplicação: Lucro e ponto de equilíbrio (break-even).

Como se aplica: Um modelo de lucro pode ser expresso como um polinômio. As raízes indicam os pontos onde o lucro é zero — ou seja, os valores críticos para tomada de decisão.

3. Física e Movimento

Aplicação: Trajetória de projéteis.
Como se aplica: A equação da altura de um objeto lançado pode ser um polinômio do 2º grau. Suas raízes indicam o instante em que o objeto toca o solo.

4. Tecnologia e Computação

Aplicação: Análise de algoritmos ou sinais digitais.

Como se aplica: Muitos algoritmos de processamento de sinais ou gráficos usam polinômios. Suas raízes estão associadas a frequências, ruídos ou padrões a serem eliminados ou otimizados.

5. Agricultura e Meio Ambiente

Aplicação: Modelos de crescimento de plantações.

Como se aplica: A produtividade pode ser modelada com polinômios. As raízes indicam momentos de transição no ciclo de crescimento (ex: quando a produção começa ou termina).

ATIVIDADES PROPOSTAS

QUESTÃO 01

Observe o polinômio representado no quadro abaixo.

$$p(x) = x\,.(x - 4).(x + 3)$$

Quais são as raízes desse polinômio?

A) – 6, – 1 e 1
B) – 3, 0 e 2
C) – 3 e 0
D) – 3 e 4
E) 0, 4 e – 3

QUESTÃO 02

As raízes de um polinômio q(x) de terceiro grau são - 5, - 2 e 1.

A expressão que pode representar a forma fatorada desse polinômio é

A) $q(x) = (x + 5).(x + 2).(x - 1)$.
B) $q(x) = (x + 5).(x + 1).(x - 2)$.
C) $q(x) = (x + 5).(x - 1).(x - 2)$.
D) $q(x) = (x - 5).(x - 1).(x + 2)$.
E) $q(x) = (x - 3).(x - 1).(x - 2)$.

QUESTÃO 03

Fatorando-se o polinômio $P(x) = x^2 - 6x + 9$, obtém-se:

A) $P(x) = (x - 3)(x - 3)$
B) $P(x) = (x - 3)(x - 2)$
C) $P(x) = (x - 2)(x - 4)$
D) $P(x) = (x + 3)(x + 3)$
E) $P(x) = (x - 3)(x + 3)$

QUESTÃO 04

Jacob comprou uma casa que está construída em um terreno retangular de 150 m² de área. O polinômio obtido em função da área é $A(x) = x^2 + 5x - 150$.

Decompondo o polinômio $A(x) = x^2 + 3x - 150$ em fatores do 1º grau, obtemos $(x + 15)(x - 10)$. As raízes do polinômio são:

A) 1 e 2.

B) 2 e – 255

C) –15 e 10

D) 15 e 20

E) 15 e -17.

QUESTÃO 05

Considere a forma fatorada do polinômio p(x) representado abaixo.

$$\mathbf{p(x) = x \cdot (x - 2) \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 4)}$$

Quais são as raízes desse polinômio?

A) – 2, 0, 1, e 2.
B) – 3, 1 e 2.
C) – 3, 1 e 4.
D) – 2, – 1, e 3.
E) 2, 0, 1 e – 4.

D25 - Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do 2º grau.

D20 - Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.

18ª SEMANA

18ª SEMANA
18ª SEMANA
18ª SEMANA

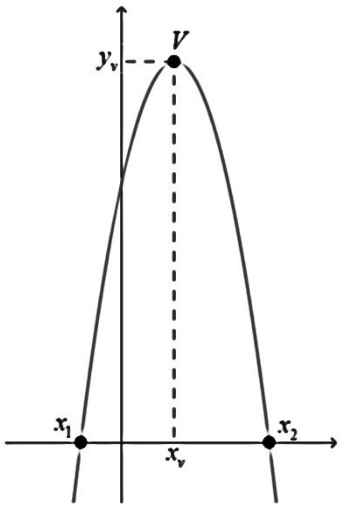
- **EM13MAT503:** Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais..

RESUMO TEÓRICO

PONTO DE MÁXIMO E DE MÍNIMO EM UMA FUNÇÃO POLINOMIAL DO 2º GRAU

Vértice da parábola

O vértice de uma parábola é o ponto $V = (x_V, y_V)$, que determina a mudança de crescimento para decrescimento ou vice-versa, conforme é indicado na figura ao lado. Por essa razão, ele determina ainda o eixo de simetria da parábola.



Para determinar o vértice de uma parábola, podemos determinar suas coordenadas x_V e y_V pelas fórmulas:

$$x_V = -\frac{b}{2.a} \qquad\qquad y_V = -\frac{\Delta}{4.a}$$

Onde $\Delta = b^2 - 4.a.c$ e a, b e c são os coeficientes da função dada.

Exemplos.

a) Determine o vértice da função $f(x) = 3x^2 - 12x + 10$.

Solução. Na lei da função, $a = 3$, $b = -12$ e $c = 10$. Substituindo nas fórmulas,

$$x_V = -\frac{b}{2.a} \quad \rightarrow \quad x_V = -\frac{-12}{2\ .\ 3} \quad \rightarrow \quad x_V = \frac{12}{6} \quad \rightarrow \quad x_V = 2$$

e

$$y_V = -\frac{\Delta}{4.a} \quad \rightarrow \quad y_V = -\frac{(-12)^2 - 4.3.10}{4\ .\ 3} \quad \rightarrow \quad y_V = -\frac{144 - 120}{12} \quad \rightarrow \quad y_V = -2$$

Observação.

- Quando a parábola possui duas raízes reais distintas, o x_V será a média aritmética das raízes. E quando possui duas raízes reais iguais, a raiz será exatamente o x_V.
- Quando já se tem o valor do x_V, então $y_V = f(x_V)$.

Máximos e mínimos de uma função quadrática

O vértice de uma função, dependendo da concavidade da parábola que a representa graficamente, corresponde ao ponto de **máximo** ou de **mínimo** da função.

- Se $a > 0$, o vértice V é chamado de ponto mínimo da função.
- Se $a < 0$, o vértice V é chamado de ponto máximo da função.

Esse conceito de ponto máximo ou mínimo de uma parábola pode ser aplicado em situações cujo objetivo é saber o valor máximo ou mínimo em uma relação. É importante ressaltar que uma parábola não pode ter ponto máximo e mínimo ao mesmo tempo. Se ela possui ponto máximo, então certamente não terá ponto mínimo. Da mesma maneira que, se tiver ponto mínimo, não terá, então, ponto máximo.

Note que o x_V é o valor que temos que ter para atingir o valor máximo ou mínimo da função. Já o y_V é o valor máximo ou o mínimo propriamente dito.

Exemplo. Considere a função $f(x) = -x^2 + 12x$, em que f fornece o lucro de uma empresa, em milhares, a partir de x milhares de peças vendidas de seu produto.

(A) Qual o número de peças que devem ser vendidas para atingirmos o lucro máximo?

Solução. O número de peças que devem ser vendidas para atingirmos o lucro máximo é dado por

$$x_V = -\frac{b}{2.a} \quad \rightarrow \quad x_V = -\frac{12}{2\,.\,(-1)} \quad \rightarrow \quad x_V = -\frac{12}{-2} \quad \rightarrow \quad x_V = 6$$

Ou seja, o lucro máximo ocorre quando são vendidas 6000 peças.

(B) Qual o lucro máximo obtido por essa empresa?

Solução. O lucro máximo é obtido por

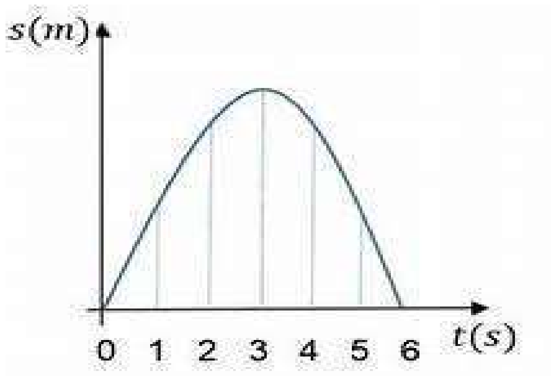
$$y_V = -\frac{\Delta}{4.a} \quad \rightarrow \quad y_V = -\frac{12^2 - 4.(-1).0}{4\,.\,(-1)} \quad \rightarrow \quad y_V = -\frac{144}{-4} \quad \rightarrow \quad y_V = 36$$

Ou seja, é igual a R\$36.000,00 (36 milhares de reais). Outra forma de determinar o lucro máximo é por $f(6)$.

ATIVIDADES PROPOSTAS

QUESTÃO 01

O gráfico a seguir representa a trajetória de um móvel, a função que representa esse gráfico é S(t) = – t² + 6t.



Fonte: cursoenemgratuito.com.br

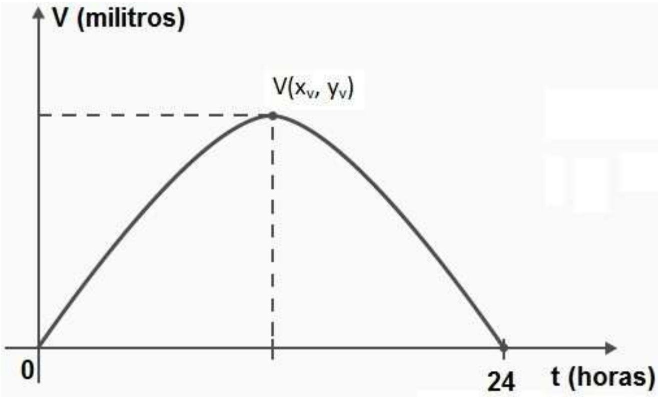
A altura máxima atingida por esse móvel é igual a

A) 3 m

B) 6 m
C) 9 m
D) 12 m
E) 15 m

QUESTÃO 02

A capacidade (V), em mililitros (mL), em um reservatório de água varia em função do tempo (t), em horas, conforme representado no gráfico da função quadrática a seguir.



Fonte: Blogue do professor Warles

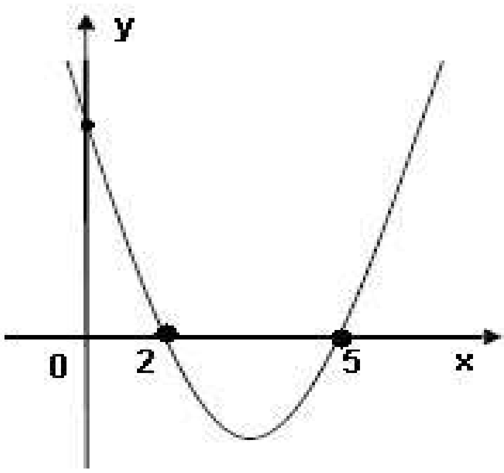
A fórmula que representa esse gráfico é $V(t) = -t^2 + 24t$

De acordo com esse gráfico, a capacidade máxima desse reservatório é igual a

A) 144 mL.
B) 168 mL.
C) 200 mL.
D) 244 mL.
E) 288 mL.

QUESTÃO 03

A temperatura, em graus centígrados, no interior de uma câmara, é dada por $y = x^2 - 7x + 8$, onde x é medido em horas, essa temperatura está representada no gráfico a seguir.



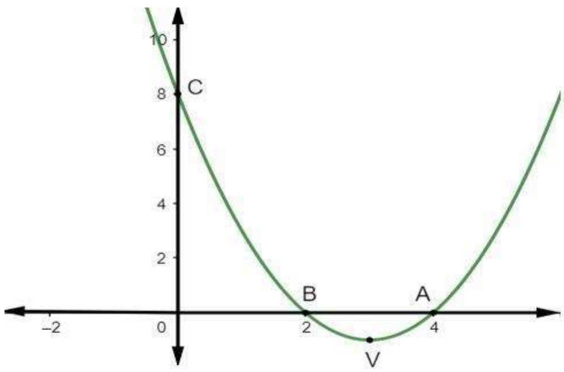
Fonte: Blogue do professor Warles

Nessas condições, a temperatura mínima, em (°C), é:

A) – 2,15
B) – 3,15
C) – 4,25
D) – 5,25
E) – 5,65

QUESTÃO 04

O professor Jacob fez o gráfico de uma função polinomial do 2° grau, conforme figura a seguir.

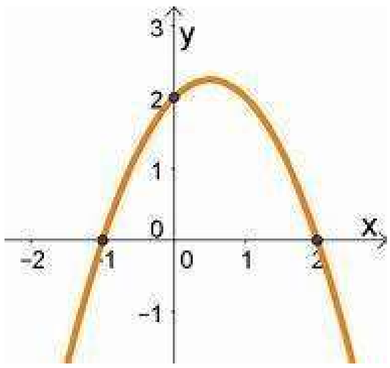


Nesse gráfico, as coordenadas do vértice são:

A) (2, 4).
B) (2, 8).
C) (3, – 1).
D) (– 3, 1).
E) (0, 8).

QUESTÃO 05

O professor Gesson fez o gráfico de uma função polinomial do 2° grau, conforme figura a seguir.



Nesse gráfico, as coordenadas do vértice são:

A) (0,5; 2,25)
B) (0,5; 1,25)
C) (0,2; 2,25)
D) (0,3; 3,25)
E) (0,5; 5,25)

D20 - Analisar crescimento/decrescimento, zeros de funções reais apresentadas em gráficos.

EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM

- Realizar pesquisas, organizar dados em gráficos e apresentar resultados
- Compreender funções como relações de dependência entre variáveis e utilizar esse conceito para analisar situações
- Analisar gráficos divulgados pela mídia, identificando elementos que podem induzir erros de leitura
- Planejar e executar pesquisas amostrais, comunicar os resultados por meio de gráficos
- Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados

DETALHAMENTO DAS HABILIDADES

EM13MAT301: Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

EM13MAT302: Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

O descritor D20 da BNCC avalia a capacidade de analisar o crescimento, decrescimento e zeros de funções reais apresentadas em gráficos.
Como são as questões do descritor D20?

- As questões associadas ao descritor D20 analisam aspectos de funções representadas em gráficos
- Os gráficos mostram variações de grandezas como velocidade, temperatura, participação no PIB em diferentes períodos de tempo

Em Geografia
EF08GE03: Analisar aspectos representativos da dinâmica demográfica, considerando características da população (perfil etário, crescimento vegetativo e mobilidade espacial).

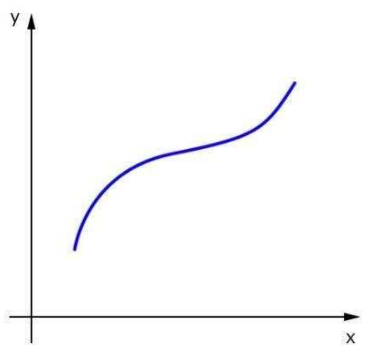
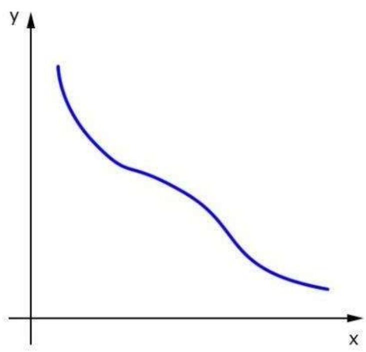
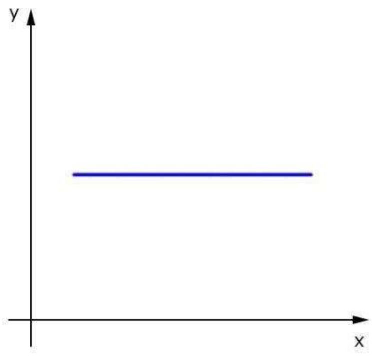
RESUMO TEÓRICO

CRESCIMENTO/DECRESCIMENTO, ZEROS DE FUNÇÕES REAIS

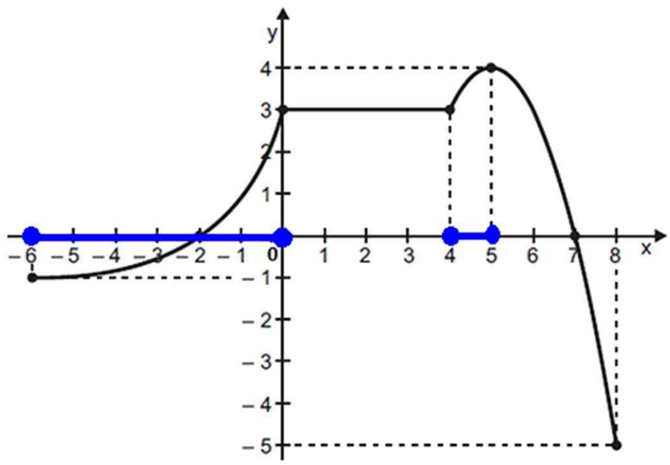
A Importância dos Gráficos e da Interpretação de Dados no Cotidiano e na Ciência
Os gráficos são ferramentas essenciais para organizar, visualizar e interpretar dados em diversas áreas do conhecimento. Seja no cotidiano, em pesquisas científicas ou em processos de tomada de decisão, a capacidade de compreender e analisar informações gráficas é fundamental para uma visão mais clara e objetiva da realidade.

O que é uma Função Matemática?
Função é uma regra que relaciona cada elemento de um conjunto (representado pela variável x – domínio da função) a um único elemento de outro conjunto (representado pela variável y - imagem da função). Para cada valor de x, podemos determinar um valor de y, dizemos então que “y está em função de x”.

Crescimento, Decrescimento e Constante
De modo intuitivo, dizemos que uma função é crescente quando o seu gráfico, quando olhado da esquerda para a direita, sempre “sobe”; a função é dita decrescente quando o gráfico, observado da esquerda para a direita, “desce”. Caso nenhuma dessas duas condições ocorra, dizemos que a função é constante e o seu gráfico será horizontal.

Ex$_1$: Função Crescente	**Ex**$_2$:Função Crescente	**Ex**$_3$:Função Constante
		

Ex$_4$:Vejamos o gráfico da função $f(x) = -3x^5 + 5x^3$ a seguir:

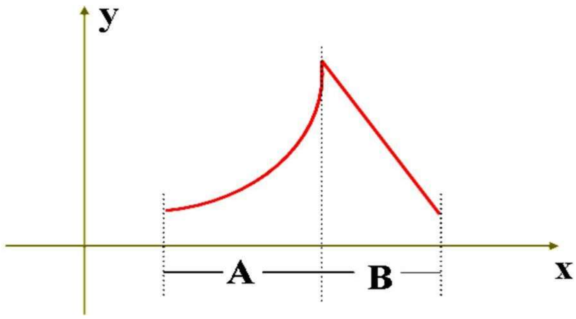


Perceba o comportamento da função, de acordo com os intervalos, ao longo do eixo das abscissas

a) em] – ∞; 0 [a função é crescente;
b) em] 0; 4 [a função é constante;
c) em] 4; 3 [a função é crescente;
d) em] 5; + ∞ [a função é decrescente.

Generalizando

Considere a função definida pelo gráfico



I. Observe que, no intervalo **A**, aumentando o valor de **x,** aumenta também o valor de **y**. Dizemos então que a função é **crescente** no intervalo **A**.

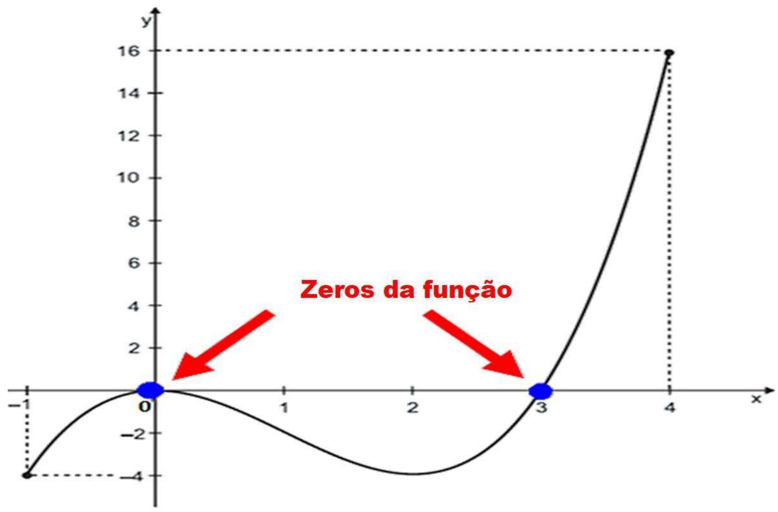
II. No intervalo **B**, aumentando o valor de **x,** diminui o valor de **y**. Dizemos então que a função é **decrescente** no intervalo **B**.

Logo, em resumo, por definição:

Sendo x_1 e x_2 elementos quaisquer de um conjunto $A \subset D(f)$, com $x_1 < x_2$, diz-se que a função é crescente em A se $f(x_1) < f(x_2)$ e decrescente se $f(x_1) > f(x_2)$.

Zeros de Funções

Os zeros de uma função real são os valores de x que fazem com que a função seja igual a zero. No gráfico, os zeros de uma função são os pontos onde a curva intercepta o eixo x.



Como encontrar os zeros de uma função?

- Desenhar o gráfico da função e observar em que ponto ele toca o eixo x
- Fazer y = 0 e descobrir o valor de x relacionado a ele
- Resolver a equação f(x) = 0
- O zero de uma função também é chamado de raiz da função.
- Exemplos

  Na função polinomial do primeiro grau, o zero é o ponto de encontro entre a função e o eixo Ox;

  Na função quadrática, os zeros são as raízes da equação de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$.

Definição Formal

Um número real ξ (csi) é um zero da função f(x) ou uma raiz da equação f(x) = 0 se f(ξ) = 0.

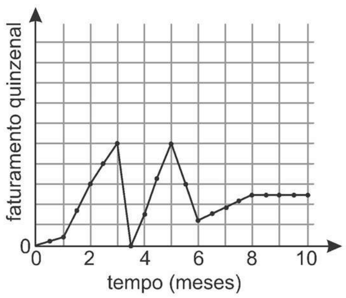
ATIVIDADES PROPOSTAS

QUESTÃO 01

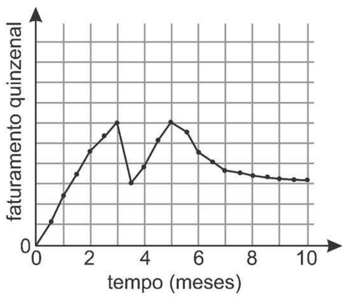
(Fuvest) Um dono de restaurante assim descreveu a evolução do faturamento quinzenal de seu negócio, ao longo dos dez primeiros meses após a inauguração: “Até o final dos três primeiros meses, tivemos uma velocidade de crescimento mais ou menos constante, quando então sofremos uma queda abrupta, com o faturamento caindo à metade do que tinha sido atingido. Em seguida, voltamos a crescer, igualando, um mês e meio depois dessa queda, o faturamento obtido ao final do terceiro mês. Agora, ao final do décimo mês, estamos estabilizando o faturamento em um patamar 50% acima do faturamento obtido ao final do terceiro mês”.

Considerando que, na ordenada, o faturamento quinzenal está representado em unidades desconhecidas, porém uniformemente espaçadas, qual dos gráficos é compatível com a descrição do comerciante?

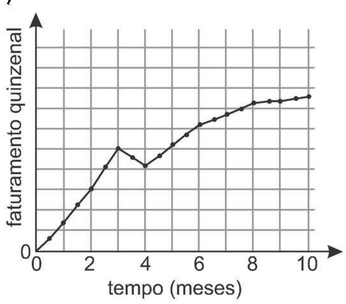
a)



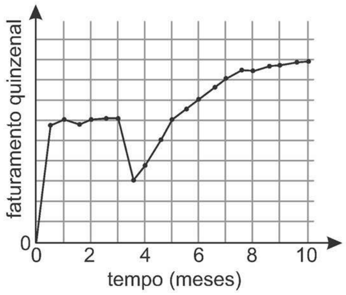
b)



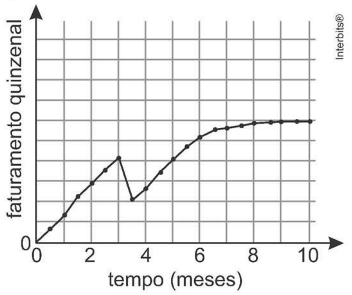
c)



d)



e)

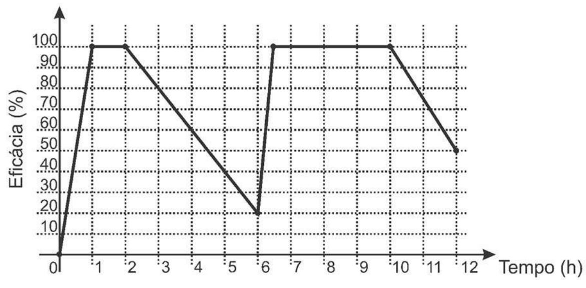


QUESTÃO 02

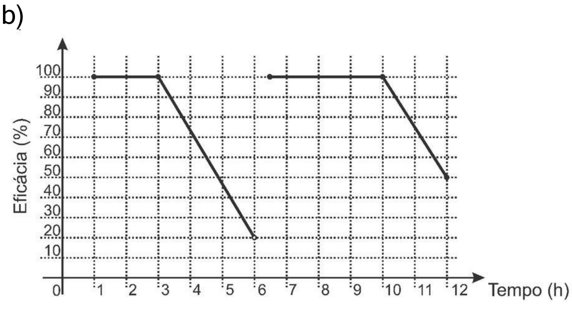
(Enem 2ª aplicação) Uma empresa farmacêutica fez um estudo da eficácia (em porcentagem) de um medicamento durante $12\ h$ de tratamento em um paciente. O medicamento foi administrado em duas doses, com espaçamento de $6\ h$ entre elas. Assim que foi administrada a primeira dose, a eficácia do remédio cresceu linearmente durante $1\ h$, até atingir a máxima eficácia (100%), e permaneceu em máxima eficácia durante $2\ h$. Após essas $2\ h$ em que a eficácia foi máxima, ela passou a diminuir linearmente, atingindo 20% de eficácia ao completar as $6\ h$ iniciais de análise. Nesse momento, foi administrada a segunda dose, que passou a aumentar linearmente, atingindo a máxima eficácia após $0{,}5\ h$ e permanecendo em 100% por $3{,}5\ h$. Nas horas restantes da análise, a eficácia decresceu linearmente, atingindo ao final do tratamento 50% de eficácia.

Considerando as grandezas tempo (em hora), no eixo das abscissas; e eficácia do medicamento (em porcentagem), no eixo das ordenadas, qual é o gráfico que representa tal estudo?

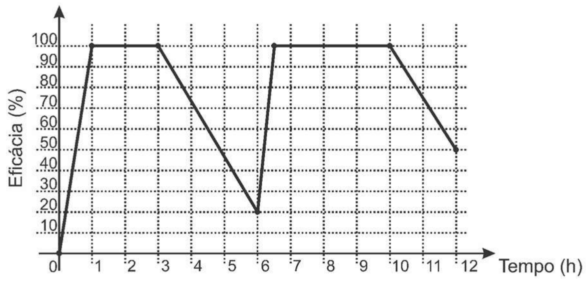
a)



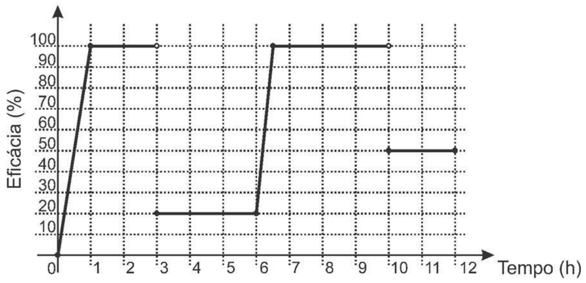
b)



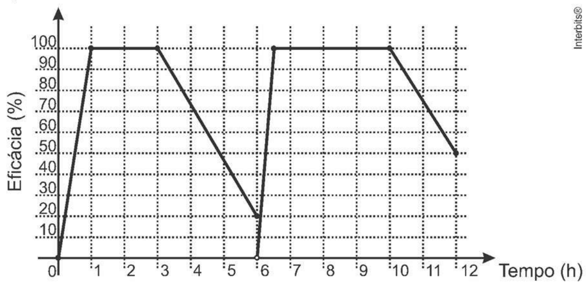
c)



d)



e)

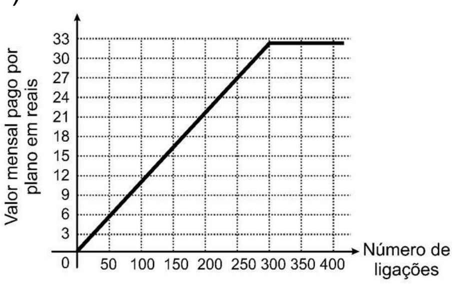


QUESTÃO 03

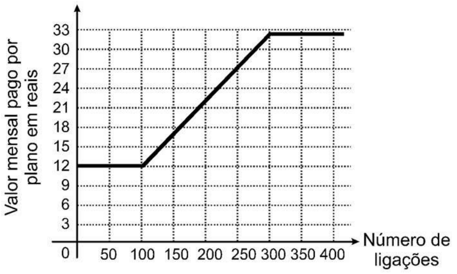
(Enem) Após realizar uma pesquisa de mercado, uma operadora de telefonia celular ofereceu aos clientes que utilizavam até 500 ligações ao mês o seguinte plano mensal: um valor fixo de R$ 12,00 para os clientes que fazem até 100 ligações ao mês. Caso o cliente faça mais de 100 ligações, será cobrado um valor adicional de R$ 0,10 por ligação, a partir da 101ª até a 300ª; e caso realize entre 300 e 500 ligações, será cobrado um valor fixo mensal de R$ 32,00.

Com base nos elementos apresentados, o gráfico que melhor representa a relação entre o valor mensal pago nesse plano e o número de ligações feitas é:

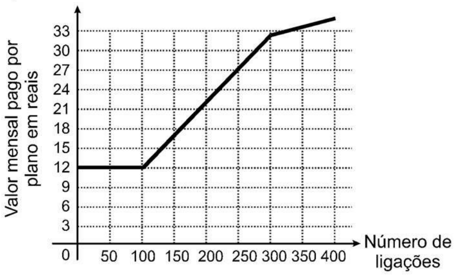
a)



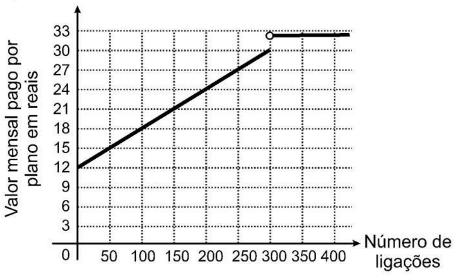
b)



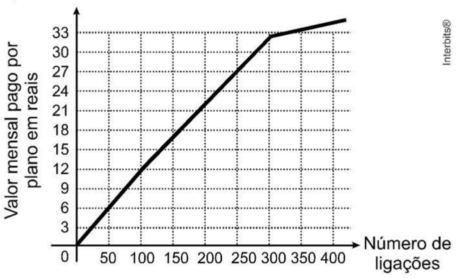
c)



d)



e)

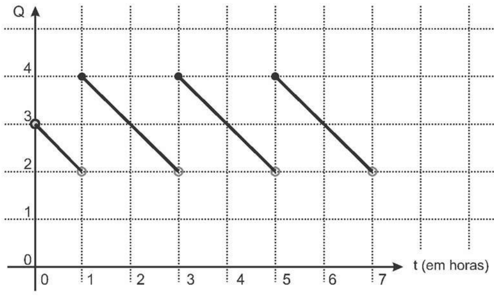


QUESTÃO 04

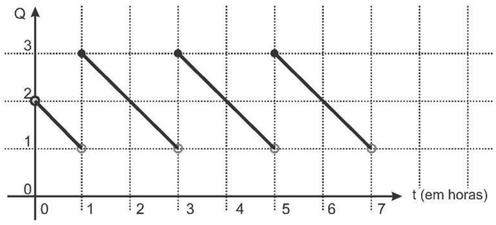
(Enem 2ª aplicação) Um paciente inicia um tratamento em que deve ingerir uma dose de um determinado remédio a cada duas horas. Ao ingerir essa dose, a quantidade Q de uma substância no seu organismo aumenta instantaneamente em 2 unidades. Nas próximas duas horas, essa quantidade decresce de maneira linear até atingir a quantidade existente no momento imediatamente anterior à ingestão do remédio. Por descuido, esse paciente tomou a segunda dose do remédio uma hora depois da primeira. A partir daí, não cometeu mais esse tipo de engano, tomando o remédio a cada duas horas. Antes da primeira dose, a quantidade da substância na corrente sanguínea do paciente era de 1 unidade.

O gráfico que melhor representa a quantidade da substância no organismo do paciente nas sete primeiras horas do tratamento é

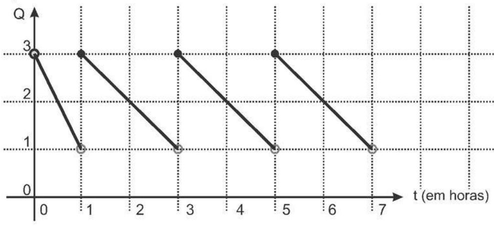
a)



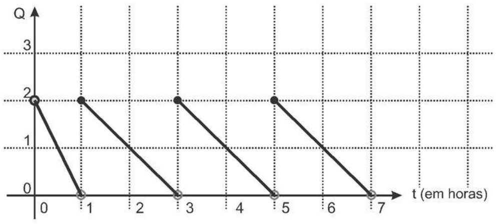
b)



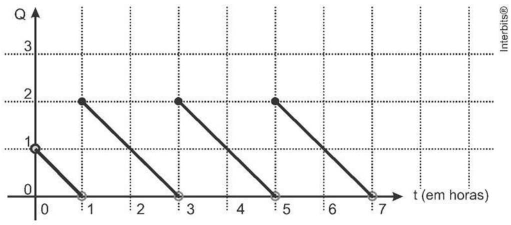
c)



d)

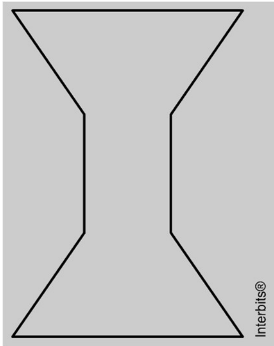


e)



QUESTÃO 05

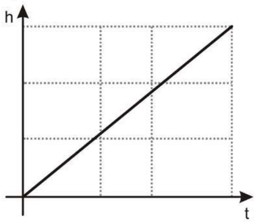
(Enem) Para comemorar o aniversário de uma cidade, um artista projetou uma escultura transparente e oca, cujo formato foi inspirado em uma ampulheta. Ela é formada por três partes de mesma altura: duas são troncos de cone iguais e a outra é um cilindro. A figura é a vista frontal dessa escultura.



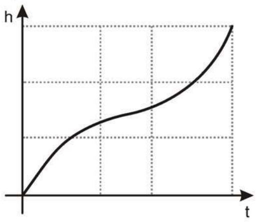
No topo da escultura foi ligada uma torneira que verte água, para dentro dela, com vazão constante.

O gráfico que expressa a altura (h) da água na escultura em função do tempo (t) decorrido é

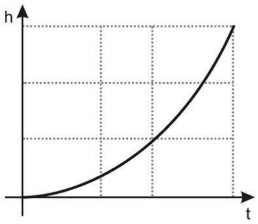
a)



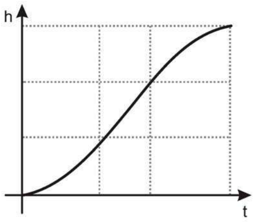
b)



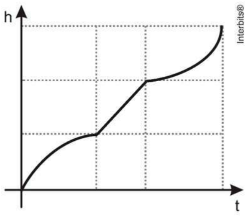
c)



d)



e)



QUINZENA 10

D27 - Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.

D29 - Resolver problema que envolva função exponencial.

19ª SEMANA

19ª SEMANA
19ª SEMANA
19ª SEMANA

D27 - Identificar a representação algébrica e/ou gráfica de uma função exponencial.

EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM

- Utilizar as propriedades de potenciação para estabelecer igualdade entre potências, ou seja, determinar a solução da equação exponencial com equivalências de bases das potências;
- Compreender o comportamento gráfico da função exponencial, crescimento ou decrescimento, para resolução de problemas exponenciais;
- Ler e interpretar informações em um gráfico exponencial para resolver situação problema;
- Modelar uma função exponencial através de um gráfico;
- Aplicar conceitos e propriedades de equações/funções exponenciais em áreas do conhecimento como Matemática financeira, reprodução de cultura de bactérias, crescimento populacional, decaimento radioativo, etc.

DETALHAMENTO DAS HABILIDADES

EM13MAT304: Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

A função exponencial é um conceito matemático que se baseia em uma base fixa elevada a uma variável. É um conceito fundamental na educação matemática, especialmente em contextos de crescimento e decaimento.

Para resolver problemas com funções exponenciais, é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas relacionados as propriedades de potenciação.

Exemplos de problemas com funções exponenciais Crescimento populacional, Juros compostos, Investimentos.

Atividades para resolver problemas com funções exponenciais

- **Resolver** problemas práticos utilizando a função exponencial
- **Interpretar** gráficos de funções exponenciais
- **Comparar** entre funções exponenciais com diferentes bases
- **Analisar** gráficos de funções exponenciais, destacando o crescimento e a decrescimento dessas funções

RESUMO TEÓRICO

REPRESENTAÇÕES ALGÉBRICA E GRÁFICA DE UMA FUNÇÃO EXPONENCIAL

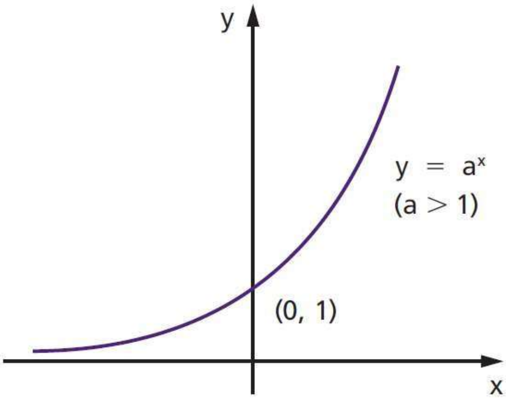
Introdução

A função exponencial tem sua importância para a sociedade, já que é possível descrever modelar comportamentos de diversos fenômenos, como crescimento populacional, comportamento de epidemias, juros compostos, decaimento radioativo, proporção de desmatamento na Amazônia, entre outros.

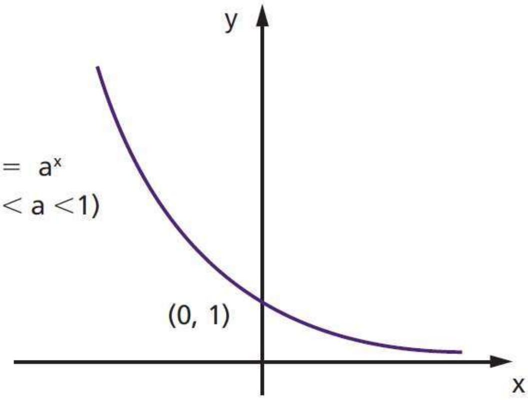
Função Exponencial

Chama-se função exponencial qualquer função $f: IR \rightarrow IR^*_+$ dada por uma lei da forma **$f(x) = a^x$**, em que **a** é um número real dado, a > 0 e a ≠ 1.

A curva exponencial, possui dois comportamentos



Função crescente



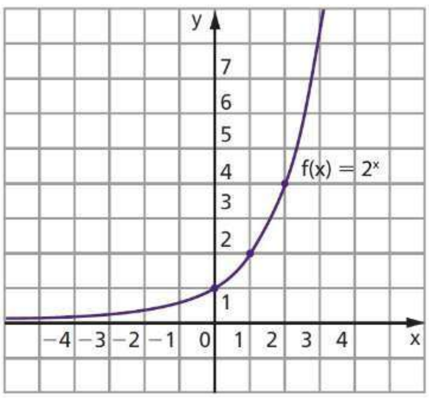
Função decrescente

Domínio: D(f) = IR

Imagem: Im(f) = IR^*_+

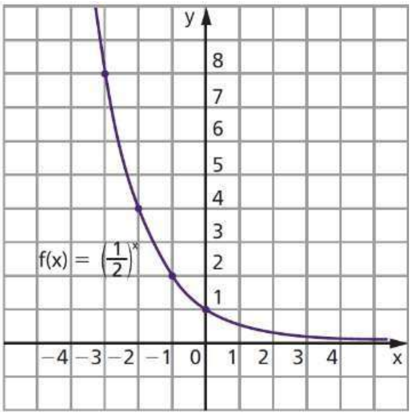
Exemplo 1: Construir o gráfico da função exponencial $f(x) = 2^x$.

x	$y = 2^x$
−3	$\frac{1}{8}$
−2	$\frac{1}{4}$
−1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



Exemplo 2: Construir o gráfico da função exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

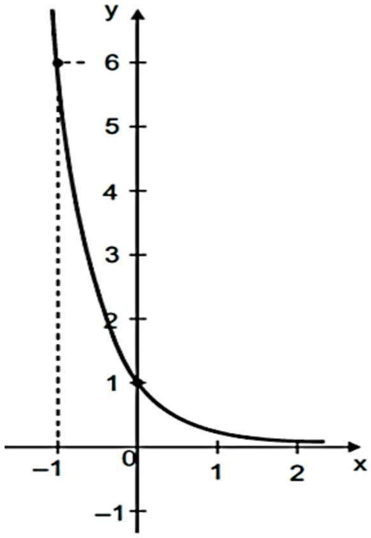
x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
−3	8
−2	4
−1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



ATIVIDADES PROPOSTAS

QUESTÃO 01

(SEAPE) Observe abaixo o gráfico de uma função exponencial f: IR □ IR$_+^*$.



A lei de formação, que descreve esse gráfico, é

a) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+1}$

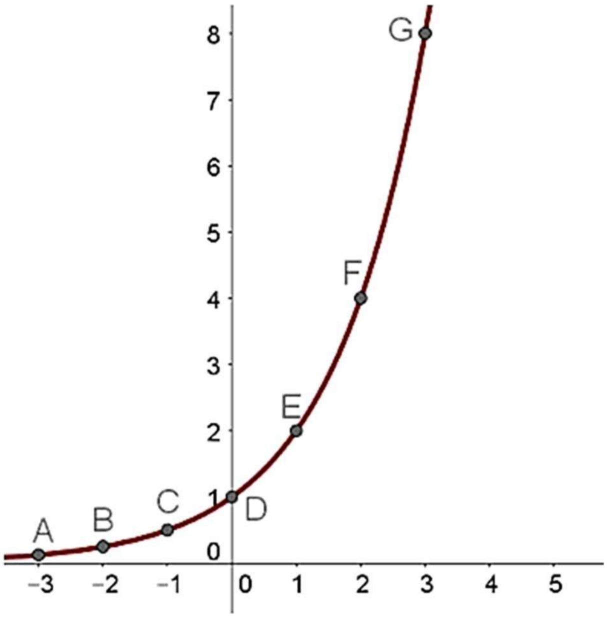
c) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x + 1$

d) $f(x) = 6^x$

e) $f(x) = 6^{x+1}$

QUESTÃO 02

Um biólogo está estudando uma cultura de bactérias que se reproduzem de formal exponencial. Em seu laboratório, com seus experimentos, foi elaborado um gráfico, representado pela imagem a seguir, descrevendo a reprodução dessas bactérias, através dos parâmetros A, B, C, D, E, F e G, pontos de referências.



Baseado no gráfico, a lei de formação que descreve esse crescimento de bactérias é

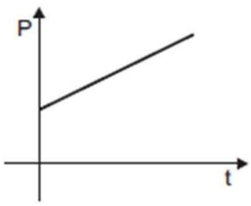
a) $f(x) = 2.x$
b) $f(x) = x^2$
c) $f(x) = 2^X - 1$
d) $f(x) = 2^X$
e) $f(x) = 3.2^X$

QUESTÃO 03

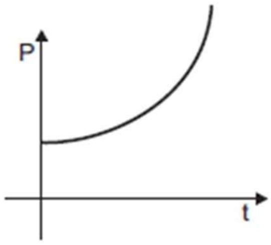
(Cesgranrio) A população P de certa cidade cresce de acordo com a função $P(t) = 56000.(1{,}01)^t$, onde t significa o tempo, em anos.

Qual o gráfico que melhor representa essa função?

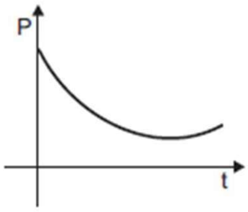
a)



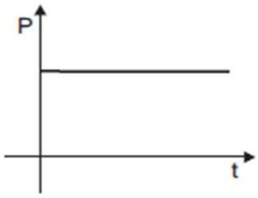
b)



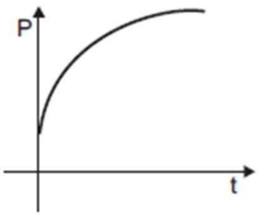
c)



d)

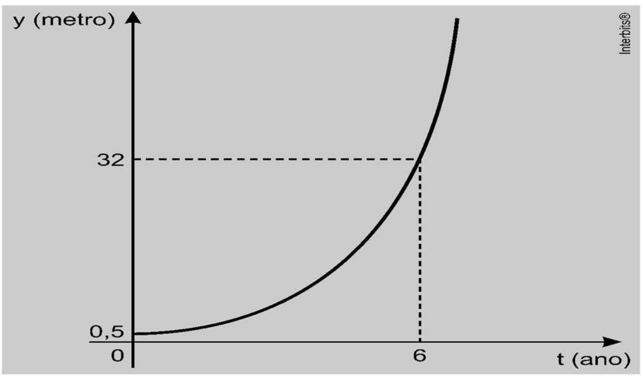


e)



QUESTÃO 04

(Enem 2ª aplicação / Adaptada) Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, na qual y representa a altura da planta em metro, “t” é considerado em ano, e “a”, base da exponencial, é uma constante maior que 1.



(O gráfico representa a função y descrita)

Admita ainda que y(0) fornece a altura da muda quando plantada.

De acordo com o exposto, a função que poderá representar é

a) $y = 2^{t}$.
b) $y = 2^{-t}$.
c) $y = 3^{-t}$.
d) $y = 2^{t-1}$.
e) $y = 3^{-t-1}$.

QUESTÃO 05

(SAEPE) Em um experimento de laboratório, uma equipe de pesquisadores observou, durante um certo período, a evolução da população de um insetos, fazendo a contagem da quantidade de insetos a cada semana.

O quadro abaixo mostra o resultado desse experimento.

Semana	População
0	1 000
1	2 000
2	4 000
3	8 000
4	16 000

A partir da observação desse quadro, verificou-se que essa evolução pode ser modelada pela função $y = 1000.2^{x}$, em que y representa a população de insetos e x o número de semanas decorridas desde o início do experimento.

O gráfico que corresponde à evolução descrita nesse experimento é

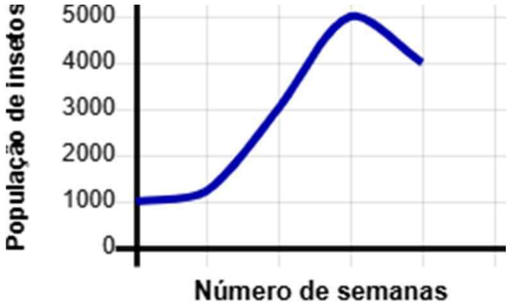
a)

b)

c)

d)

e)



D29 - Resolver problema que envolva função exponencial.

EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM

- Utilizar as propriedades de potenciação para estabelecer igualdade entre potências, ou seja, determinar a solução da equação exponencial com equivalências de bases das potências;
- Compreender o comportamento gráfico da função exponencial, crescimento ou decrescimento, para resolução de problemas exponenciais;
- Ler e interpretar informações em um gráfico exponencial para resolver situação problema;
- Modelar uma função exponencial através de um gráfico;
- Aplicar conceitos e propriedades de equações/funções exponenciais em áreas do conhecimento como Matemática financeira, reprodução de cultura de bactérias, crescimento populacional, decaimento radioativo, etc.

DETALHAMENTO DAS HABILIDADES

EM13MAT304: Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

A função exponencial é um conceito matemático que se baseia em uma base fixa elevada a uma variável. É um conceito fundamental na educação matemática, especialmente em contextos de crescimento e decaimento.

Para resolver problemas com funções exponenciais, é necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas relacionados as propriedades de potenciação.

Exemplos de problemas com funções exponenciais Crescimento populacional, Juros compostos, Investimentos.

Atividades para resolver problemas com funções exponenciais

- **Resolver** problemas práticos utilizando a função exponencial
- **Interpretar** gráficos de funções exponenciais
- **Comparar** entre funções exponenciais com diferentes bases
- **Analisar** gráficos de funções exponenciais, destacando o crescimento e a decrescimento dessas funções

RESUMO TEÓRICO

EXPONENCIAL: FUNÇÃO E EQUAÇÃO

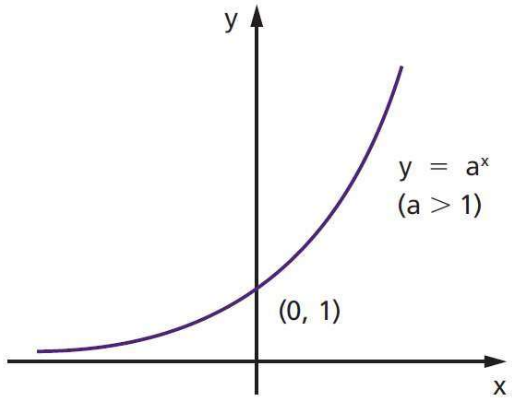
Introdução

A função exponencial tem sua importância para a sociedade, já que é possível descrever modelar comportamentos de diversos fenômenos, como crescimento populacional, comportamento de epidemias, juros compostos, decaimento radioativo, proporção de desmatamento na Amazônia, entre outros.

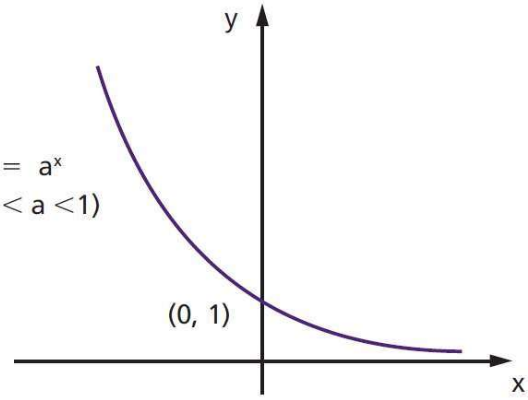
Função Exponencial

Chama-se função exponencial qualquer função $f: IR \rightarrow IR^*_+$ dada por uma lei da forma **f(x) = a^{x}**, em que **a** é um número real dado, a > 0 e a ≠ 1.

A curva exponencial, possui dois comportamentos



Função crescente



Função decrescente

Domínio: D(f) = IR

Imagem: Im(f) = IR_{+}^{*}

Equação Exponencial

Equações exponenciais são equações com incógnita no expoente.

$$a^b = a^c \Leftrightarrow b = c, \ \forall\ 0 < a \neq 1$$

Um método comum é a redução a uma base comum, ou seja, quando ambos os membros da equação exponencial, com devidas transformações baseadas nas propriedades de potência, forem redutíveis a potências de mesma base, sendo a > 0 e a ≠ 1.

ATIVIDADES PROPOSTAS

QUESTÃO 01

(Uema) Numa concessionária de caminhões zero, o vendedor informou ao comprador que a lei matemática que permite estimar a depreciação do veículo comprado é $v(t) = 65000 \cdot 4^{-0,04t}$, em que v(t) é o valor, em reais, do caminhão, t anos após a aquisição como zero na concessionária.

Segundo a lei da depreciação indicada, o caminhão valerá um oitavo do valor de aquisição com

a) 37,5 anos.
b) 27,5 anos.
c) 25 anos.
d) 8 anos.
e) 7,5 anos.

QUESTÃO 02

(Uerj) Diferentes defensivos agrícolas podem intoxicar trabalhadores do campo. Admita uma situação na qual, quando intoxicado, o corpo de um trabalhador elimine, de modo natural, a cada 6 dias, 75% da quantidade total absorvida de um agrotóxico. Dessa forma, na absorção de 50 mg desse agrotóxico, a quantidade presente no corpo será dada por:

$$V(t) = 50 \times (0,25)^{\left(\frac{t}{6}\right)} \text{ miligramas}$$

Assim, o tempo t, em dias, necessário para que a quantidade total desse agrotóxico se reduza à 25 mg no corpo do trabalhador é igual a

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

QUESTÃO 03

(G1 - ifpe) Em uma pesquisa feita por alguns alunos do curso de Zootecnia, na disciplina de Avicultura, ofertada pelo IFPE campus Vitória de Santo Antão, observou-se que, para o ano de 2015, o comportamento das variáveis das condições de ofertas de insumos e produção avícola na Região Sul foi baseado em equações de regressão exponencial. Considere $A(t) = 5 \cdot e^{0,04t}$ a equação de regressão aproximada, com A sendo a área plantada, em (ha), e t o tempo, em anos. (considere $e^{0,2} \cong 1,2$)

Admitindo o ano de 2015 como t = 0, a área em 2020 será de

a) 10,4 hectares.
b) 10 hectares.
c) 8,6 hectares.
d) 8 hectares.
e) 6 hectares.

QUESTÃO 04

(Usf) Em um experimento, o número de bactérias presentes nas culturas A e B, no instante t, em horas, é dado, respectivamente, por: $A(t) = 10 \cdot 2^{t-1} + 238$ e $B(t) = 2^{t+2} + 750.$

De acordo com essas informações, o tempo decorrido, desde o início desse experimento, necessário para que o número de bactérias presentes na cultura A seja igual ao da cultura B é

a) 5 horas.
b) 6 horas.

D32 - Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples..

D33 - Calcular a probabilidade de um evento.

20ª SEMANA

20ª SEMANA
20ª SEMANA
20ª SEMANA

D32 - Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples.

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAGEM

- **Compreender** e **aplicar** o princípio multiplicativo na resolução de problemas que envolvem contagem de possibilidades em diferentes situações.
- **Distinguir** e **utilizar** corretamente permutação simples, arranjo simples e combinação simples, identificando em quais contextos cada conceito deve ser aplicado.
- **Resolver** problemas práticos de contagem relacionados ao dia a dia, como organização de objetos, formação de equipes e criação de senhas.
- **Interpretar** e **estruturar** problemas combinatórios para modelá-los matematicamente e resolver de maneira eficiente.
- **Utilizar** estratégias e representações diversas, como diagramas de árvore, tabelas e fórmulas matemáticas, para organizar e solucionar problemas de contagem.

DETALHAMENTO DAS HABILIDADES

A contagem é um dos pilares fundamentais da matemática, sendo amplamente utilizada para quantificar possibilidades em diversas situações do cotidiano e em áreas como estatística, probabilidade e computação. Desde o ensino fundamental, os estudantes são introduzidos a essa ideia por meio da construção de diagramas de árvore e tabelas, desenvolvendo sua capacidade de organização e análise lógica. No ensino médio, a Análise combinatória aprofunda conceitos e aplicações possíveis com os princípios da contagem e agrupamentos, ordenáveis ou não ordenáveis. A utilização de estratégias variadas, como o uso de fórmulas, diagramas e algoritmos de contagem, permite que os estudantes desenvolvam um pensamento combinatório estruturado, essencial para a resolução de problemas em diferentes contextos acadêmicos e profissionais.

A seguir, são apresentadas habilidades da BNCC diretamente ligadas às expectativas de aprendizagem elencadas para o descritor focal (D32):

EF05MA09: Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

EF08MA03: Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.

EM13MAT310: Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore.

RESUMO TEÓRICO

PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO, PERMUTAÇÃO SIMPLES, ARRANJO SIMPLES E COMBINAÇÃO SIMPLES

A **Análise Combinatória** visa desenvolver métodos que permitam contar - de uma forma indireta - o número de elementos de um conjunto, estando esses elementos agrupados sob certas condições.

FATORIAL

Seja n um número inteiro não negativo. Definimos o fatorial de n (indicado pelo símbolo n!) como sendo

$$n! = n.(n-1).(n-2).\cdots.4.3.2.1$$

Observação. Por convenção, para n = 0 teremos **0! = 1** e, para n = 1 teremos **1! = 1**.

PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO DA CONTAGEM (PFC)

Se determinado acontecimento ocorre em n etapas diferentes, e se a primeira etapa pode ocorrer de k_1 maneiras diferentes, a segunda de k_2 maneiras diferentes, e assim sucessivamente, então o número total T de maneiras de ocorrer o acontecimento é dado por:

$$T = k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_n$$

PERMUTAÇÕES SIMPLES

Permutações simples de n elementos distintos são os agrupamentos formados com todos os n elementos e que diferem uns dos outros pela ordem de seus elementos.

Ex.: com os elementos A,B,C são possíveis as seguintes permutações: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB e CBA.

O número total de permutações simples de n elementos distintos é dado por n!, isto é,

$$P_n = n!$$

Ex. Quantos anagramas pode-se formar com as letras da palavra ESCOLA?

Solução. Denomina-se *anagrama* o agrupamento formado pelas letras de uma palavra, que podem ter ou não significado na linguagem comum. Em outros termos, um anagrama é formado pela permutação das letras dadas. Sendo assim, o total de anagramas é obtido pelo total de permutações possíveis com estas letras, ou seja, com as letras da palavra ESCOLA são possíveis:

$$P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720 \ anagramas$$

ARRANJOS SIMPLES

Dado um conjunto com n elementos, chama-se arranjo simples de taxa k, a todo agrupamento de k elementos distintos dispostos numa certa **ORDEM**. Dois arranjos diferem entre si pela ordem de colocação dos elementos. Assim, no conjunto E = {a, b, c}, teremos:

a) arranjos de taxa 2: ab, ac, bc, ba, ca, cb.
b) arranjos de taxa 3: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Representando o número total de arranjos de n elementos tomados k a k (taxa k) por $A_{n,k}$, teremos a seguinte fórmula:

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Observação: Quando um conjunto de n elementos é agrupado em grupos de n elementos, temos

$$A_{n,n} = n! = P_n$$

Ex. A câmara municipal de um município conta com 9 vereadores para composição da mesa diretora do colegiado. Sabendo que a mesa é composta por presidente, vice-presidente, 1º e 2º secretários, de quantas maneiras essas funções podem ser ocupadas?

Solução. Como existe uma ordem para ocupação das funções, então, trata-se de um problema de arranjo simples. Sendo assim, a quantidade de maneiras para a formação da mesa diretora é de:

$$A_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = \frac{9.8\,.7\,.6\,.5!}{5!} = 9\,.\,8\,.\,7\,.\,6 = 3024\ \ maneiras$$

COMBINAÇÕES SIMPLES

Denominamos combinações simples de n elementos distintos tomados k a k (taxa k) aos subconjuntos formados por k elementos distintos escolhidos entre os n elementos dados. Observe que duas combinações são diferentes quando possuem elementos distintos, não importando a ordem em que os elementos são colocados.

Representando por $C_{n,k}$ o número total de combinações de n elementos tomados k a k (taxa k) , temos a seguinte fórmula:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \quad \text{ou} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Ex. Laura pretende pintar o quarto e dispõe de um catálogo com 10 cores para criar a tinta customizada que irá usar. Sabendo que ela irá usar 3 cores na preparação da tinta, quantas tintas diferentes ela consegue criar com o catálogo de cores disponível?

Solução. Como a ordem em que as cores são misturadas não altera a tonalidade final da tinta, então, trata-se de um problema de combinação simples. Sendo assim, a quantidade de tintas possíveis para Laura escolher é de:

$$C_{10,3} = \frac{10!}{3!\,.(10-3)!} = \frac{10!}{3!\,.7!} = \frac{10\,.9.8\,.7!}{3!\,.7!} = \frac{10\,.9\,.8}{3\,.2\,.1} = \frac{720}{6} =$$
$$120\ \ possibilidades\ de\ tinta.$$

ATIVIDADES PROPOSTAS

QUESTÃO 01

Alex, Claudeth, Gleidson, Guilherme, Rita, Sandolene e Waldina são professores da Secretaria de Educação, lotados na Coordenadoria de Ensino Médio (COEM). Para ministrar duas oficinas, em dias distintos, o coordenador da equipe, Higor, precisa de 4 dos professores para cada dia de oficina, de maneira que aqueles que não participarem da 1ª oficina, obrigatoriamente estarão na 2ª oficina.

A quantidade de maneiras possíveis que o coordenador Higor pode montar, respectivamente, as equipes para a 1ª e 2ª oficinas, é

A) 24
B) 35
C) 105
D) 140
E) 840

QUESTÃO 02

Para a elaboração deste caderno de Matemática, os professores Bechara Jr., Gesson, Gleidson, Jacob e Roberto ficaram encarregados de elaborar questões sobre 15 descritores, que são critérios de avaliação da aprendizagem do estudante. Cada professor ficou encarregado de elaborar questões sobre 3 descritores consecutivos na ordem definida, do 1º ao 15º descritor.

Nestas condições, o número de maneiras distintas que esses descritores poderiam ser distribuídos é de

A) 120
B) 243
C) 455
D) 2730
E) 3003

QUESTÃO 03

Leandro listou algumas séries, cujas novas temporadas ele pretende maratonar aos fins de semana. A lista elaborada tem 3 séries de Aventura, 2 de terror e 4 de ficção científica. Pelo tempo de duração de cada temporada de uma série, Leandro consegue maratonar apenas duas séries em cada fim de semana. Para o primeiro fim de semana de maratona, ele decidiu que pelo menos uma das séries será de ficção científica.

Sendo assim, para o 1º fim de semana, o número de formas distintas que Leandro pode escolher a série que assistira no sábado e a série do domingo é

A) 10
B) 16
C) 32
D) 36

E) 52

QUESTÃO 04

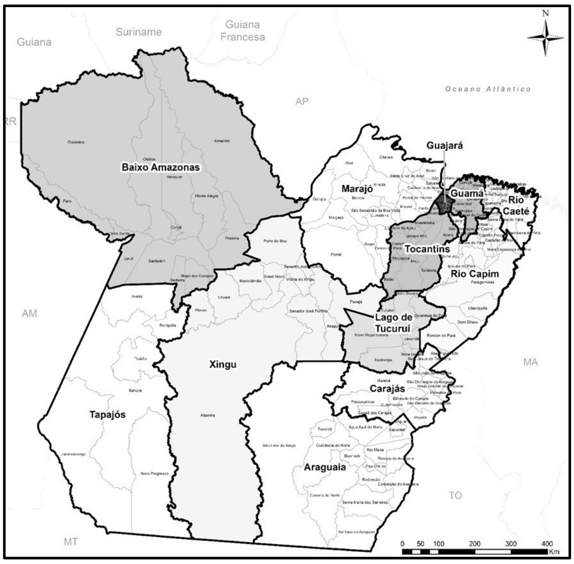
Para criar um vídeo para as redes sociais, Márcia precisa escolher 1 música, 1 filtro e 2 efeitos visuais para combinar em sua produção. Para isso, ela dispõe de: 6 opções de música; 4 opções de filtro e 5 opções de efeitos, não importando a ordem em que os efeitos serão aplicados.

A quantidade de combinações distintas que Márcia pode aplicar na criação do seu vídeo, levando em consideração essas escolha, é de

A) 20
B) 30
C) 120
D) 240
E) 480

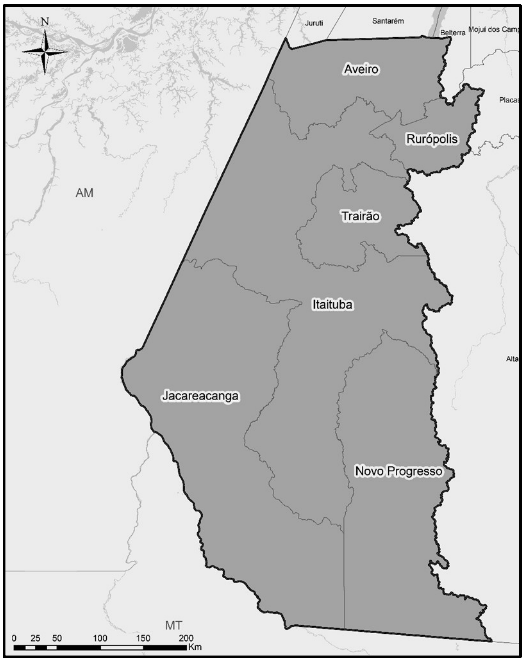
QUESTÃO 05

De acordo com a Secretaria de Educação do Pará, as Regiões de Integração é uma subdivisão do Estado do Pará que congrega diversos municípios de uma área geográfica com similaridades econômicas e sociais e é utilizada para fins de planejamento, monitoramento e avaliação das ações desenvolvidas. O mapa a seguir mostra as Regiões de Integração que compõem o estado.



Fonte: https://www.fapespa.pa.gov.br/sistemas/anuario2017/mapas/territorio/ter2_regioes_de_integracao_do_para.png

Duas equipes técnicas, para realizar um estudo econômico, visitarão todos os municípios da Região de Integração do Tapajós, que abrange os municípios indicados no mapa abaixo. Cada equipe visitará 3 cidades, importando a ordem de visitação às cidades.



Fonte: https://fapespa.pa.gov.br/sistemas/radar2023/portfolio.html

Diante do contexto apresentado, a quantidade de maneiras diferentes que as cidades dessa região de integração podem ser alocadas entre as equipes é

A) 720
B) 240
C) 120
D) 40
E) 20

D33 - Calcular a Probabilidade de um Evento.

EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM

Esse descritor deve verificar a habilidade de o aluno determinar a probabilidade de ocorrência de um evento associando-a com a frequência.

A finalidade desta etapa é capturar a atenção dos alunos, mostrando a relevância e a aplicação prática da probabilidade em situações do mundo real. Isso ajuda a despertar o interesse e a motivação dos alunos para o conteúdo que será explorado mais detalhadamente ao longo da aula.

Para iniciar a aula sobre Probabilidade Básica, é importante contextualizar aos alunos sobre a relevância do tema. Comece explicando que a probabilidade é uma ferramenta matemática fundamental que nos ajuda a entender e prever a ocorrência de eventos em situações de incerteza. Utilize exemplos do dia a dia, como a previsão do tempo, jogos de azar (como dados e cartas), e até mesmo em decisões financeiras e médicas. Destaque que a probabilidade está presente em diversas áreas do conhecimento e que sua compreensão é essencial não só para a matemática, mas para a tomada de decisões informadas em várias esferas da vida.

Noções de probabilidade básica: espaço amostral, evento aleatório (equiprovável). Contagem de possibilidades. Cálculo de probabilidades simples.

DETALHAMENTO DAS HABILIDADES

EM13MAT106: Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

EM13MAT311: Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade.

EM13MAT312: Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos.

EM13MAT511: Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Para o desenvolvimento dessa habilidade e dos descritores do SAEB relacionados, considere que o estudante deve ter os seguintes conhecimentos prévios: Operações com números reais. Princípio fundamental da contagem. Métodos de contagem. Razão. Conjuntos. Porcentagem.

RESUMO TEÓRICO

1. Noções de Probabilidades

No lançamento de uma moeda, podemos obter cara ou coroa e no lançamento de um dado, os resultados possíveis são 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.
Mesmo se esses experimentos forem repetidos várias vezes, nas mesmas condições, não poderemos prever o resultado.
Um experimento cujo resultado, embora único, é imprevisível, é denominado experimento <u>aleatório</u>.
Como não podemos prever o resultado de um experimento aleatório, procuraremos descobrir as possibilidades de ocorrência de cada um.
A teoria da probabilidade surgiu para tentar medir a “chance” de ocorrer um determinado resultado num experimento aleatório.

1.1 **Espaço Amostral**

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é denominado espaço amostral, que vamos indicar por **S**. Observe:

1.2 **Evento**

Evento (E) é todo subconjunto do espaço amostral S relacionado a um experimento aleatório.

Analisaremos alguns eventos particulares, através de exemplos:

I. Evento Certo: evento que possui os mesmos elementos do espaço amostral (E = S)
E_1: A soma dos resultados nos 2 dados é menor ou igual a 12.

II. Evento Impossível: evento igual ao conjunto vazio
E_2: O número do primeiro dado é igual a 7,
logo $E_2 = \{ \ \}$ ou $\emptyset$

III. Evento simples: evento que possui 1 único elemento
E_3: A soma dos resultados nos dois dados é igual a 12,
Logo $E_3 = \{(6, 6)\}$

IV. Evento Complementar: se A é um evento de um espaço amostral S, o evento complementar de A indicado por C_A é tal, que $\mathbf{C_A = S - A}$.

V. Eventos mutuamente exclusivos: Dois ou mais eventos são mutuamente exclusivos quando a ocorrência de um deles implica a <u>não ocorrência do outro</u>. Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então $\mathbf{A \cap B = \emptyset}$

2. Probabilidade de um Evento

Considerando um espaço amostral S, não vazio, e um evento E, sendo $E \subset S$, a probabilidade de ocorrer o evento E é o número real P(E), tal que:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \quad \textbf{(} \text{ Regra de Laplace } \textbf{)}$$

$$P(E) = \frac{\text{Evento}}{\text{Espaço Amostral}} = \frac{\text{Nº de Casos Favoráveis}}{\text{Nº de Casos Possíveis}}$$

Sendo $\mathbf{0 \leq P(E) \leq 1}$ e S um conjunto equiprovável, ou seja, todos os elementos têm a mesma “chance” de acontecer.

n(E): nº de elementos do evento **E**
n(S): nº de elementos do espaço amostral **S**

<u>**Ex**:</u> Lançando-se um dado honesto, a probabilidade de sair um número par na face voltada para cima é obtida da seguinte forma:

<u>Solução</u>

S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} n(S) = 6
E = {2, 4, 6} n(E) = 3

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \quad \Rightarrow \quad P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad 50\%$$

2.1 Algumas variações para o cálculo das probabilidades

i. **Definições Básicas de Probabilidade**: Explique os conceitos fundamentais, como experimento aleatório, espaço amostral e evento. Utilize exemplos simples, como o lançamento de uma moeda ou de um dado, para ilustrar cada definição.

ii. **Cálculo da Probabilidade**: Detalhe a fórmula da probabilidade de um evento, que é o número de resultados favoráveis dividido pelo número total de resultados possíveis. Exemplifique com situações práticas, como a probabilidade de sair cara ao lançar uma moeda.

iii. **Probabilidade em Dados**: Mostre como calcular a probabilidade de eventos ao lançar um dado. Por exemplo, a probabilidade de obter um número par. Aplique a fórmula e demonstre passo a passo.

iv. **Probabilidade em Moedas**: Explique como calcular a probabilidade de eventos ao lançar uma moeda. Por exemplo, a probabilidade de obter duas caras ao lançar duas moedas. Utilize diagramas de árvore se necessário.

v. **Probabilidade em Cartas de Baralho**: Aborde a probabilidade de retirar certas cartas de um baralho de 52 cartas. Exemplifique com a probabilidade de retirar um quatro, ou uma carta de copas.

vi. **Probabilidade em Urnas**: Detalhe como calcular a probabilidade de retirar bolas de uma urna. Por exemplo, a probabilidade de retirar uma bola vermelha de uma urna com 3 bolas vermelhas e 2 bolas azuis.

"Embora a natureza seja imprevisível, com sua quantidade insondável de variáveis e variáveis, ainda temos meios ingredientes fantasticamente inteligentes de medir seus segredos."

Jacob Bernoulli

ATIVIDADES PROPOSTAS

QUESTÃO 01

Júlia e sua família planejam um fim de semana na praia, mas concordam que irão apenas se a probabilidade de chuva no sábado e no domingo for menor do que 50%. Pela previsão do tempo, ela sabe que a chance de chuva no sábado é de 60% e no domingo, 80%.

Com base nas previsões de chuva no sábado e no domingo, Júlia e sua família

A) Com 48% de chance, decidiram ir à praia.
B) Com 50% de chance, decidiram ir à praia.
C) Com 52 % de chance, decidiram não viajar.
D) Com 60 % de chance, decidiram não viajar.
E) Com 80 % de chance, decidiram não viajar.

QUESTÃO 02

No sorteio de uma rifa, com 25 números, serão sorteados 2 prêmios, de maneira que cada participante pode ganhar apenas um dos prêmios. Entre os que assinaram a rifa está Victor, que concorre com cinco números.

Qual a chance de Victor ganhar apenas o 2º prêmio sorteado?

A) $\frac{1}{25}$ B) $\frac{2}{25}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{2}{5}$

QUESTÃO 03

Em uma indústria, em um intervalo de tempo qualquer, duas máquinas, M_1 e M_2, produzem a mesma quantidade de peças. Em determinado dia, a produção foi de 1000 peças que, de acordo com a condição, podem ser classificadas como “boas” ou “defeituosas”. No referido dia, as peças produzidas foram classificadas conforme quadro a seguir:

	MÁQUINA 1	MÁQUINA 2
PEÇAS BOAS	480	450
PEÇAS DEFEITUOSAS	20	50

Sendo assim, a chance de uma peça ser defeituosa, sabendo-se que foi escolhida do lote produzido pela máquina M_2 é de

A) 4%
B) 5%
C) 7%
D) 10%
E) 11%

QUESTÃO 04

O açaí e a bacaba são alimentos muito presentes na mesa do paraense; para alguns, quase que diariamente. Fazendo um levantamento em uma amostra de 2000 pessoas sobre o consumo do açaí ou da bacaba, foram obtidos os seguintes resultados:

- 1700 pessoas afirmaram gostar de açaí;
- 800 pessoas afirmaram gostar de bacaba;
- 600 pessoas afirmaram gostar de ambos os alimentos.

A probabilidade de, ao acaso, se escolher uma pessoa dessa amostra que não goste nem de açaí e nem de bacaba é de

A) $\frac{1}{20}$

B) $\frac{1}{10}$

C) $\frac{3}{10}$

D) $\frac{11}{20}$

E) $\frac{17}{20}$

QUESTÃO 05

Um hotel tem seus quartos distribuídos em 3 andares: térreo, 1º andar e 2º andar. De acordo com a necessidade, os clientes podem ficar em um quarto com 1 cama de casal ou com 2 camas de solteiro. No térreo, em $\frac{4}{5}$ dos quartos as camas são de solteiro, no 2º andar tem-se $\frac{3}{10}$ dos quartos com essas camas e no 3º andar são $\frac{1}{5}$ dos quartos. A página do hotem na internet apresenta todas as informações necessárias para a melhor escolha dos hóspedes; contudo, Yuri reservou um quarto nesse hotel sem atentar para o andar e se o quarto escolhido dispõe de cama de casal ou de solteiro.

Escolhendo um dos andares, a probabilidade de Yuri ter escolhido um quarto duplo, com 2 camas de solteiro, é de

A) $\frac{1}{15}$

B) $\frac{1}{10}$

C) $\frac{4}{15}$

D) $\frac{13}{30}$

E) $\frac{13}{10}$

QUINZENA 11

D01 - Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade.

D02 - Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.

21ª SEMANA

21ª SEMANA
21ª SEMANA
21ª SEMANA

D1 - Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade

EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM

Por meio deste descritor pretende-se avaliar a habilidade de o estudante reconhecer a semelhança entre figuras geométricas a partir de um fator de proporcionalidade dado, ou então obter o fator de proporcionalidade a partir de figuras que sejam semelhantes. Os conhecimentos são avaliados por meio de situações-problema, explorando situações cotidianas que envolvam a ideia de proporcionalidade

DETALHAMENTO DAS HABILIDADES

EF05MA18: Reconhecer a congruência dos ângulos e a proporcionalidade entre os lados correspondentes de figuras poligonais em situações de ampliação e de redução em malhas quadriculadas e usando te

Objetivos específicos

- Reconhecer na ampliação ou redução das figuras poligonais a congruência dos ângulos e a proporcionalidade dos lados.
- Ampliar e/ou reduzir corretamente uma figura mantendo a semelhança.
- Distinguir qual ampliação e/ou redução de uma figura foi construída corretamente seguindo o conceito de semelhança.

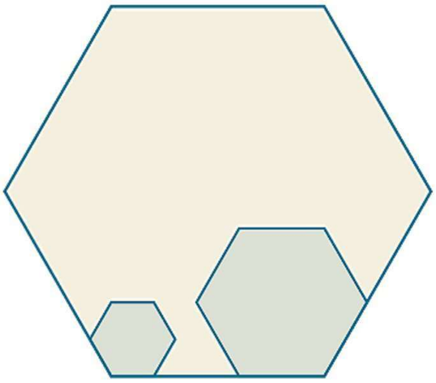
Como identificar figuras semelhantes?

- Para que dois polígonos sejam semelhantes, é necessário que tenham o mesmo número de lados.
- Os ângulos correspondentes devem ser iguais.
- Os lados correspondentes devem ter uma razão de proporção.
- Essa razão de proporção deve ser a mesma para todos as medidas lineares do polígono.

RESUMO TEÓRICO

SEMELHANÇA ENTRE FIGURAS

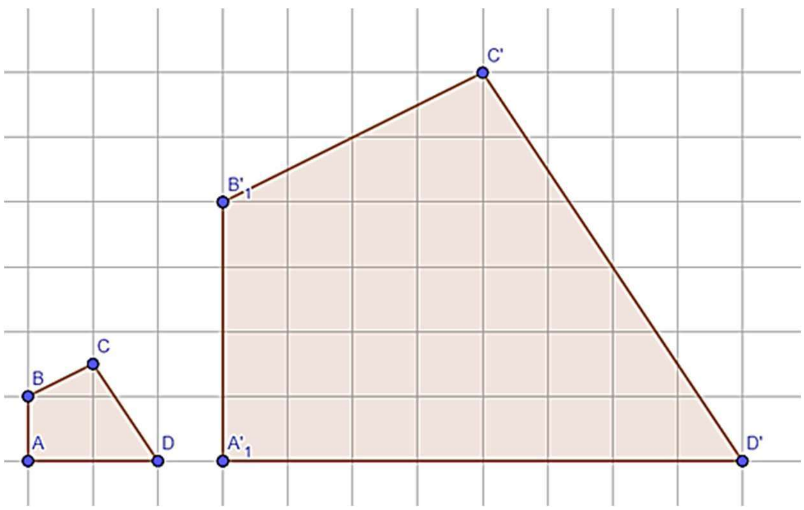
Figuras semelhantes são aquelas que possuem ângulos correspondentes congruentes e lados correspondentes proporcionais. Essa proporção entre os lados e a semelhança entre as figuras garantem também a existência de uma propriedade envolvendo suas áreas. Para compreender melhor essa propriedade, é necessário relembrar o conceito de **razão de semelhança**.



Os polígonos regulares, como são hexágonos, possuem a mesma razão de semelhança.

A **razão de semelhança** é o resultado da divisão entre as medidas de um lado da 1ª figura e o lado correspondente a ele da 2ª figura. Vale ressaltar que isso só é válido para figuras semelhantes.

Os quadriláteros, representados a seguir, são exemplos de figuras **semelhantes:**



Nessas figuras, a **razão** entre o lado AB e o lado A'B' é igual a 0,25 e a **razão** entre os lados AD e A'D' também é 0,25, pois são lados correspondentes, como BC e o lado B'C' e por fim CD e o lado C'D'.

Áreas de Figuras Semelhantes

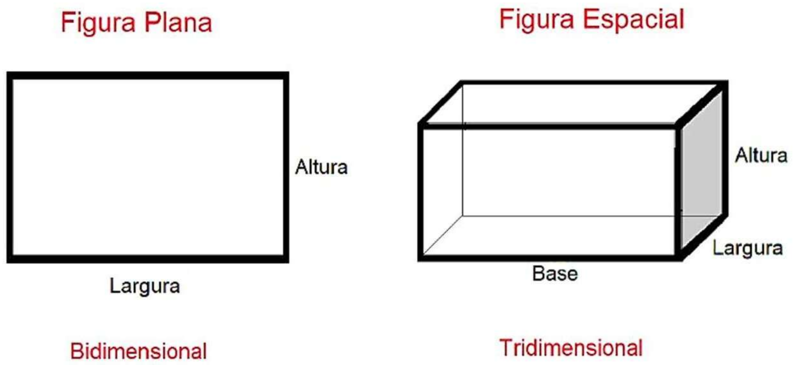
Suponha que as **áreas** de duas **figuras** sejam representadas por A_1 e A_2 e a medida de dois de seus lados correspondentes L_1 e L_2 e por fim, que essas figuras sejam **semelhantes**. Suponha também que R é a razão de semelhança entre as duas figuras, ou seja, R é o resultado da divisão entre dois lados correspondentes dessas duas figuras.

Nessa hipótese, a **razão** entre as áreas das figuras será igual ao quadrado da **razão de semelhança**, o que pode ser representado matematicamente da seguinte forma

$$R = \frac{L_1}{L_2} \xrightarrow{\text{p/ áreas}} \frac{A_1}{A_2} = (R)^2 = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 .$$

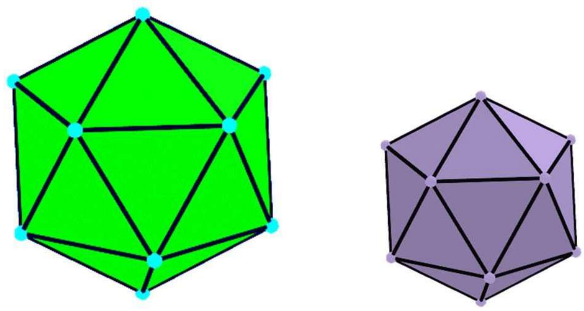
Toda vez que dividimos as medidas de dois lados correspondentes de dois **polígonos semelhantes** o resultado é a razão de semelhança R. Se dividirmos as áreas desses mesmos polígonos, o resultado será R^2.

Obs: Caso haja semelhança entre figuras espaciais no IR^3, a razão de semelhança entre seus volumes V_1 e V_2, será



$$R = \frac{L_1}{L_2} \xrightarrow{\text{p/ volumes}} \frac{V_1}{V_2} = (R)^3 = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^3 .$$

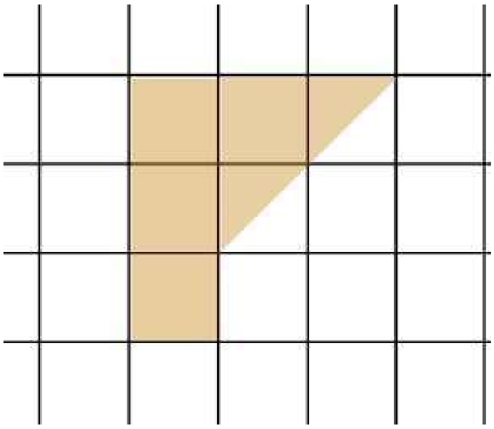
Toda vez que dividimos as medidas de dois lados correspondentes de duas figuras espaciais **semelhantes** o resultado é a razão de semelhança R. Se dividirmos os volumes dessas figuras, o resultado será R^3.



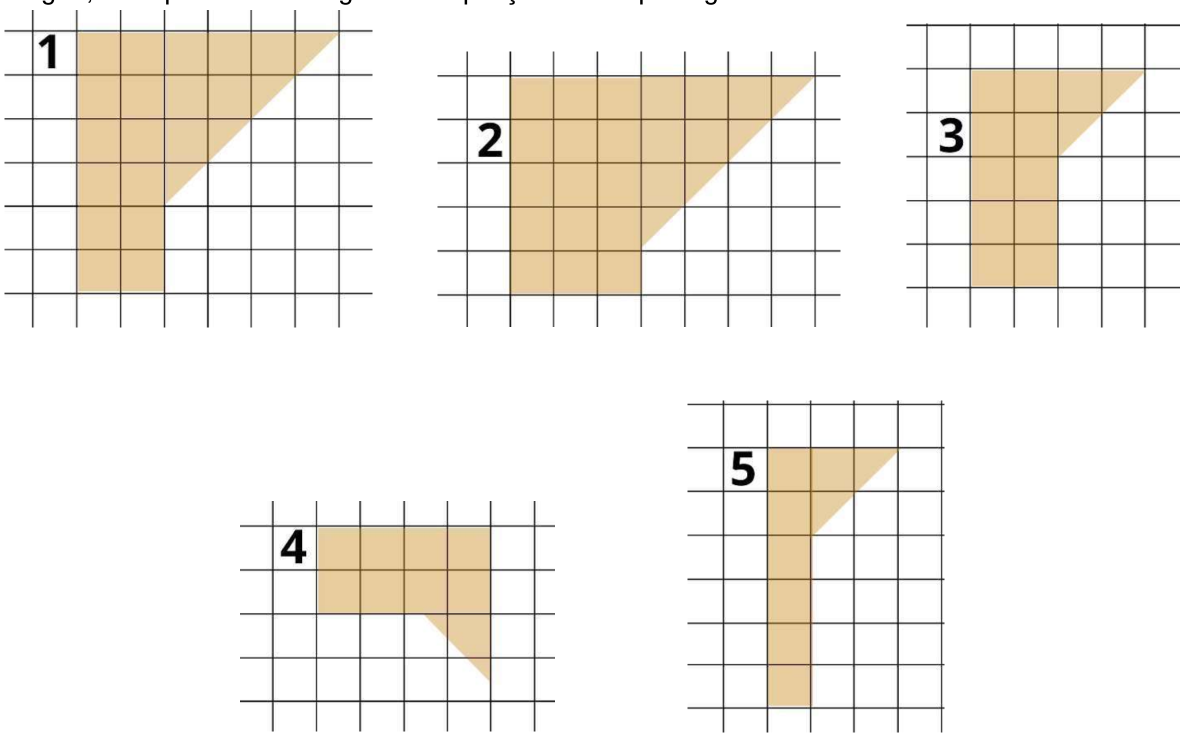
ATIVIDADES PROPOSTAS

QUESTÃO 01

O professor de Matemática, durante uma aula sobre Geometria, pediu aos alunos que ampliassem a figura a seguir, usando uma malha quadriculada com a mesma medida para cada lado do quadrado da malha original.



A seguir, são apresentadas algumas ampliações feitas por alguns alunos da turma.



Ampliou corretamente a figura original o aluno que fez a ampliação

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

QUESTÃO 02

A figura 1 a seguir representa o projeto inicial de uma passarela que será usada em um desafio, no qual uma pessoa, a certa altura, saindo da estação E1, deve cumprir o trajeto recolhendo itens deixados nas estações E2, E3 e E4.

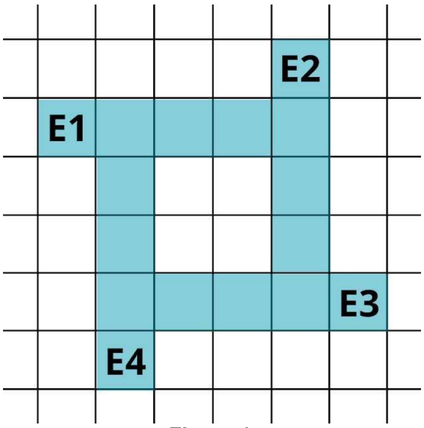
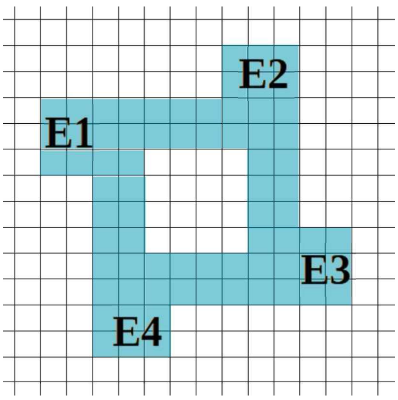
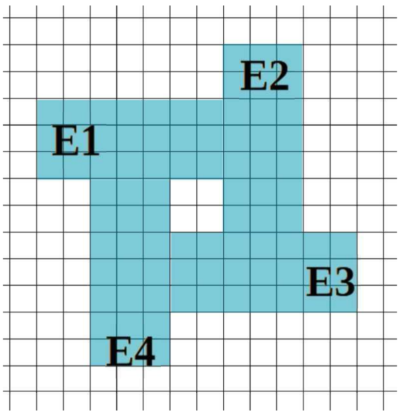


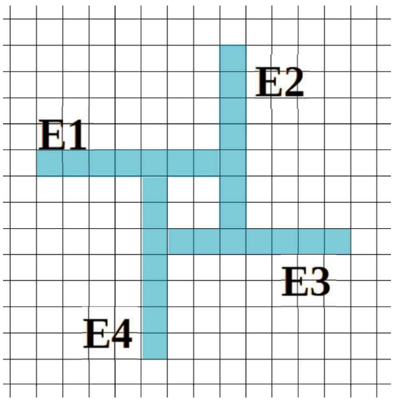
Figura 1

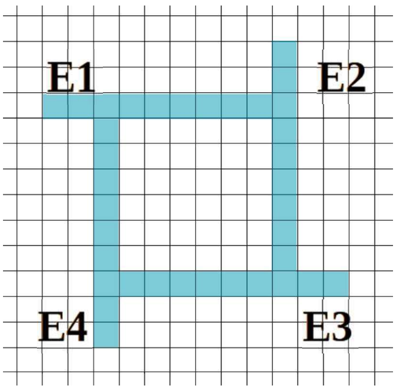
Considerando que o projeto inicial foi aprovado, a construção da passarela que será usada no desafio segue medidas proporcionais às usadas na maquete inicial.

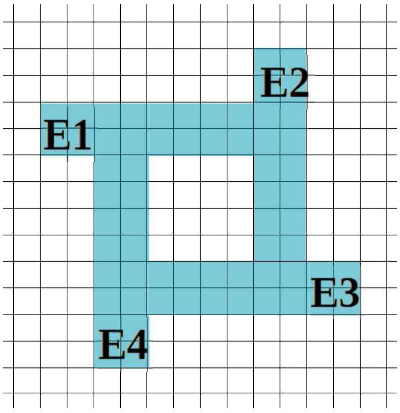
Sendo assim, usando malhas idênticas a da figura 1, a representação correta da passarela usada no desafio é

A) 

B) 

D) 

E) 

C) 

QUESTÃO 03

A figura a seguir mostra, na cidade de Belterra, no Pará, uma imagem de satélite do cruzamento da estrada do 5 com a estrada do 8, com mais quatro acessos viários interligando as duas vias.

As vias de acesso às duas estradas formam um quadrado que, em tamanho real, tem lados medindo 150 m de comprimento. Comparando o mapa à escala real, a razão entre os comprimento, em metro, nas duas escala é de 1:2000.

O comprimento, em centímetro, de cada acesso viário interligando as duas estradas, no mapa, é de

A) 0,75
B) 1,50
C) 7,50
D) 75,00
E) 150,00

QUESTÃO 04

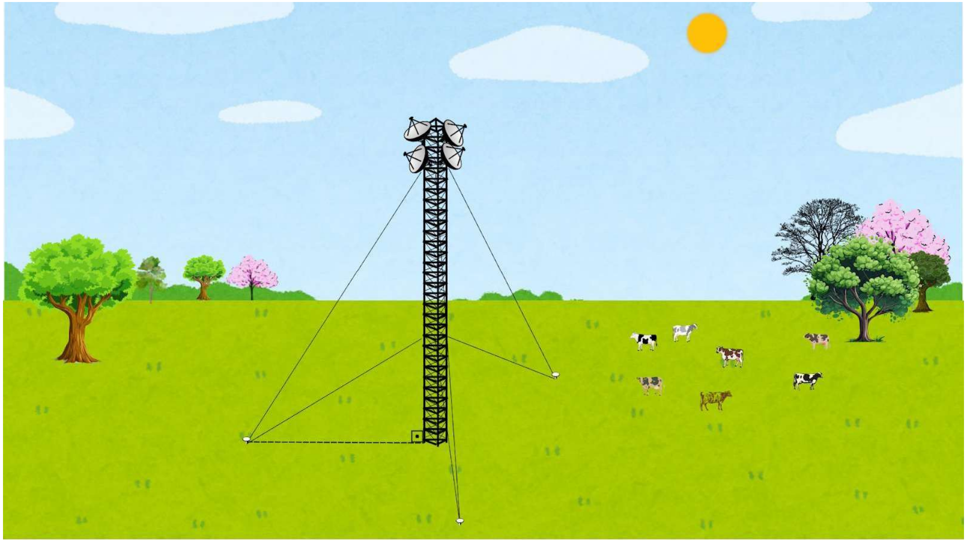
Uma empresa de publicidade criou a logo de uma pizzaria e irá reproduzi-la em um *outdoor*. O fundo da logo, como se vê na figura a seguir, é um trapézio isósceles que, na arte criada, tem base maior medindo 20 cm e a base menor mede 16 cm. Sabe-se também que as medidas de comprimento na arte e em sua reprodução no outdoor estão em uma escala de 1:40.

Neste sentido, no *outdoor*, as bases maior e menor têm medidas, respectivamente, de

A) 0,8 m e 0,64 m
B) 8 m e 6,4 m
C) 1,60 m e 2 m
D) 16 m e 20 m
E) 80 m e 64 m

QUESTÃO 05

Uma torre de telefonia é estabilizada, em terreno plano, por 6 cabos de aço, todos fixados ao solo a 16 m de distância da base da torre, dois a dois. Sabe-se que cada par de cabos de aço sustentam a torre em dois pontos de sua estrutura, estando o ponto mais alto a 30 m de altura. Além disso, formam com o solo dois triângulos semelhantes.



Qual o comprimento de cada um dos menores cabos de aço usados na sustentação da torre?

A) 16,00 m
B) 18,13 m
C) 30.00 m
D) 34.00 m
E) 52,13 m

D02 - Reconhecer aplicações das relações métricas do triângulo retângulo em um problema que envolva figuras planas ou espaciais.

EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM

Por meio deste descritor pretende-se avaliar a habilidade de o estudante reconhecer, em um problema envolvendo figuras planas e espaciais, situações nas quais devem ser usadas as relações métricas de um triângulo retângulo, principalmente o teorema de Pitágoras. A compreensão dos conhecimentos relacionados ao teorema de Pitágoras pode colaborar na interpretação e resolução de situações-problema do cotidiano do estudante.

DETALHAMENTO DAS HABILIDADES

- **EM13MAT308:** Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.

Relações métricas em triângulos envolve medidas em relação aos ângulos e em relação aos lados. Tradicionalmente são assuntos do Ensino Fundamental das séries finais, porém também são amplamente utilizados no Ensino Médio nas geometrias plana e espacial, com semelhanças de triângulos, triângulos retângulos, triângulos equiláteros, trigonometria no triângulo retângulo, pontos notáveis do triângulo, etc. Quando o autor da BNCC inclui leis do seno e cosseno supõe-se trabalhar toda a geometria plana tradicional relacionada a triângulos, já que esses conceitos relacionam lados, ângulos e trigonometria.

RESUMO TEÓRICO

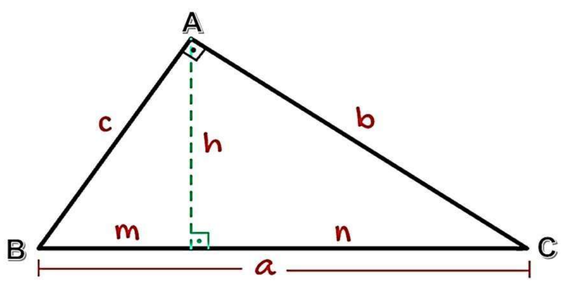
RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Relacionam medidas de um triângulo retângulo

As relações métricas no triângulo retângulo são parte da geometria plana e se relacionam às medidas correspondentes em triângulos retângulos. Desta forma, a expressão encontra medidas não conhecidas de um triângulo. Assim, conseguimos encontrar catetos, a hipotenusa a partir das semelhanças entre as figuras.

Elementos do triângulo retângulo

O triângulo retângulo é um tema muito importante para a geometria plana. É formado por um **ângulo interno** de 90° e os outros dois menores que somados formam 90°. Os dois ângulos agudos do triângulo retângulo são complementares.
Os elementos do um triângulo retângulo são:

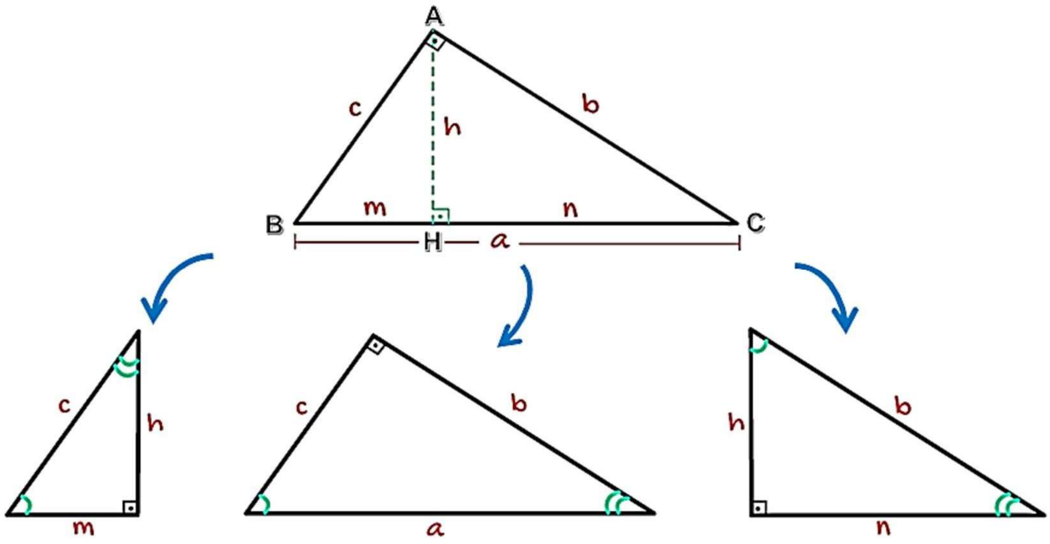


Nesse triângulo, observe que:

- A letra **a** é a medida da hipotenusa;
- As letras **b** e **c** são as medidas dos catetos;
- A letra **h** é a medida da altura do triângulo retângulo;
- A letra **n** é a projeção do cateto AC sobre a hipotenusa;
- A letra **m** é a projeção do cateto AB sobre a hipotenusa.

Semelhança entre os triângulos

Ao analisar a imagem anterior, percebe-se ainda que dois triângulos retângulos são formados depois de a altura ser marcada a partir do ângulo de 90º até o lado da hipotenusa. Os triângulos apresentados são semelhantes entre si, ou seja, seus ângulos são congruentes e os seus lados são proporcionais.



Na imagem apresentada acima, os triângulos semelhantes. São eles: **ΔABH ~ ΔABC ~ ΔACH**

Quais são essas relações métricas?

Com essas informações iniciais é possível entender e encontrar seis das relações métricas no triângulo retângulo através de semelhanças de triângulos.

1ª Relação (ΔABC ~ ΔABH **): a** está para **c**, assim como **c** está para o **m**;

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{m} \quad \leftrightarrow \quad c^2 = a.m$$

2ª Relação (ΔABC ~ ΔACH **)**: **a** está para **b**, assim como **b** está para **n**;

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{n} \quad \leftrightarrow \quad b^2 = a.n$$

3ª Relação (ΔABH ~ ΔACH **): h** está para **m**, assim como **n** está para **h**;

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \quad \leftrightarrow \quad h^2 = m.n$$

4ª Relação (ΔABC ~ ΔABH **): a** está para **c**, assim como **b** está para **m**;

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{m} \quad \leftrightarrow \quad a.m = b.c$$

5ª Relação (ΔABH ~ ΔACH **): c** está para **b**, assim como **m** está para **h**;

$$\frac{c}{b} = \frac{m}{h} \quad \leftrightarrow \quad c.h = b.m$$

6ª Relação (ΔABH ~ ΔACH **): c** está para **b**, assim como **h** está para **n**;

$$\frac{c}{b} = \frac{h}{n} \quad \leftrightarrow \quad c.n = b.h$$

Obs.: O mais importante é fazer o aluno entender sobre semelhança de triângulos para evitar a simples decoração temporária de fórmulas.

Teorema de Pitágoras

O teorema de Pitágoras é a principal relação métrica que consiste em "*o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos*". Ele é válido para todos os 3 triângulos retângulos existentes e pode ser escrito da seguinte maneira:

$$(\text{Hipotenusa})^2 = (\text{Cateto}_1)^2 + (\text{Cateto}_2)^2$$

Consequentemente teremos:

I. $a^2 = b^2 + c^2$

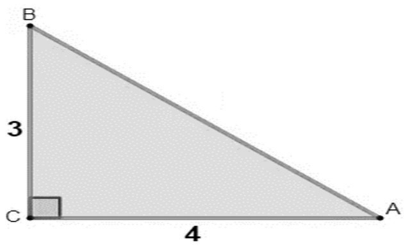
II. $c^2 = h^2 + m^2$

III. $b^2 = h^2 + n^2$

ATIVIDADES PROPOSTAS

QUESTÃO 01

O teorema de Pitágoras indica que, em um triângulo retângulo, a medida da hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos". Um triângulo retângulo possui as medidas a seguir.



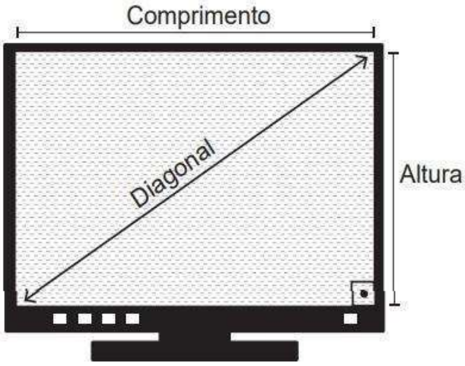
Fonte: o autor

A medida do lado AB é igual a?

A) 3
B) 4
C) 5
D) 7
E) 9

QUESTÃO 02

Aparelhos de TV e monitores de computador são vendidos com medidas em polegadas. Para se saber quantas polegadas possui a tela de um televisor, basta medir na diagonal, de um canto a outro da tela. Beto mediu o comprimento e a largura da tela de sua TV e encontrou as seguintes medidas: **Comprimento** = 16 polegadas; **Altura** = 12 polegadas.



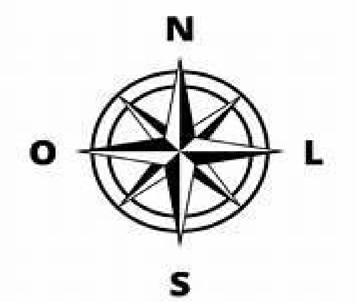
Fonte:enceja2020ppl

A TV de Beto é de quantas polegadas?

A) 4
B) 12
C) 16
D) 20
E) 28

QUESTÃO 03

Duas pessoas, partindo de um mesmo local, caminham em direções ortogonais. Uma pessoa caminhou 8 metros para o leste, a outra, 6 metros para o norte.



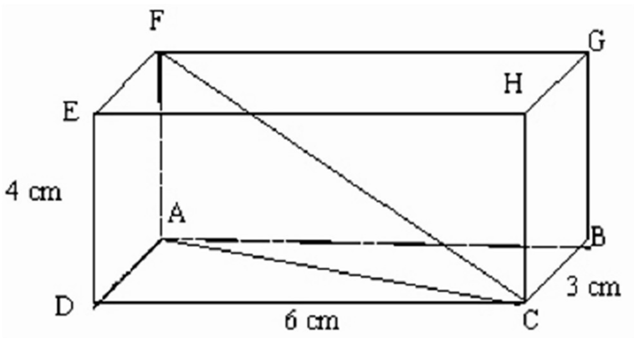
Fonte: Brasil Escola

Qual a distância, em metro, que separa essas duas pessoas?

A) 64
B) 48
C) 36
D) 14
E) 10

QUESTÃO 04

Um paralelepípedo ABCDEFGH, representado pela figura abaixo, tem as arestas que medem 3 cm, 4 cm e 6 cm.



Fonte: Blogue do Prof. Warles

A medida da diagonal FC do bloco retangular, em centímetros, é:

A) $3\sqrt{3}$.
B) $\sqrt{13}$.
C) $\sqrt{61}$.
D) $4\sqrt{6}$.
E) $6\sqrt{6}$.

QUESTÃO 05

Em um mapa, as cidades A, B e C são os vértices de um triângulo retângulo e o ângulo reto está em A. A estrada AB tem 48 km e a estrada BC tem 60 km. Um rio impede a construção de uma estrada que ligue diretamente a cidade A com a cidade C. Por esse motivo, projetou-se uma estrada saindo de A e perpendicular à estrada BC, para que ela seja a mais curta possível.

Qual será aproximadamente o comprimento da estrada que será construída?

A) 29 km
B) 36 km
C) 48 km
D) 60 km
E) 108 km

D11 - Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.

D12 - Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

22ª SEMANA

22ª SEMANA
22ª SEMANA
22ª SEMANA

D11 - Resolver problema envolvendo o cálculo de perímetro de figuras planas.

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAGEM

- **Compreender** e **aplicar** o princípio multiplicativo na resolução de problemas que envolvem • Identificar o tipo de figura plana;
- Compreender o contexto que envolva cálculo de perímetros;
- Modelar situações em contextos diversos que envolvem cálculo de perímetro de figuras planas;
- Ler e interpretar informações em texto ou imagem para obtenção de perímetro;
- Aplicar conceito de perímetro em diversas situações cotidianas.

DETALHAMENTO DAS HABILIDADES

- **(EM13MAT201)** Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

O descritor D11 relaciona-se com a habilidade no que se refere ao cálculo de perímetro, ou simplesmente o contorno. Construir modelos geométricos que utilizem o conceito de perímetro; Resolver problemas em diferentes contextos; Aplicar o conhecimento em situações do cotidiano; Resolver situações-problema relacionando o perímetro de uma figura plana.

RESUMO TEÓRICO

GEOMETRIA PLANA - PERÍMETRO

Breve histórico

A palavra perímetro tem origem no grego antigo, sendo formada pelos termos peri (περί), que significa “em volta” ou “ao redor”, e metron (μέτρον), que significa “medida”. Dessa forma, o perímetro pode ser traduzido como “medida ao redor”, o que expressa exatamente sua aplicação matemática: o comprimento total do contorno de uma figura geométrica.

Aplicações do Perímetro

O conceito de perímetro é amplamente utilizado em diversas áreas do conhecimento e da vida cotidiana. Na matemática, é essencial para calcular o contorno de formas planas, como triângulos, quadrados, retângulos e círculos. No dia a dia, aparece em situações como:

• Construção civil: para determinar a quantidade de cercas, muros ou rodapés necessários em um espaço.

• Esportes: para definir o tamanho de campos e quadras, como o perímetro de uma pista de corrida.

• Cartografia e geografia: no estudo de fronteiras de territórios ou no cálculo do contorno de ilhas e cidades.

• Moda e design: na confecção de roupas e acessórios, garantindo que tecidos sejam cortados corretamente.

Com sua origem etimológica conectada à ideia de “medir ao redor”, o perímetro é conceito fundamental em diversas áreas, demonstrando como a matemática está presente no nosso dia a dia.

Perímetro

Para determinar o perímetro de uma figura, basta medir todo contorno da figura ou calcular a soma de todos os lados de um polígono. No caso de curvas como circunferência, podemos utilizar:

$$C = 2.\pi.r$$

Nota: Em matemática, é comum utilizar a notação **2p** para perímetro e a notação **p** para semiperímetro, que corresponde à metade da medida do perímetro de uma região plana..

ATIVIDADES PROPOSTAS

QUESTÃO 01

Pretende-se colocar uma tela em um terreno retangular com as seguintes dimensões: 12,5 metros de comprimento e 8,5 metros de largura.

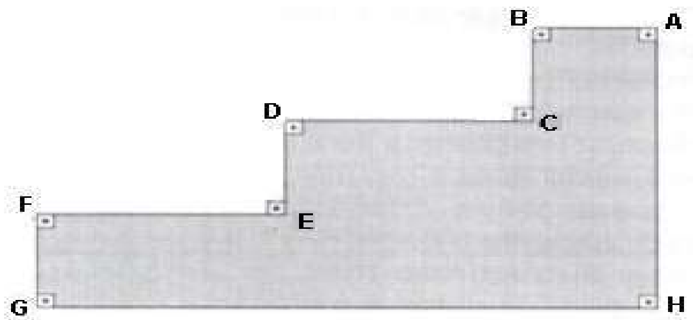
Quantos metros (m) de tela de arame são necessários para cercar esse terreno?

A) 17,0 m
B) 25,0 m
C) 34,0 m
D) 42,0 m
E) 50,0 m

QUESTÃO 02

O salão de uma casa tem o formato da figura ABCDEFGH e possui dimensões

$$\overline{CD} = \overline{EF} = 4m \quad \text{e} \quad \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{ED} = \overline{FG} = 2m$$



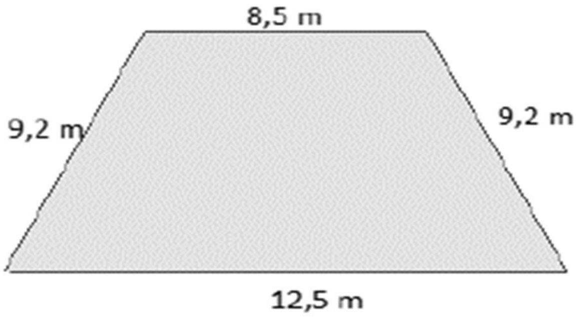
Fonte: Blogue do Prof. Warles

O perímetro desse salão, em metros (m), é

A) 32
B) 30
C) 26
D) 20
E) 14

QUESTÃO 03

Seu Paulo deseja cercar com tela de arame um canteiro que tem as medidas indicadas na figura a seguir. Ele usará uma tela cujo metro custa R$ 4,00.



Fonte: Blogue do Prof. Warles

Quanto seu Paulo vai gastar?

A) R$ 70,80
B) R$ 84,00
C) R$ 86,80
D) R$ 120,80
E) R$ 157,60

QUESTÃO 04

Jacob todas as manhãs faz corridas em uma praça de formato circular de 50 metros de raio representada na figura a seguir.

Fonte: depositphotos

Qual a distância percorrida por Jacob se ele completar 20 voltas?

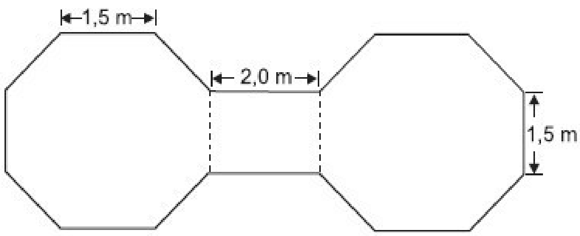
Considere $\pi = 3{,}14$

A) 6 000 metros
B) 6 200 metros
C) 6 250 metros
D) 6 280 metros
E) 6 350 metros

QUESTÃO 05

Uma empresa montou uma tenda de lona em uma praça sobre uma armação metálica. Essa armação é formada por dois octógonos regulares e um retângulo, conforme o desenho a seguir.

O valor do metro do metal utilizado nessa lona é igual a R$ 50,40



Fonte: SAEPE

Qual foi o custo dessa armação?

A) R$ 705,60
B) R$ 730,80
C) R$ 806,40
D) R$ 1 058,40
E) R$ 1 260,00

D12 - Resolver problema envolvendo o cálculo de área de figuras planas.

EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM

• Identificar o tipo de figura plana;

• Compreender o contexto que envolva cálculo de áreas;

• Modelar situações em contextos diversos que envolvem cálculo de área de figuras planas;

• Ler e interpretar informações em texto ou imagem para obtenção de área;

• Aplicar conceito de área em diversas situações cotidianas;

DETALHAMENTO DAS HABILIDADES

- **(EM13MAT201)** Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

O descritor D12 relaciona-se com a habilidade no que se refere ao cálculo de área, ou simplesmente a medida da superfície interna da figura. Construir modelos geométricos que utilizem o conceito de área; Resolver problemas em diferentes contextos; Aplicar o conhecimento em situações do cotidiano; Resolver situações-problema relacionando a área de uma figura plana.

RESUMO TEÓRICO

GEOMETRIA PLANA - ÁREA

Breve histórico

A palavra "área" tem uma longa história e evolução, vem do latim "area", que significa "espaço aberto" ou "praça". O termo latino é derivado da palavra "are", que significa "estar seco" ou "estar vazio". No latim clássico, a palavra "area" era usada para descrever um espaço aberto ou uma praça, especialmente em contextos urbanos. Com o tempo, o significado da palavra "área" se expandiu para incluir outras definições, como:

- Uma região ou território delimitado (século XIII)
- Uma superfície ou extensão de terra (século XIV)
- Uma medida de superfície ou extensão (século XVI)

Hoje em dia, a palavra "área" é usada em muitos contextos, incluindo:

- Geografia: para descrever uma região ou território
- Matemática: para descrever uma medida de superfície ou extensão
- Urbanismo: para descrever um espaço urbano ou uma praça

Algumas aplicações do cálculo de Área

Este objeto de conhecimento, como toda a Geometria, está entre os objetos com maior aplicabilidade no cotidiano. Desde as atividades de menor complexidade até aquelas que exigem conhecimento mais avançado em Matemática. Na sequência, são listadas algumas dessas aplicações possíveis.

a) A Arquitetura, a Engenharia e a Construção Civil permitem a aplicação do cálculo de áreas para a determinação de compartimentalização de projetos e na fase da construção, além de permitir o cálculo do custo e quantidade de materiais. Também é possível aplicar esse objeto no planejamento de jardins, parques e outras áreas verdes para determinar a quantidade de grama, plantas e outros materiais necessários.

b) A Geografia, a Cartografia e Engenharias afins utilizam o conceito de área no mapeamento de territórios e representação cartográfica dos limites e caractéristicas dessas regiões, seja de países, estados ou municípios, aplicando outros conceitos como escalas e proporcionalidades na representação desses territórios. Já numa abordagem mais prática, o conceito de área está presente também no estudo de solos, na agrimensura de localização de lotes de terra, entre outras aplicações.

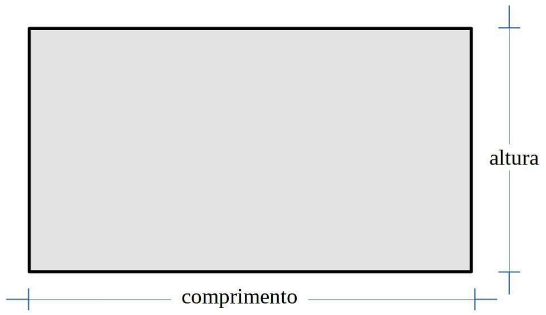
c) Na logística, a definição de setores que são atendidos por um serviço (saúde, educação, telefonia, etc.) ou rota de distribuição (indústrias e lojas, por exemplo) também utilizam o conceito de área nesses planejamentos. cada posto de saúde ou escola são pensados para atender a uma região, da qual podemos levantar algumas características, estando entre elas a área atendida.

Foram apresentados apenas alguns exemplos entre tantas aplicações possíveis do conceito de área. Podemos ainda identificar o uso de área em aplicações na Arte e design de interiores; nos esportes; na mineração, etc.

Cálculo da Área de Figuras Planas

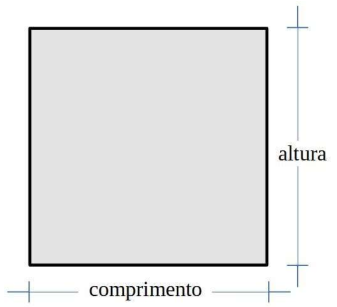
Para determinação da área, a forma da figura é determinante no cálculo, uma vez que não existe uma fórmula que permita o cálculo da área de qualquer figura plana. A seguir, são apresentadas as fórmulas associadas a cada categoria de figuras planas.

- **Área de um retângulo:** comprimento “**a**” e largura “**b**”.



$$A = \text{comprimento} \times \text{largura} = \mathbf{a\ .\ b}$$

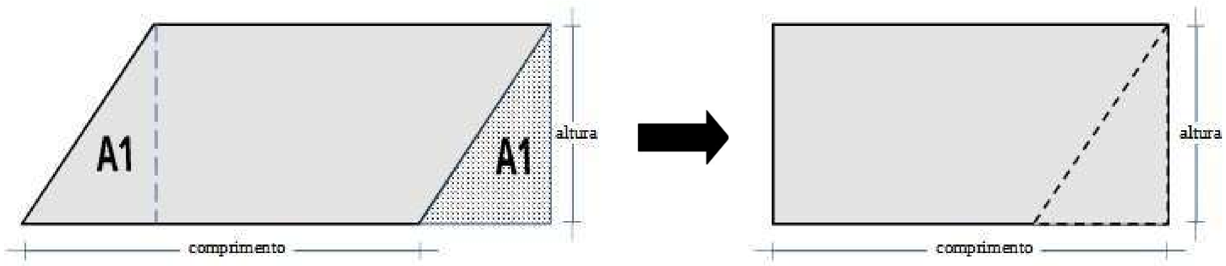
- Área de um quadrado: comprimento = largura = ***l***



$$A = \text{comprimento} \times \text{largura} = l^2$$

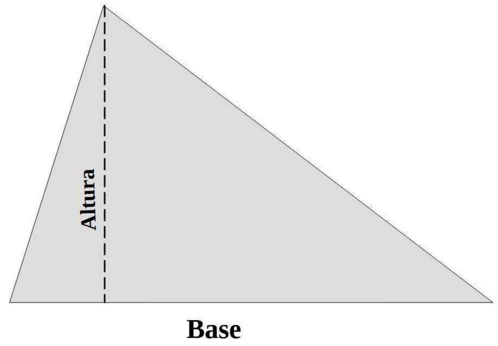
- **Área de um paralelogramo:** Pode-se decompor um paralelogramo é recompô-lo como um retângulo, conforme representação a seguir. Daí, as áreas de ambas as figuras são determinadas pela mesma fórmula. Sejam então **a** e **b**, respectivamente, o comprimento e a altura em um paralelogramo, a sua área é obtida por

$$A = \text{comprimento} \times \text{largura} = \mathbf{a\ .\ b}$$

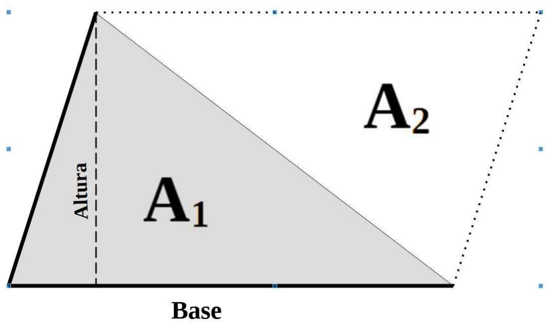


Obs.: Entre Paralelogramo, Retângulo e quadrado, o primeiro é o conceito mais amplo, tendo os dois últimos como casos particulares. Da mesma forma, entre Retângulo e Quadrado, tem-se este último como caso particular do primeiro.

- **Área de um triângulo:** Considere um triângulo qualquer, com uma de suas alturas, **h**, definida sobre a reta suporte de um dos lados, tomado como base **b** do triângulo.



Ao traçarmos segmentos equivalente a dois lados do triângulo, formando um quadrilátero, obtemos um paralelogramo, decomposto em duas regiões A_1 e A_2, de mesma área.



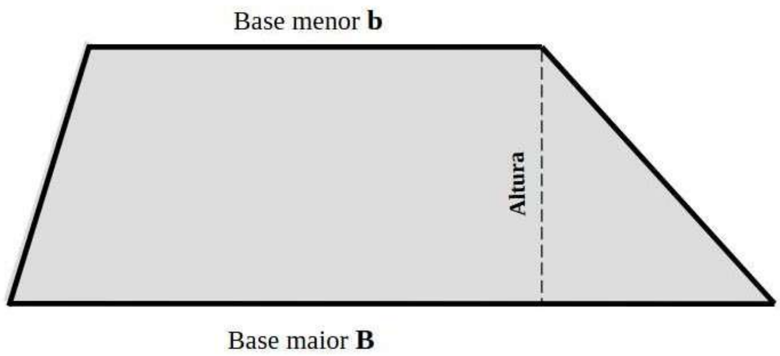
Neste sentido, a área de um triângulo é igual à metade da área do paralelogramo de mesma base **b** e altura **h**. Desta forma

$$A = \frac{base\ x\ altura}{2}$$

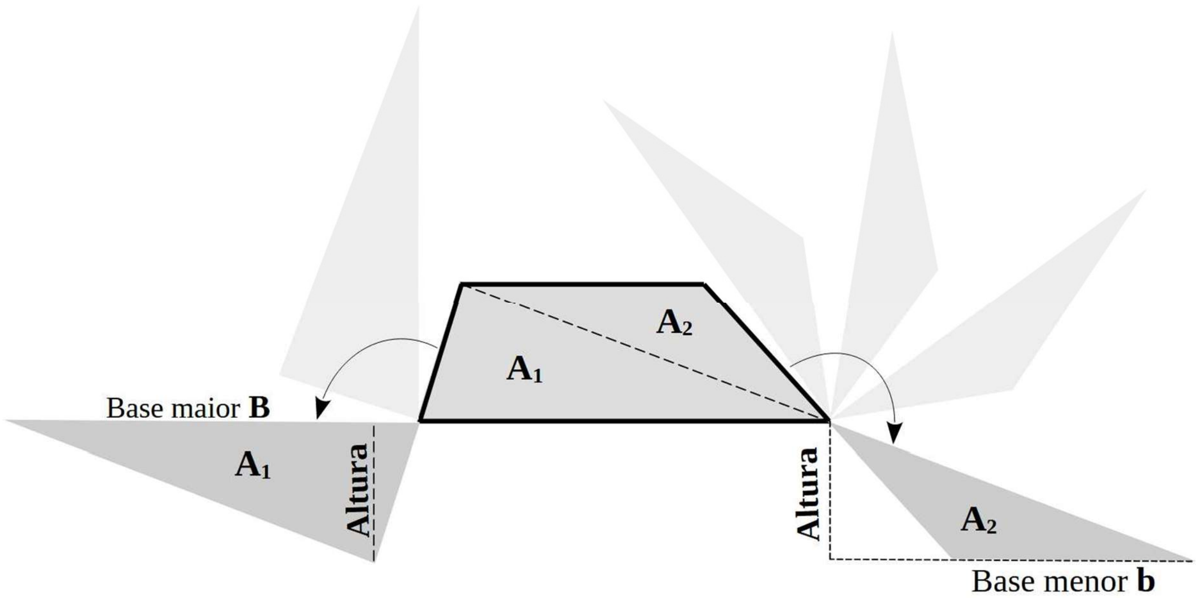
Obs.: Quando tem-se um triângulo equilátero de lado *l* , a fórmula anterior gera a fórmula a seguir para o cálculo da área de triângulos deste tipo.

$$\mathbf{A} = \frac{\ell^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

- **Área de um trapézio:** Considere um trapézio qualquer de base maior **B** e base menor **b**, com altura **h**, conforme figura a seguir.



Podemos decompor a figura acima em dois triângulos, definindo as bases maior e menor do trapézio como as bases nos triângulos obtidos, conforme é mostrado a seguir.



Calculando, como já apresentado, a área em cada um dos triângulos, temos

$$A_1 = \frac{B \, . \, h}{2} \qquad \text{e} \qquad A_2 = \frac{b \, . \, h}{2}$$

a área do trapézio é, então, obtida pela soma de A_1 e A_2 , ou seja,

$$A = A_1 + A_2 = \frac{B \, . \, h}{2} + \frac{b \, . \, h}{2}$$

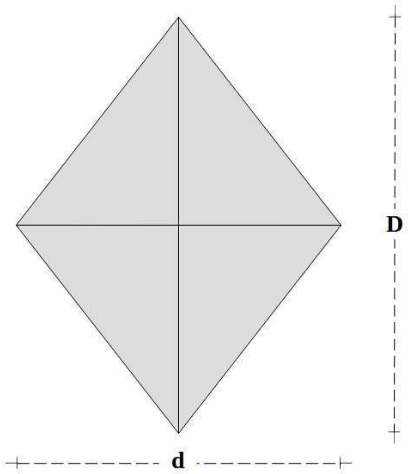
$$A = \frac{B \, . \, h + b \, . \, h}{2}$$

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Ou ainda,

$$A = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor}) \cdot h}{2}$$

- Área de um Losango: Dado um losango de diagonal maior **D** e diagonal menor **d**, conforme figura a seguir.



É fácil ver que podemos decompor esta figura em quatro triângulos retângulos, cada um deles com base $\frac{d}{2}$ e altura $\frac{D}{2}$. Como a área do losango é igual a soma das áreas dos quatro triângulos, temos

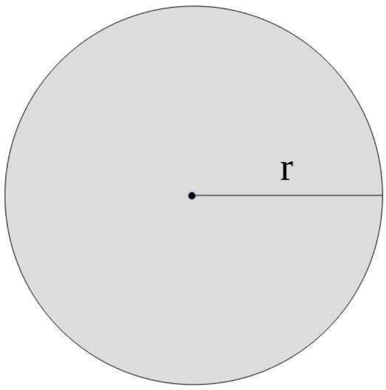
$$A = \frac{\frac{d}{2} \cdot \frac{D}{2}}{2} + \frac{\frac{d}{2} \cdot \frac{D}{2}}{2} + \frac{\frac{d}{2} \cdot \frac{D}{2}}{2} + \frac{\frac{d}{2} \cdot \frac{D}{2}}{2}$$

$$A = 4 \cdot \frac{\frac{d}{2} \cdot \frac{D}{2}}{2}$$

$$A = 2 \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{D}{2}$$

$$A = \frac{D\,d}{2}$$

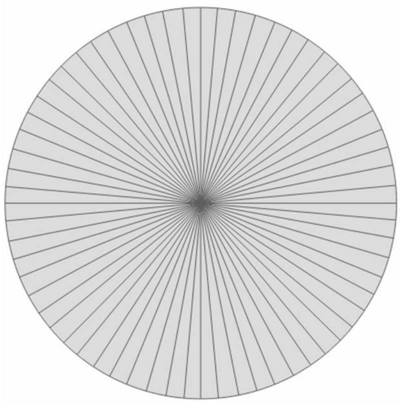
- **Área de um círculo:** Considere um círculo de raio **r**, conforme ilustrado a seguir.



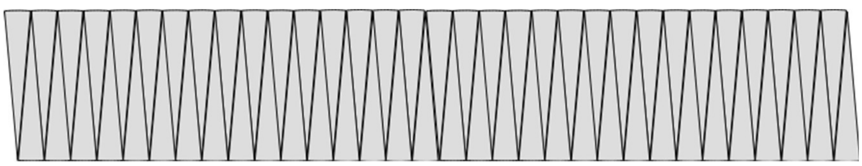
Traçando uma quantidade **n** de diâmetros dividindo o círculo em arcos congruentes, formamos **2n** arcos congruentes.

Exemplo: dividindo o círculo com 1 diâmetro, dividimos em duas partes iguais. Traçando 2 diâmetros, criamos 4 arcos, etc.

Seguindo com a divisão proposta, obtemos uma figura como a apresentada abaixo:

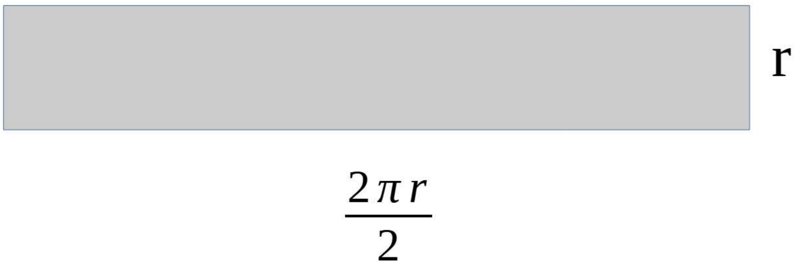


Decompondo a figura anterior e organizando os arcos como a seguir,



podemos perceber que essa forma se aproxima de um retângulo, e se continuarmos a fazer essa divisão do círculo, essa aproximação é ainda maior; dizemos que essa forma está tendendo para um retângulo.

Considerando que o perímetro da circunferência é $2 \, . \, \pi \, . \, r$ e, ainda, que metade desse perímetro forma a base da figura anterior, o retângulo para o qual ela está tendendo terá as seguintes medidas



e, com essa equivalência, podemos determinar uma fórmula para a área do círculo, a partir da área de um retângulo

$$A = b \, . \, h = \frac{2\pi}{2} \, . \, r = \pi r \, . \, r = \pi \, . \, r^2$$

ou ainda,

$$A = \pi \, . \, r^2$$

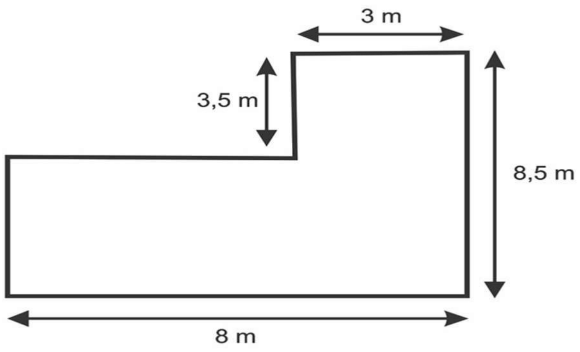
ATIVIDADES PROPOSTAS

QUESTÃO 01

Um festival foi realizado num campo de 220 m por 50 m. Sabendo que por cada 2 m^2 havia, em média, 6 pessoas, quantas pessoas havia no festival?
A) 11 000
B) 22 000
C) 33 000
D) 44 000
E) 66 000

QUESTÃO 02

O salão de uma casa tem o formato da figura a seguir.



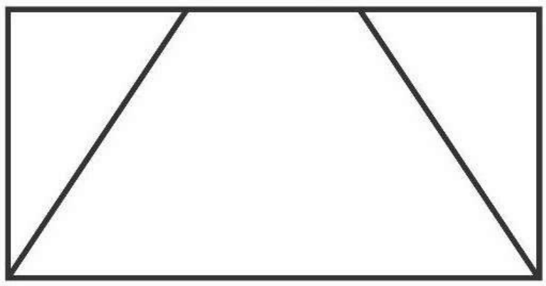
O dono do salão deseja colocar lajotas em toda a área desse salão, para realizar esse serviço um pedreiro cobra R$ 40,00 o metro quadrado.

Qual vai ser o valor cobrado pelo pedreiro para colocar lajotas nesse salão?

A) R$ 780,00
B) R$ 920,00
C) R$ 1 120,00
D) R$ 1 600,00
E) R$ 2 020,00

QUESTÃO 03

Um terreno retangular teve sua área dividida em dois triângulos e um trapézio, como mostra a figura a seguir:



Fonte: Os autores

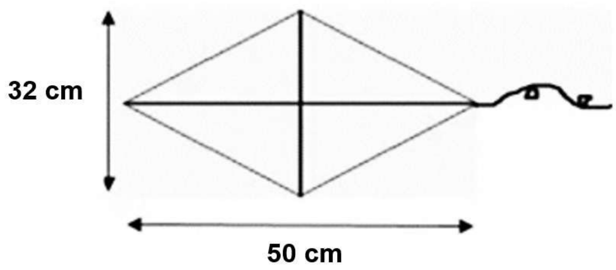
O retângulo possui 16 m de comprimento e 6 m de largura, já o trapézio possui a medida da base menor igual a 5 m.

A soma da área dos dois triângulos é de:

A) 30 m^2
B) 33 m^2.
C) 40 m^2
D) 48 m^2
E) 63 m^2

QUESTÃO 04

Uma pessoa está empinando sua pipa e pretende construir outra alterando as dimensões representadas na imagem.



Fonte: tudosaladeaula.com

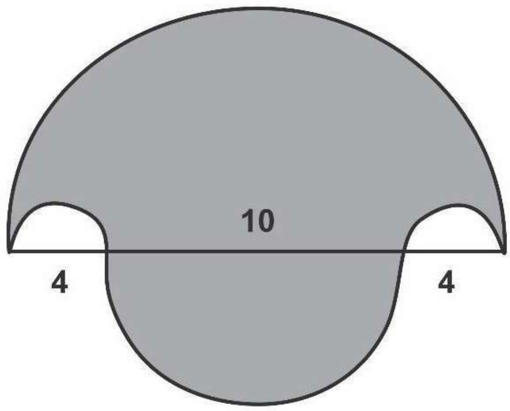
Ele pretende reduzir em 50% as dimensões.

Quantos cm^2 de papel, a pessoa gastará na confecção da nova pipa?

A) 80
B) 82
C) 100
D) 160
E) 200

QUESTÃO 05

Um designer gráfico projetou um logotipo na cor cinza no formato da imagem a seguir.



As medidas desse logotipo estão em cm, considerando $\pi = 3$, a área que esse logotipo irá ocupar em uma folha de papel é

A) 159,0 cm^2
B) 147,0 cm^2
C) 121,5 cm^2
D) 49,5 cm^2
E) 37,5 cm^2

QUINZENA 12

D03 - Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.

D13 - Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, cilindro).

23ª SEMANA

23ª SEMANA
23ª SEMANA
23ª SEMANA

D03 - Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações ou vistas.

EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM

- O aluno será capaz de **identificar** e **relacionar** diferentes poliedros (como cubos, pirâmides, prismas, etc.) e corpos redondos (como esferas, cilindros, cones, etc.) com suas respectivas planificações ou vistas (desenhos bidimensionais que representam a forma tridimensional do objeto).
- **Reconhecer** e **nomear** diferentes poliedros e corpos redondos.
- **Identificar** planificações ou vistas de poliedros e corpos redondos.
- **Relacionar** as planificações ou vistas com os objetos tridimensionais correspondentes.
- **Identificar** as características e propriedades dos poliedros e corpos redondos, como número de faces, arestas, vértices, etc.
- **Resolver** problemas que envolvam a identificação e a relação entre poliedros e corpos redondos e suas planificações ou vistas.

DETALHAMENTO DAS HABILIDADES

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define, de modo progressivo, as **aprendizagens essenciais** ao longo da educação básica, considerando suas etapas e modalidades.
Para garantir as aprendizagens essenciais, a BNCC apresenta, como uma de suas principais características, as **Expectativas de Aprendizagem**, que consiste em descrições claras e concisas do que os alunos devem ser capazes de fazer, saber e entender ao final de cada etapa da educação básica.
É necessário detalhar as habilidades que garantam o fazer, saber e entender, e, além disso, associá-las ao descritor focal.

- **EF04MA17:** Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais;
- **EF05MA16:** Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos;
- **EM13MAT505:** Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados

RESUMO TEÓRICO

POLIEDROS E CORPOS REDONDOS COM SUAS

PLANIFICAÇÕES OU VISTAS

Poliedros: Formas, História e Conexões com o Mundo Atual

Os poliedros são sólidos geométricos limitados por polígonos, que, por sua vez, são partes de um plano limitadas por segmentos de reta que se tocam apenas em seus extremos. Estes objetos sempre fascinaram a humanidade. Desde as primeiras civilizações, formas geométricas sólidas já apareciam em construções, artefatos e observações astronômicas. Na Grécia Antiga, pensadores como Platão estudaram intensamente os cinco chamados “sólidos perfeitos” — os poliedros regulares — atribuindo a eles significados filosóficos e até espirituais, associando-os aos elementos da natureza: fogo, terra, ar, água e éter.

Com o passar do tempo, o estudo dos poliedros passou a ter aplicações práticas em áreas como arquitetura, engenharia, arte e, atualmente, nas ciências da computação e impressão 3D. Poliedros estão presentes em estruturas arquitetônicas modernas, como as geodésicas de Buckminster Fuller, e são fundamentais na modelagem de objetos virtuais em ambientes digitais, como jogos, realidade aumentada e simulações científicas.

Poliedros na Educação Básica e nas Avaliações Oficiais

Na Educação Básica, os poliedros fazem parte do currículo da Matemática, principalmente nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Estudá-los ajuda os estudantes a desenvolverem o raciocínio espacial, compreenderem propriedades geométricas e se prepararem para provas como o **SAEB** e o **ENEM**, que frequentemente trazem questões envolvendo:

- Visualização e contagem de faces, vértices e arestas;
- Interpretação de planificações de sólidos;
- Identificação de simetrias e perspectivas;
- Relações métricas (áreas, volumes, diagonais);
- Aplicações práticas da geometria no mundo real.

Esses temas também dialogam com as competências gerais da BNCC, como o pensamento científico, crítico e criativo, e a cultura digital.

Poliedros e a Tecnologia: Novas Ferramentas, Novos Olhares

Com o avanço das tecnologias educacionais, hoje é possível explorar os poliedros de formas inovadoras. Softwares como **GeoGebra 3D**, **Tinkercad**, **Blender** e simuladores de realidade virtual permitem criar, manipular e explorar sólidos geométricos com interatividade. Isso torna a aprendizagem mais envolvente e significativa, promovendo a interdisciplinaridade com áreas como Artes, Física e Computação.

Poliedros na Arte: Entre a Estética e a Matemática

Vários artistas ao longo da história utilizaram os poliedros em suas obras. O mais famoso talvez seja **M. C. Escher**, que explorou as tesselações e perspectivas impossíveis, muitas vezes baseadas em formas poliédricas. O escultor **George W. Hart** também é conhecido por suas complexas estruturas baseadas em sólidos geométricos. Mais recentemente, artistas digitais e designers criam obras imersivas a partir de estruturas poliédricas com auxílio de algoritmos e modelagens computacionais.

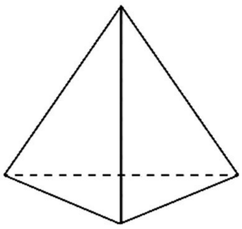
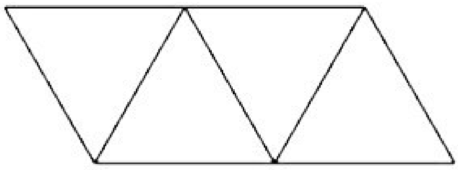
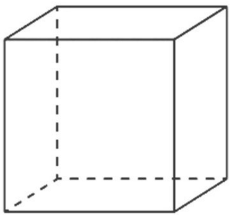
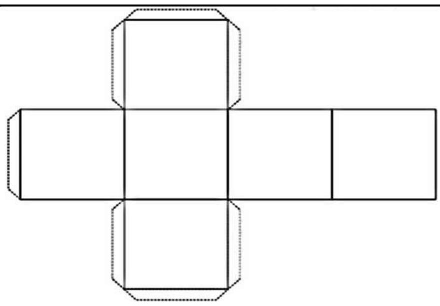
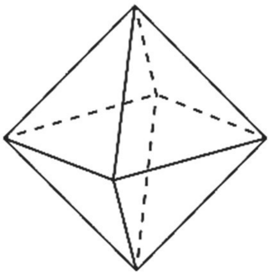
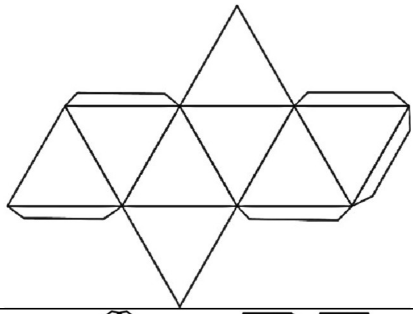
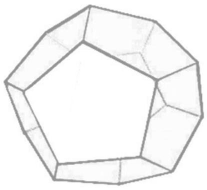
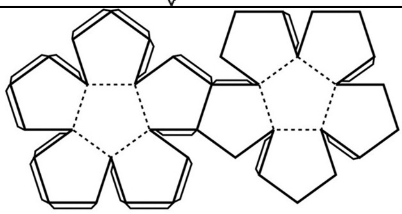
A técnica da **perspectiva**, essencial nas artes visuais, também é crucial na representação de poliedros. Desde o Renascimento, artistas como Leonardo da Vinci utilizaram projeções geométricas para desenhar sólidos com profundidade e realismo, antecipando o que hoje é feito com softwares gráficos.

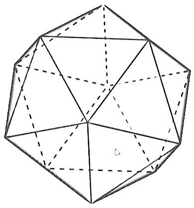
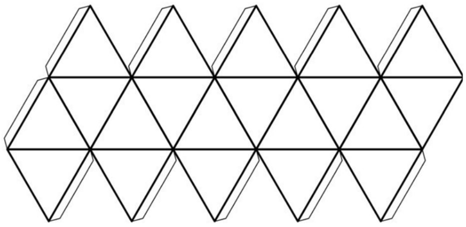
Poliedros de Platão

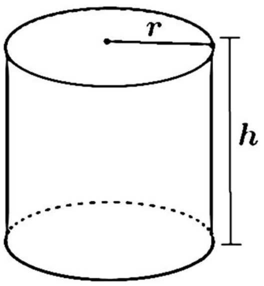
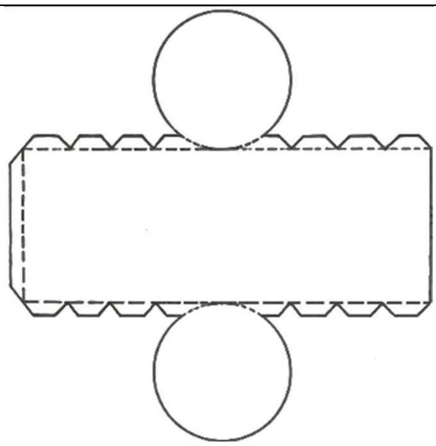
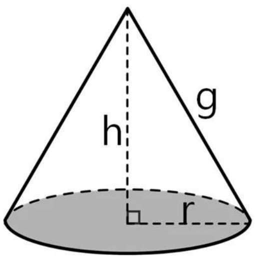
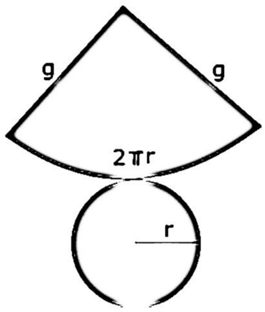
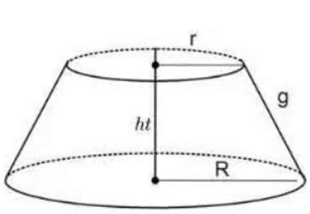
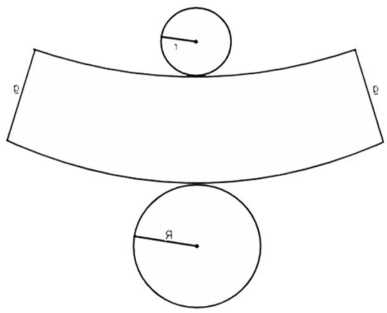
Poliedros de Platão são sólidos geométricos, formas com três dimensões, limitados por um número finito de polígonos planos. Esses polígonos formam as faces do poliedro.

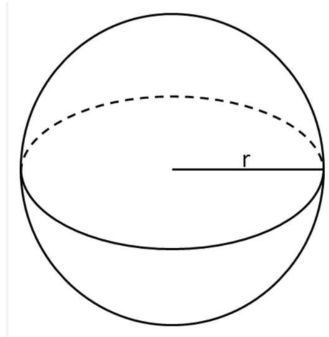
Obs: Existem cinco poliedros regulares: **Tetraedro**, **Hexaedro** (ou **Cubo**), **Octaedro**, **Dodecaedro**, **Icosaedro**.

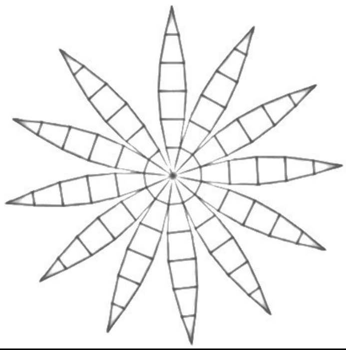
Os sólidos platônicos são poliedros especiais, eles são formados por faces iguais. Todas as faces destes sólidos são polígonos regulares.

Nome	**Planificação**	**Elementos**
Tetraedro 		4 faces; triangulares 4 vértices; 6 arestas.
Hexaedro (cubo) 		6 faces quadrangulares; 8 vértices; 12 arestas.
Octaedro 		8 faces triangulares; 6 vértices; 12 arestas.
Dodecaedro 		12 faces pentagonais; 30 arestas; 20 vértices.

Icosaedro 		20 faces triangulares; 12 vértices; 30 arestas.

Corpos redondos: sãos sólidos geométricos com, pelo menos, uma superfície arredondada. Estes sólidos podem rolar sobre estas superfícies. São formas tridimensionais, ou seja, ocupam espaço, por isso, possuem volume.	
Cilindro 	
Cone 	
Tronco de cone 	
Esfera	

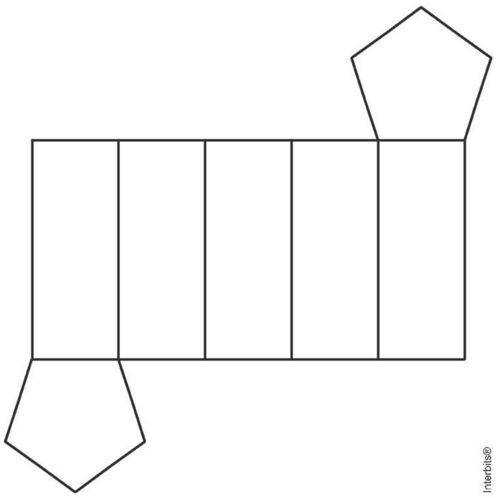




ATIVIDADES PROPOSTAS

QUESTÃO 01

Um lojista adquiriu novas embalagens para presentes que serão distribuídas aos seus clientes. As embalagens foram entregues para serem montadas e têm forma dada pela figura.



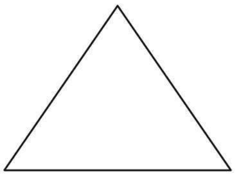
Após montadas, as embalagens formarão um sólido com quantas arestas?

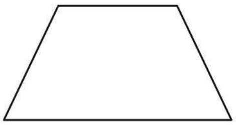
a) 10
b) 12
c) 14
d) 15
e) 16

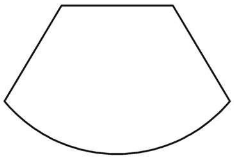
QUESTÃO 02

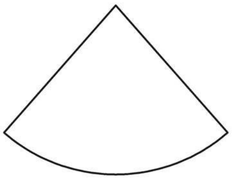
Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base (base do cone) até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida.

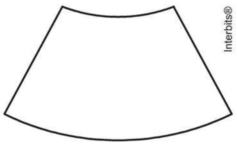
Qual deverá ser a forma do adesivo?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

QUESTÃO 03

(ENEM) Uma empresa necessita colorir parte de suas embalagens, com formato de caixas cúbicas, para que possa colocar produtos diferentes em caixas distintas pela cor, utilizando para isso um recipiente com tinta, conforme Figura 1. Nesse recipiente, mergulhou-se um cubo branco, tal como se ilustra na Figura 2. Desta forma, a parte do cubo que ficou submersa adquiriu a cor da tinta.

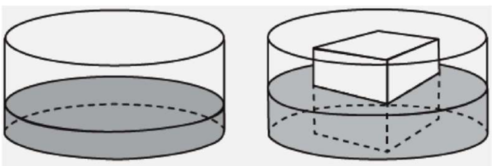
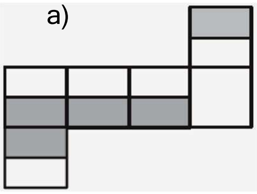


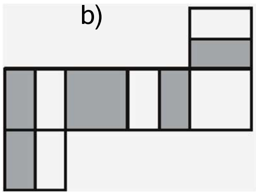
Figura 1 Figura 2

Qual é a planificação desse cubo após submerso?

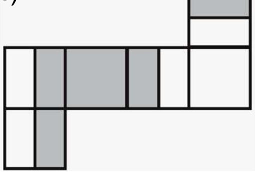
a)



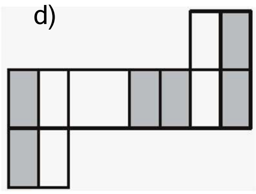
b)



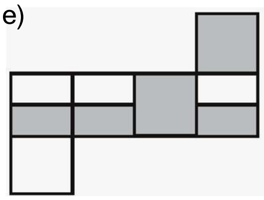
c)



d)

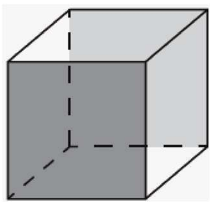


e)



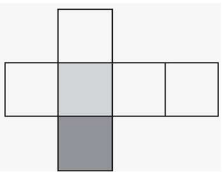
QUESTÃO 04

Uma empresa que embala seus produtos em caixas de papelão, na forma de hexaedro regular, deseja que seu logotipo seja impresso nas faces opostas pintadas de cinza, conforme a figura:

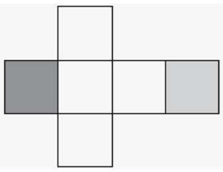


A gráfica que fará as impressões dos logotipos apresentou as seguintes sugestões planificadas:

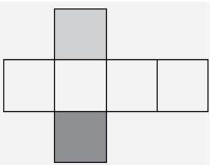
I



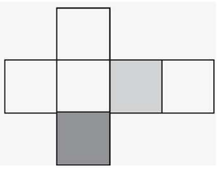
II



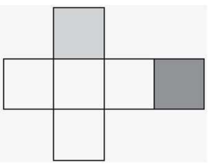
III



IV



V



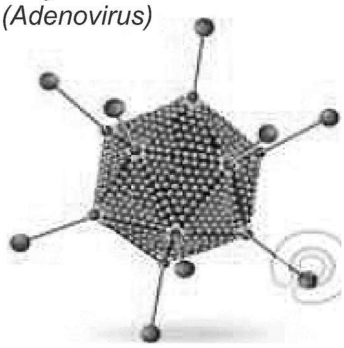
Que opção sugerida pela gráfica atende ao desejo da empresa?

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

QUESTÃO 05

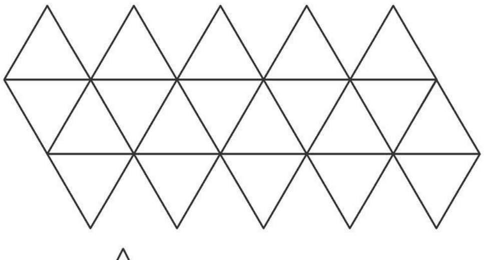
Observe, abaixo, uma imagem desse vírus que tem a forma de um sólido geométrico, conhecido como icosaedro.

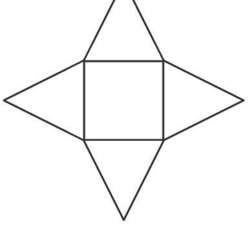
Polyhedral
(Adenovirus)

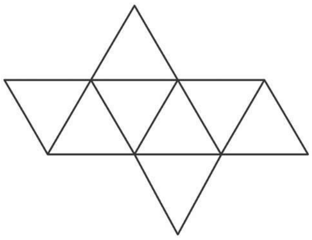


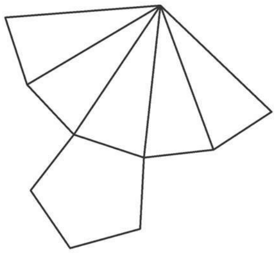
Disponível em: <http://www.thinkstockphotos.com/image/stockillustration-shapes-of-viruses/507687357>. Acesso em: 14 set. 2016.

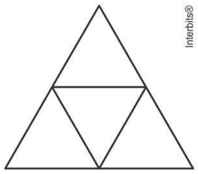
Qual é a planificação do sólido representado por esse vírus?

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

D13 - Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (prisma, cilindro).

EXPECTATIVA DE APRENDIZAGEM

- O estudante será capaz de **identificar** e **resolver** problemas que envolvam a área total e/ou volume de prisma e cilindro.
- O estudante será capaz **identificar** e **aplicar** fórmulas e conceitos geométricos para calcular e encontrar soluções precisas e coerentes que envolvam a área total e/ou volume de prisma e cilindro.
- O estudante será capaz de **compreender** as propriedades e relações espaciais dos objetos geométricos de prisma e cilindro.
- O estudante será capaz de **analisar** cálculos em situações contextualizadas envolvendo área total e/ou volume de prismas e cilindros.
- O estudante será capaz de **avaliar** cálculos em situações e problemas em seu cotidiano envolvendo
  área total e/ou volume de prismas e cilindros.

DETALHAMENTO DAS HABILIDADES

Espera-se que os estudantes desenvolvam a habilidade de identificar e aplicar fórmulas para calcular área total prisma e cilindro, resolver problemas que envolvam volume de prisma e cilindro.

Além de analisar e avaliar cálculos em situações e problemas em contexto práticos envolvendo área total e/ou volume de prismas e cilindros.

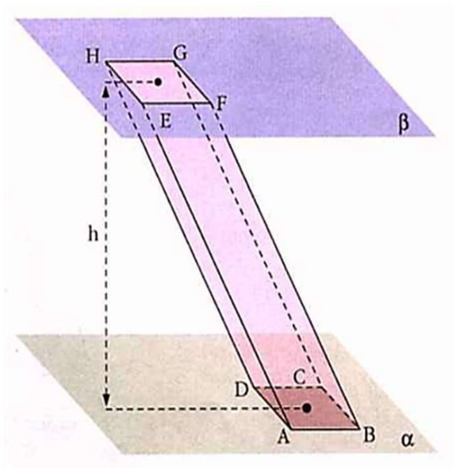
A seguir, são apresentadas habilidades da BNCC diretamente ligadas às expectativas de aprendizagem elencadas para o descritor focal (D13):
EF04MA17: Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais.
EM13MAT201: Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa
EM13MAT309: Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT307: Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
EM13MAT504: Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.

RESUMO TEÓRICO

GEOMETRIA ESPACIAL: ORIGEM, NECESSIDADE E MEDIÇÕES

Principais Figuras Espaciais, Suas Áreas e Volumes

Prisma: Consideremos um quadrilátero qualquer ABCD contidos em um plano α E um segmento XY de uma reta concorrente com α. Prisma quadrangular é o conjunto dos pontos de todos os segmentos paralelos e congruentes a $\underline{XY}$, que têm uma extremidade nesse quadrilátero e que estão no mesmo semiplano determinado por α.



Elementos do prisma:

Bases: ABCD E EFGH (são polígonos congruentes contidos em planos paralelos);
Faces laterais: ABFE, BCGF, CDGH, DAEH (são paralelogramos)

Arestas das bases: $A\underline{B}$, $B\underline{C}$, $C\underline{D}$, $D\underline{A}$, $E\underline{F}$, $F\underline{G}$, $G\underline{H}$, $H\underline{E}$
Arestas laterais: $A\underline{E}$, $B\underline{F}$, $C\underline{G}$, $D\underline{H}$
Altura (h): distância entre os dois planos que contém as bases.
Obs.: Se no lugar do quadrilátero considerarmos qualquer outro polígono (triângulo, pentágono etc.), o prisma receberá o nome desse outro polígono. Aqui estudaremos aqueles de bases convexas, que chamaremos de prismas convexo.
Classificação dos Prismas podem ser: em relação a inclinação das arestas laterais ou em relação ao número de arestas de uma das bases.
Prisma quanto inclinações das arestas laterais: prismas retos ou prismas oblíquos.

Prismas retos: as arestas laterais são perpendiculares às bases (as faces laterais são retângulos).

Reto

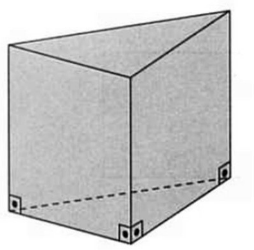


Figura 2- prisma- Xavier e Barreto, FTD, 2005

Prismas oblíquos: as arestas laterais não são perpendiculares às bases (as faces laterais são paralelogramos).

Oblíquo

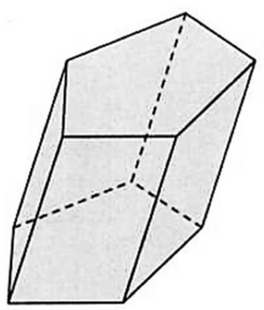


Figura 3- prisma- Xavier e Barreto, FTD, 2005

Prismas em relação ao número de arestas de uma das bases: Prisma quadrangular reto, prisma pentagonal reto e prisma hexagonal oblíquo.

Prisma quadrangular reto: base com 4 arestas;

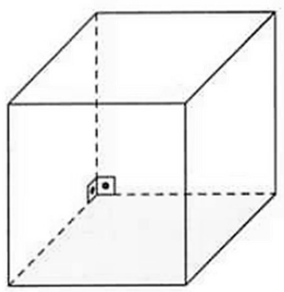


Figura 4- prisma- Xavier e Barreto, FTD, 2005

Prisma pentagonal reto: base com 5 arestas

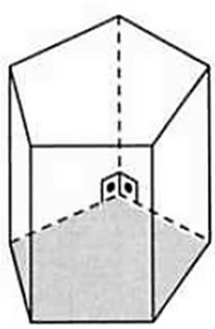


Figura 5- prisma- Xavier e Barreto, FTD, 2005

Prisma hexagonal oblíquo: base com 6 arestas;

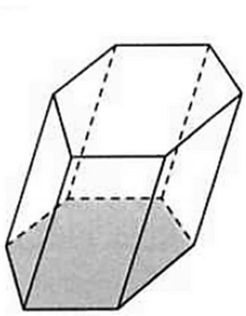


Figura 6- prisma- Xavier e Barreto, FTD, 2005

Obs.: Quando um prisma é reto e sua base são polígonos regulares, ele é chamado de prisma regular.

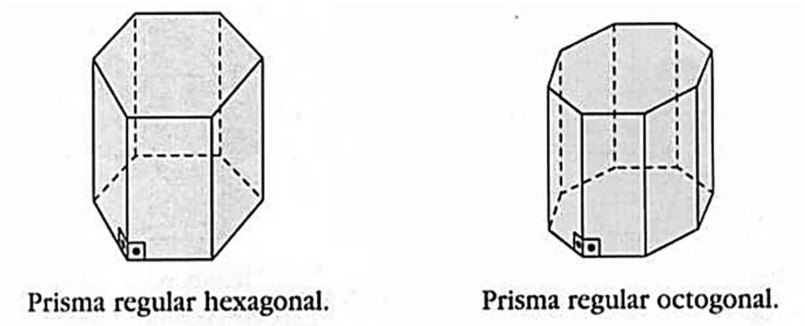


Figura 7- prisma- Xavier e Barreto, FTD, 2005

Área da superfície total do prisma reto

A área da superfície total do prisma reto é calculada pela soma das áreas das superfícies das bases com a superfície lateral, ou ainda:

$A_t = 2.A_b + A_l$; $\quad onde \; \{A_b\text{: área da superfície da base } A_t\text{: área da superfície lateral}$

Planificação do prisma:

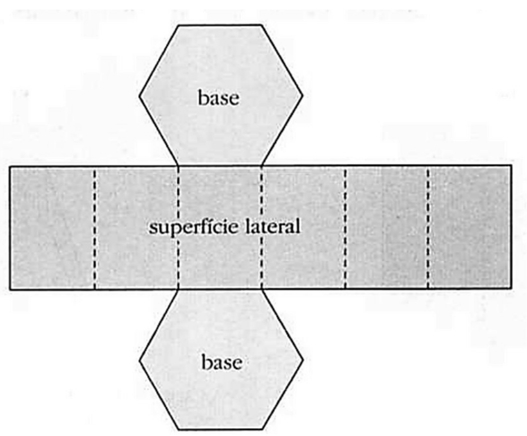


Figura 8- prisma- Xavier e Barreto, FTD, 2005

Volume do prisma reto
O volume do prisma é calculado pelo produto da área da base (A_b) pela altura (h).

$$V = A_\mathrm{b}.h$$

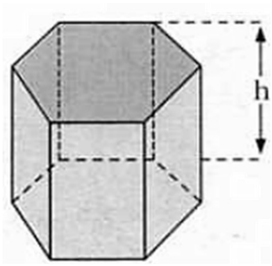


Figura 9- prisma- Xavier e Barreto, FTD, 2005

Obs.: No prisma reto a altura tem a mesma medida que a aresta lateral.

Paralelepípedo
Paralelepípedo são prismas que têm paralelogramo como base.

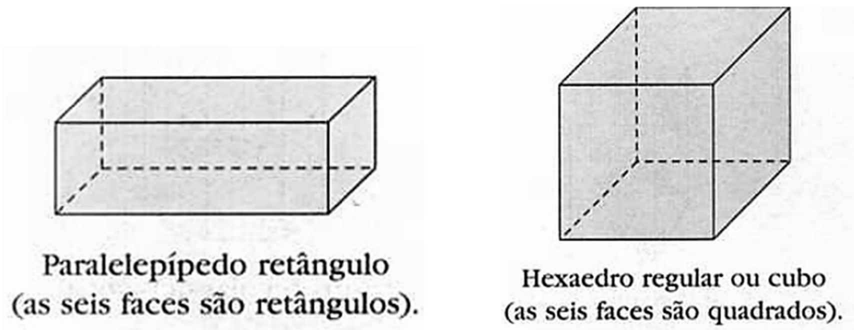


Figura 10- prisma- Xavier e Barreto, FTD, 2005

Obs.: O volume do prisma regular é igual ao volume do paralelepípedo retângulo:

$$V_{\text{prisma retangular}} = V_{\text{paralelepípedo retângulo}}$$
$$V_{\text{prisma}} = A_\mathrm{b}.h$$

Paralelepípedo retângulo
Diagonal do paralelepípedo retângulo

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

onde **a, b e c** são arestas desse paralelepípedo.

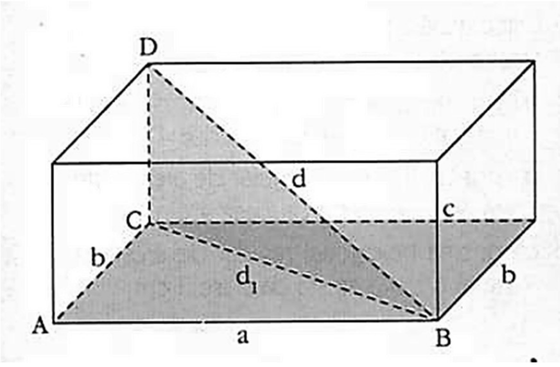


Figura 11- prisma- Xavier e Barreto, FTD, 2005

Cubo
Área total:
Como a área total de um cubo de aresta **a** é dado pela área de 6 quadrados de aresta **a**, logo $A_t = 6. A_{face}$, isto é, $A_t = 6. a^2$.

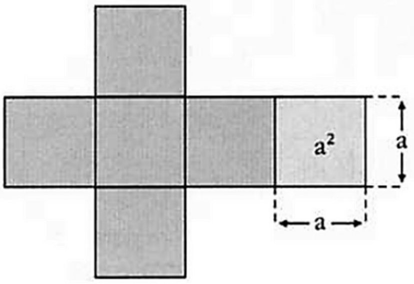


Figura 12- prisma- Xavier e Barreto, FTD, 2005

Volume:
Sabendo que $V = A_b.h$ e que a aresta da base do cubo e sua altura são iguais a a, obtemos:

$$V = a^2.a = a^3$$

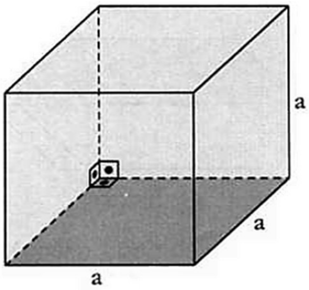


Figura 13- prisma- Xavier e Barreto, FTD, 2005

Cilindros

Sejam R um círculo contido num plano β e $X\underline{Y}$ um segmento de uma reta s concorrente com β denominando cilindro o conjunto dos pontos dos segmentos paralelos e congruentes a $\underline{XY}$ que uma extremidade em R e que estão no mesmo semi-espaço determinado por β.

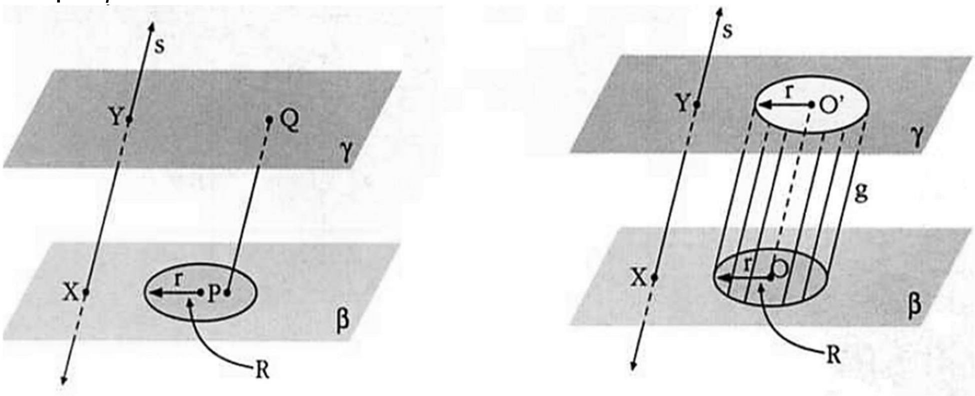


Figura 14- cilindro- Xavier e Barreto, FTD, 2005

Elementos do cilindro

Bases: são os círculos de centro o e o' e raios de medida **r.**

Geratriz: é todo segmento paralelo ao $\underline{OO'}$ e com os extremos nas circunferências das bases indicaremos sua medida por **g**.
Altura (h): distância entre os planos das bases.

Classificação
O cilindro circular pode ser obtido como oblíquo ou reto conforme a posição de uma geratriz em relação aos planos das bases.

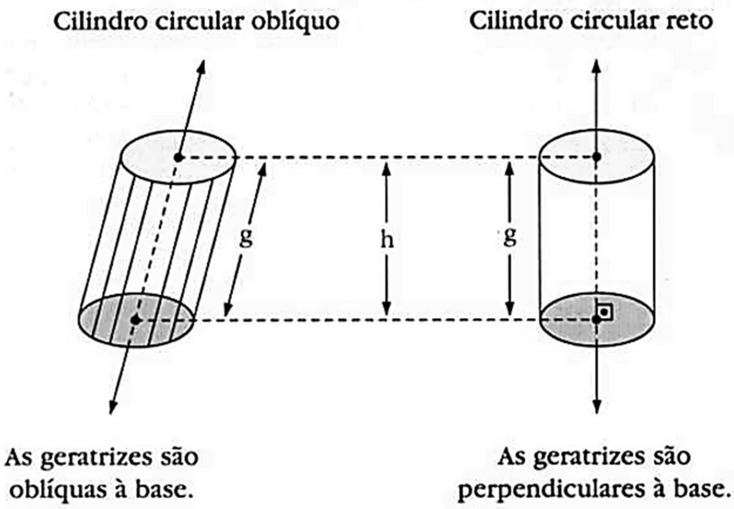


Figura 15- cilindro- Xavier e Barreto, FTD, 2005

Cilindro circular reto

Cilindro circular reto ou de revolução é um sólido gerado ´pela rotação de 360º de um retângulo OABO' em torno de um eixo que contém um de seus lados.

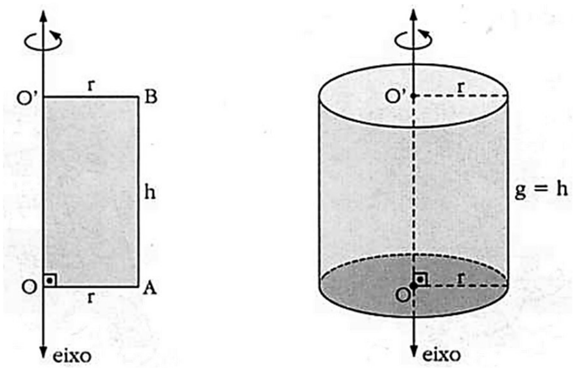


Figura 16- cilindro- Xavier e Barreto, FTD, 2005

Obs.: No cilindro circular reto a medida da geratriz é igual a altura.
Obs.: A secção transversal, produzida pela intersecção de um cilindro com um plano paralelo às bases, é circular.

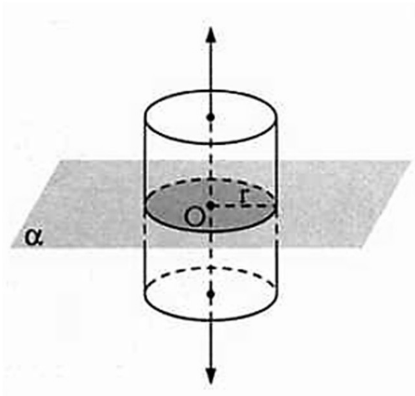


Figura 17- cilindro- Xavier e Barreto, FTD, 2005

A secção meridiana, produzida pela intersecção de um cilindro circular reto com o plano que contém o eixo, é um retângulo.

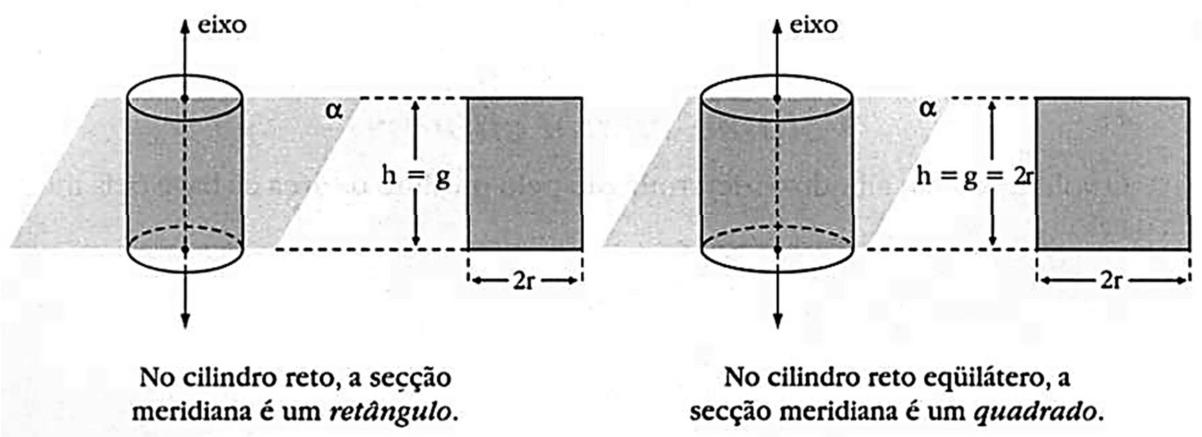


Figura 18- cilindro- Xavier e Barreto, FTD, 2005

Área da base de um lateral de um cilindro reto

$$A_{\mathrm{b}} = \pi r^2$$

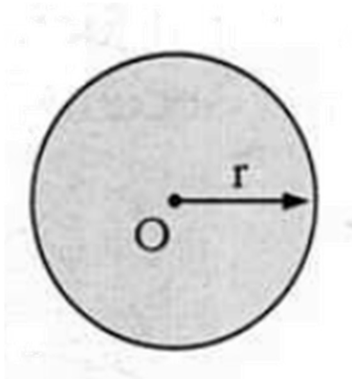


Figura 19- círculo- Xavier e Barreto, FTD, 2005

Área da superfície lateral de um cilindro reto
A área da superfície lateral é igual a área de um retângulo:

$$A_{\mathrm{b}} = 2\pi r . h$$

Área da superfície total
A superfície total compreende a superfície da base e a superfície lateral.

$$A_{\mathrm{T}} = 2 . A_{\mathrm{b}} + A_{\mathrm{L}}$$

$$A_{\mathrm{T}} = 2 . (\pi r^2) + 2\pi r . h$$

$$A_{\mathrm{T}} = 2 . \pi r(h + r)$$

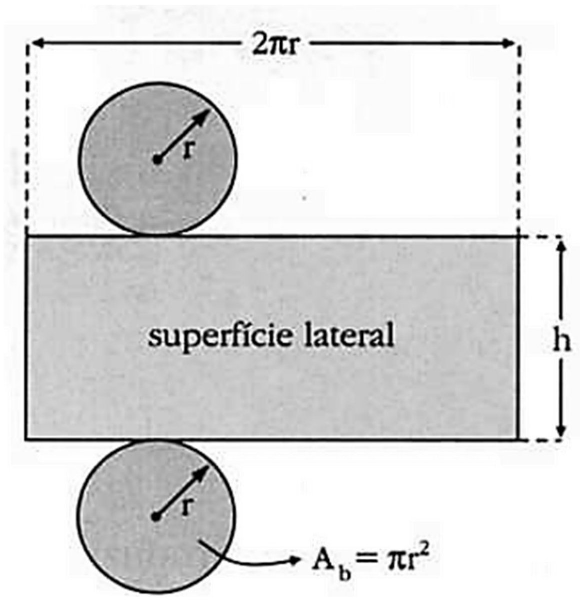


Figura 20- cilindro- Xavier e Barreto, FTD, 2005

Volume de um cilindro
O volume de um cilindro é determinado pelo produto da área da base pela medida da altura.

$$V = A_{\mathrm{b}} . h$$

$$V = A_{\mathrm{b}} . h \rightarrow V = \pi r^2 .\mathrm{h}$$

Obs.: Se o prisma e o cilindro têm secções transversais S_1 e S_2 com áreas iguais, podemos usar o Princípio de Cavalieri e afirmar que o volume do cilindro é igual ao volume do prisma. Desde que $\alpha // \beta$, α e β determinem as secções transversais S_1 e S_2 com áreas respectivamente iguais às suas bases.

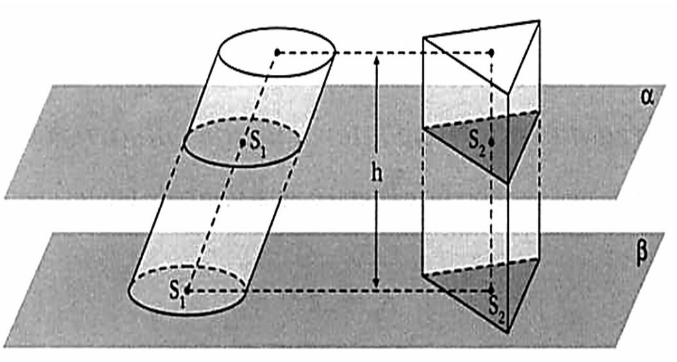


Figura 21- cilindro- Xavier e Barreto, FTD, 2005

$$V_{\text{cilindro}} = V_{\text{prisma}} = \acute{a}rea\ da\ base\ .\ altura$$

Sabendo que a área do cilindro é um círculo, segue

$$V_{\text{cilindro}} = \pi r^2.\,\mathrm{h}$$

ATIVIDADES PROPOSTAS

QUESTÃO 01

Uma piscina retangular de 10 m × 15 m, de fundo horizontal, está com água até 1,5 m de altura. Para o tratamento do líquido na piscina, o profissional responsável utilizará um produto químico que deve ser misturado à água, obedecendo à razão de um pacote para cada 4500 litros.

Considere 1 m^3 equivalente a 1 000 L.

O número de pacotes a serem usados é:

A) 45
B) 50
C) 55
D) 60
E) 75

QUESTÃO 02

Uma indústria de produtos alimentícios deu uma tarefa para o seu setor de produção de embalagens. A tarefa constituía em produzir duas embalagens de formatos diferentes, mas que tivessem o mesmo volume e a mesma altura. As embalagens teriam que ter o formato, uma na forma de cilindro com raio de 5cm e a outra na forma de um paralelepípedo de base quadrada.

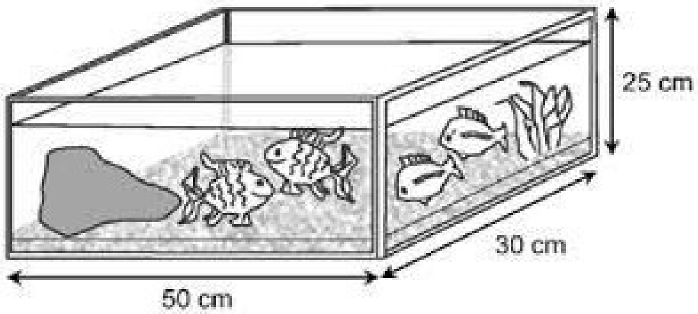
Considere 3 como aproximação de π.

A medida, em centímetro, da aresta da base da embalagem em forma de paralelepípedo é

A) $3\sqrt{5}$
B) $3\sqrt{3}$
C) $5\sqrt{5}$
D) $5\sqrt{3}$
E) $\sqrt{5}$

QUESTÃO 03

Roberto comprou um aquário com formato de bloco retangular, cujas medidas internas estão representadas na figura a seguir.



Fonte:bancoquestoes.com.br

O valor de cada metro quadrado de vidro para confeccionar esse aquário corresponde a R$ 1000,00. É cobrado uma taxa de R$ 50,00 para outros materiais que será necessária para montar esse aquário.

Qual vai ser o valor pago por Roberto ao adquirir esse aquário?

A) R$ 500,00
B) R$ 550,00
C) R$ 600,00
D) R$ 650,00
E) R$ 700,00

QUESTÃO 04

Uma loja comercializa cinco modelos de caixas-d’água (I, II, III, IV e V), todos em formato de cilindro reto de base circular. Os modelos II, III, IV e V têm as especificações de suas dimensões dadas em relação às dimensões do modelo I, cuja profundidade é P e área da base é A_b, como segue:

- modelo II: o dobro da profundidade e a metade da área da base do modelo I;
- modelo III: o dobro da profundidade e a metade do raio da base do modelo I;
- modelo IV: a metade da profundidade e o dobro da área da base do modelo I;
- modelo V: a metade da profundidade e o dobro do raio da base do modelo I.

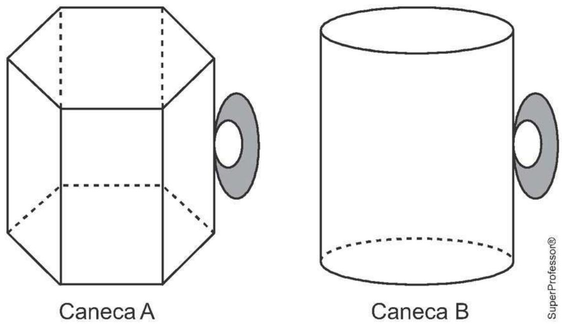
Uma pessoa pretende comprar nessa loja o modelo de caixa-d’água que ofereça a maior capacidade volumétrica.

O modelo escolhido deve ser o

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

QUESTÃO 05

Um novo produto, denominado bolo de caneca no micro-ondas, foi lançado no mercado com o objetivo de atingir ao público que não tem muito tempo para cozinhar. Para prepará-lo, uma pessoa tem à sua disposição duas opções de canecas, apresentadas na figura.



A caneca A tem formato de um prisma reto regular hexagonal de lado L = 4 cm, e a caneca B tem formato de um cilindro circular reto de diâmetro d = 6 cm. Sabe-se que ambas têm a mesma altura h = 10 cm, e que essa pessoa escolherá a caneca com maior capacidade. Considere $\pi = 3,1$ e $\sqrt{3} = 1,7$.

A medida da capacidade, em centímetro cúbico, da caneca escolhida é

a) 186.
b) 279.
c) 408.
d) 816.
e) 1.116.

D13 - Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (Pirâmide, Cone e Esfera).

24ª SEMANA

24ª SEMANA
24ª SEMANA
24ª SEMANA

D13 - Resolver problema envolvendo a área total e/ou volume de um sólido (pirâmide, cone, esfera).

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAGEM

- Reconhecer os conceitos de área total e volume.
- Diferenciar os sólidos geométricos (pirâmide, cone e esfera) e suas características.
- Identificar as partes de cada sólido (base, altura, geratriz, raio, vértices, arestas).
- Resolver problemas contextualizados que envolvam a aplicação de volume e área total.
- Relacionar os conceitos de área total e volume de sólidos geométricos a situações do cotidiano.
- Desenvolver habilidades de visualização tridimensional dos sólidos.
- Comparar volumes e áreas entre diferentes sólidos.

DETALHAMENTO DAS HABILIDADES

O estudo da área total e do volume de sólidos geométricos permite aos alunos compreenderem conceitos fundamentais da geometria espacial, diferenciando sólidos como pirâmides, cones e esferas a partir de suas características e partes, como base, altura, geratriz, raio, vértices e arestas. Essa diferenciação é essencial para que os estudantes desenvolvam habilidades de visualização tridimensional, facilitando a interpretação e a resolução de problemas práticos. Além disso, ao reconhecerem as fórmulas e aplicá-las corretamente, os alunos podem comparar volumes e áreas entre diferentes sólidos, analisando como mudanças nas dimensões impactam suas medidas e proporcionando uma compreensão mais ampla das relações espaciais.

Esses conhecimentos se tornam ainda mais significativos quando aplicados a problemas contextualizados do cotidiano, como o cálculo do volume de reservatórios de água ou da área necessária para revestir superfícies. Essa abordagem está alinhada à habilidade da BNCC, à medida em que propõe a resolução e elaboração de problemas envolvendo o cálculo de áreas e volumes em situações reais, como a determinação da quantidade de material para cobrir ou pintar objetos tridimensionais. Dessa forma, ao articular teoria e prática, os alunos não apenas desenvolvem competências matemáticas, mas também ampliam sua capacidade de resolver desafios concretos, utilizando, quando necessário, ferramentas digitais para facilitar os cálculos e visualizações.

A seguir, são apresentadas habilidades da BNCC diretamente ligadas às expectativas de aprendizagem elencadas para o descritor focal (D15):

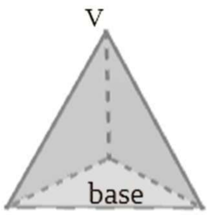
(EM13MAT309) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

RESUMO TEÓRICO

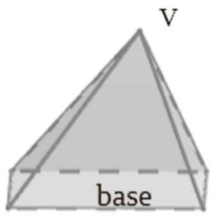
ÁREA TOTAL E VOLUME: PIRÂMIDE, CONE E ESFERA

1. Pirâmide

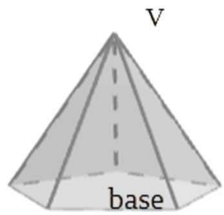
Consideremos um polígono convexo qualquer, contido num plano α, e um ponto V não pertencente a α (V Ø α). O conjunto dos pontos de todos os segmentos de retas que unem o ponto V aos pontos do polígono definido é o que chamamos de **pirâmide**. O polígono definido é a **base** da pirâmide e o ponto V o **vértice**. A classificação de uma pirâmide é feita de acordo com o número de arestas em sua base.



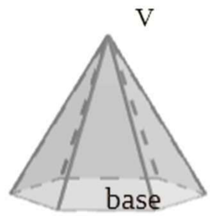
(a)
pirâmide
triangular
ou **tetraedro**



(b)
pirâmide
quadrangular

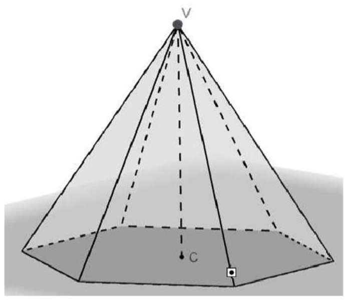


(c)
pirâmide
pentagonal

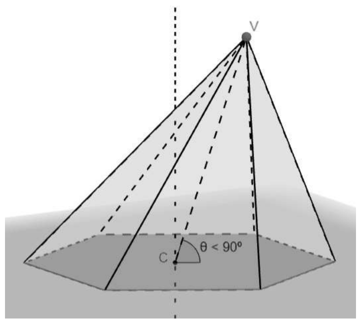


(d)
pirâmide
hexagonal

- Se a projeção do vértice da pirâmide coincide com o centro do polígono da base, então, a pirâmide e dita **reta**; caso o contrário, temos uma pirâmide oblíqua



Pirâmide hexagonal regular reta



Pirâmide hexagonal regular oblíqua

- Se a base de uma pirâmide reta é um polígono regular, então, a pirâmide é também classificada como regular.
- O tetraedro regular, um caso particular de pirâmide triangular, é caracterizado pelas quatro faces regulares.

NÓ DA QUESTÃO

Considere os seguintes pontos:

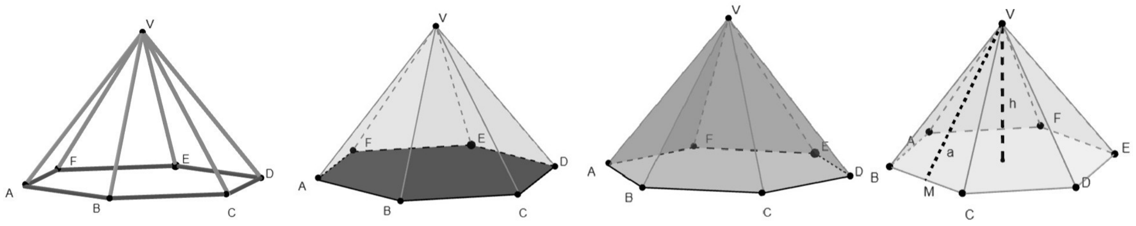
1. Por definição, uma pirâmide é regular se for reta e sua base for um polígono regular.

2. Toda pirâmide triangular é um tetraedro.

3. O tetraedro regular é definido como uma pirâmide triangular reta com todas as faces regulares, ou seja, com quatro triângulos equiláteros congruentes.

A partir dessas considerações, um tetraedro com apenas a base regular pode ser classificado como um tetraedro regular?

Elementos da pirâmide



(a) Arestas | (b) Base | (c) Faces Laterais | (d) Altura e Apótema

- Na figura **(a)**, os segmentos VA, VB, VC, VD, VE, VF, AB, BC, CD, DE, EF e FA são as arestas da pirâmide representada.
- Na figura **(b)**, o polígono ABCDEF é a base da pirâmide.
- Os triângulos ΔAVB, ΔBVC, ΔCVD, ΔDVE, ΔEVF e ΔFVA, em destaque na figura **(c)**, são as faces laterais da pirâmide.
- A altura de uma pirâmide, indicada por "h" na figura **(d)**, corresponde a menor distância que vai do vértice da pirâmide ao plano de apoio da sua base.
- Um apótema de uma pirâmide, indicado por "a" na figura **(d)**, corresponde à distância que vai do vértice da pirâmide ao ponto médio de uma aresta do polígono da base. Em outros termos, o apótema é a altura em cada face lateral da pirâmide.

Obs.: Além dos elementos apresentados, a medida de outros elementos pode ser pedida em um problema, exigindo outros conceitos e fórmulas, para além do estudo sobre pirâmide.

Área da Superfície da Pirâmide

A área da superfície total A_{T} de uma pirâmide é dada pela fórmula

$$A_{\mathrm{T}} = A_{\mathrm{B}} + A_{\mathrm{L}}$$

onde A_{B} é a área da base e A_{L} é a área das faces laterais da pirâmide.

Para o cálculo da área da base de uma pirâmide, é essencial conhecer as fórmulas para o cálculo da área de figuras planas. Outro ponto importante é entender que alguns problemas podem envolver apenas a área da base ou da lateral da pirâmide.

CASO PARTICULAR

Área da Superfície Total do Tetraedro Regular

Para o cálculo da área total de um tetraedro regular, a fórmula pode ser reduzida

$$A_{\mathrm{T}} = a^2 . \sqrt{3}$$

Volume da Pirâmide

O volume V de uma pirâmide é obtido pela fórmula

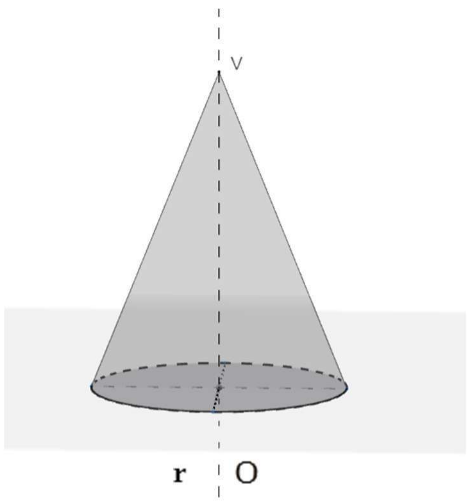
$$V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h$$

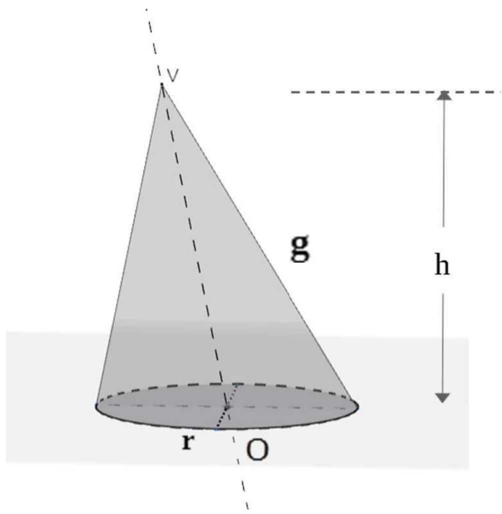
onde A_B é a área da base e h é a altura da pirâmide.

Para o cálculo do volume de uma pirâmide, é essencial conhecer as fórmulas para o cálculo da área de figuras planas.

Cone

Consideremos um círculo qualquer de centro O e raio r, contido num plano α, e um ponto V não pertencente a α (V Ø α). O conjunto dos pontos de todos os segmentos de retas que unem o ponto V aos pontos do círculo definido é o que chamamos de **cone**. O círculo é chamado de **base** do cone e o ponto V o **vértice**. A classificação de uma pirâmide é feita de acordo com o número de arestas em sua base.





cone reto

cone oblíquo

Um cone é chamado de reto quando o segmento que vai do vértice **V** até o centro **O** da base do cone é perpendicular ao plano de apoio de sua base. Em contrapartida, um **cone** é chamado de **oblíquo** quando o segmento que vai do vértice **V** até o centro **O** da base do cone não é perpendicular ao plano da base.

Elementos do cone

- **O** é o centro do círculo que é a base do cone;
- **r** é o raio da base do cone;
- **V** é o vértice do cone;
- **g** é a geratriz do cone, qualquer segmento de reta que une o vértice do cone a um dos pontos da círcunferência que limita a sua base.
- **h** é a altura do cone, a menor distância do vértice ao plano de apoio de sua base.

Área da Superfície do Cone

A área da superfície total A_T de um cone é dada pela fórmula

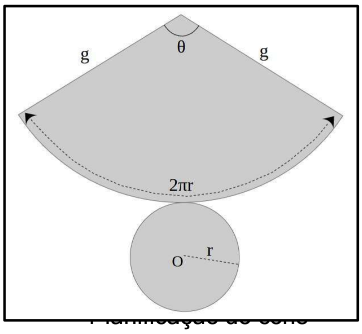
$$A_{\mathrm{T}} = A_{\mathrm{B}} + A_{\mathrm{L}}$$

onde A_{B} é a área da base, sempre circular, e A_{L} é a área lateral do cone. Considerando, então, a área da base como

$$A_{\mathrm{B}} = \pi . r^2$$

e sabendo que área lateral, que planificada é um setor circular de raio **g** e arco medindo $2\pi r$, é dada por

$$A_{\mathrm{L}} = \pi . r . g$$



Planificação do cone

A área total da superfície de um cone é, então, obtida por

$$A_{\mathrm{T}} = \pi . r^2 + \pi . r . g$$
$$A_{\mathrm{T}} = \pi . r . (r + g)$$

Volume do Cone

O volume V de um cone é dado pela fórmula

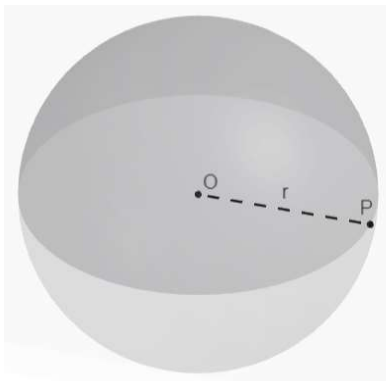
$$V = \frac{1}{3} . A_{\mathrm{B}} . h$$

onde A_{B} é a área da base e h é a altura do cone.

Esfera

Consideremos um ponto O e um segmento de medida r. O conjunto de pontos P do espaço, tais que a distância de O a P é menor ou igual a r, é chamado de esfera, em linguagem matemática, uma esfera E de centro O e raio r é tal que

$$E = \{P : O\underline{P} \leq r\}$$



Elementos da Esfera

- **O** é o centro;
- **r** é o raio;

- **D = 2.r** é o diâmetro;

Área da Superfície da Esfera

A área da superfície total A_{T} de uma esfera é dada pela fórmula

$$A_{\mathrm{T}} = 4.\pi.r^2$$

onde r o raio da esfera.

Volume da Esfera

O volume V de uma esfera é dado pela fórmula

$$V = \frac{4}{3}\pi$$

onde r é o raio da esfera.

ATIVIDADES PROPOSTAS

QUESTÃO 01

Deseja-se construir um reservatório cilíndrico circular reto com 8 metros de diâmetro e teto no formato de hemisfério, ou seja, metade da esfera. Sabe-se que a empresa responsável por construir o teto cobra R$ 300,00 por metro quadrado.

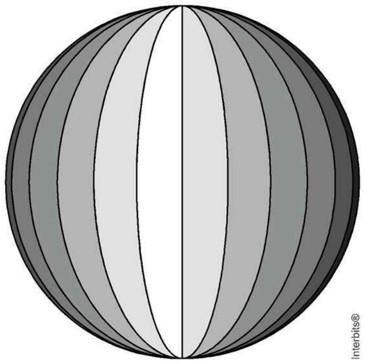
Admita 3,1 para aproximação de □.

O valor, em real, para construir esse teto esférico será de

a) 22 150,00.
b) 32 190,00.
c) 38 600,00.
d) 40 100,00.
e) 29 760,00.

QUESTÃO 02

O protótipo de uma bola de vôlei foi apresentado em uma conferência internacional sobre esportes olímpicos. A bola possuía formato esférico e foi composta por 24 faixas iguais, como indica a figura.



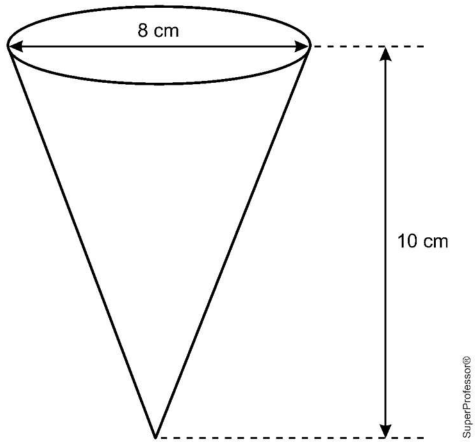
Sabe-se que o volume da bola é 2304π centímetros cúbicos.

A área da superfície, em centímetro quadrado, de cada faixa é de:

a) 20π
b) 24π
c) 28π
d) 27π
e) 25π

QUESTÃO 03

Uma empresa produz e vende um tipo de chocolate, maciço, em formato de cone circular reto com as medidas do diâmetro da base e da altura iguais a 8 cm e 10 cm, respectivamente, como apresenta a figura.



Devido a um aumento de preço dos ingredientes utilizados na produção desse chocolate, a empresa decide produzir esse mesmo tipo de chocolate com um volume 19% menor, no mesmo formato de cone circular reto com altura de 10 cm.

Para isso, a empresa produzirá esses novos chocolates com medida do raio da base, em centímetro, igual a

a) 1,52.

b) 3,24.
c) 3,60.
d) 6,48.
e) 7,20.

QUESTÃO 04

Ao se perfurar um poço no chão, na forma de um cilindro circular reto, toda a terra retirada é amontoada na forma de um cone circular reto, cujo raio da base é o triplo do raio do poço e a altura é 2,4 metros. Sabe-se que o volume desse cone de terra é 20% maior do que o volume do poço cilíndrico, pois a terra fica mais fofa após ser escavada.

Qual é a profundidade, em metro, desse poço?

a) 1,44
b) 6,00
c) 7,20
d) 8,64
e) 36,00

QUESTÃO 05

Peças metálicas de aeronaves abandonadas em aeroportos serão recicladas. Uma dessas peças é maciça e tem o formato cilíndrico, com a medida do raio da base igual a 4 cm e a da altura igual a 50 cm. Ela será derretida, e o volume de metal resultante será utilizado para a fabricação de esferas maciças com diâmetro de 1 cm, a serem usadas para confeccionar rolamentos. Para estimar a quantidade de esferas que poderão ser produzidas a partir de cada uma das peças cilíndricas, admite-se que não ocorre perda de material durante o processo de derretimento.

Quantas dessas esferas poderão ser obtidas a partir de cada peça cilíndrica?

a) 800
b) 1 200
c) 2 400
d) 4 800
e) 6 400