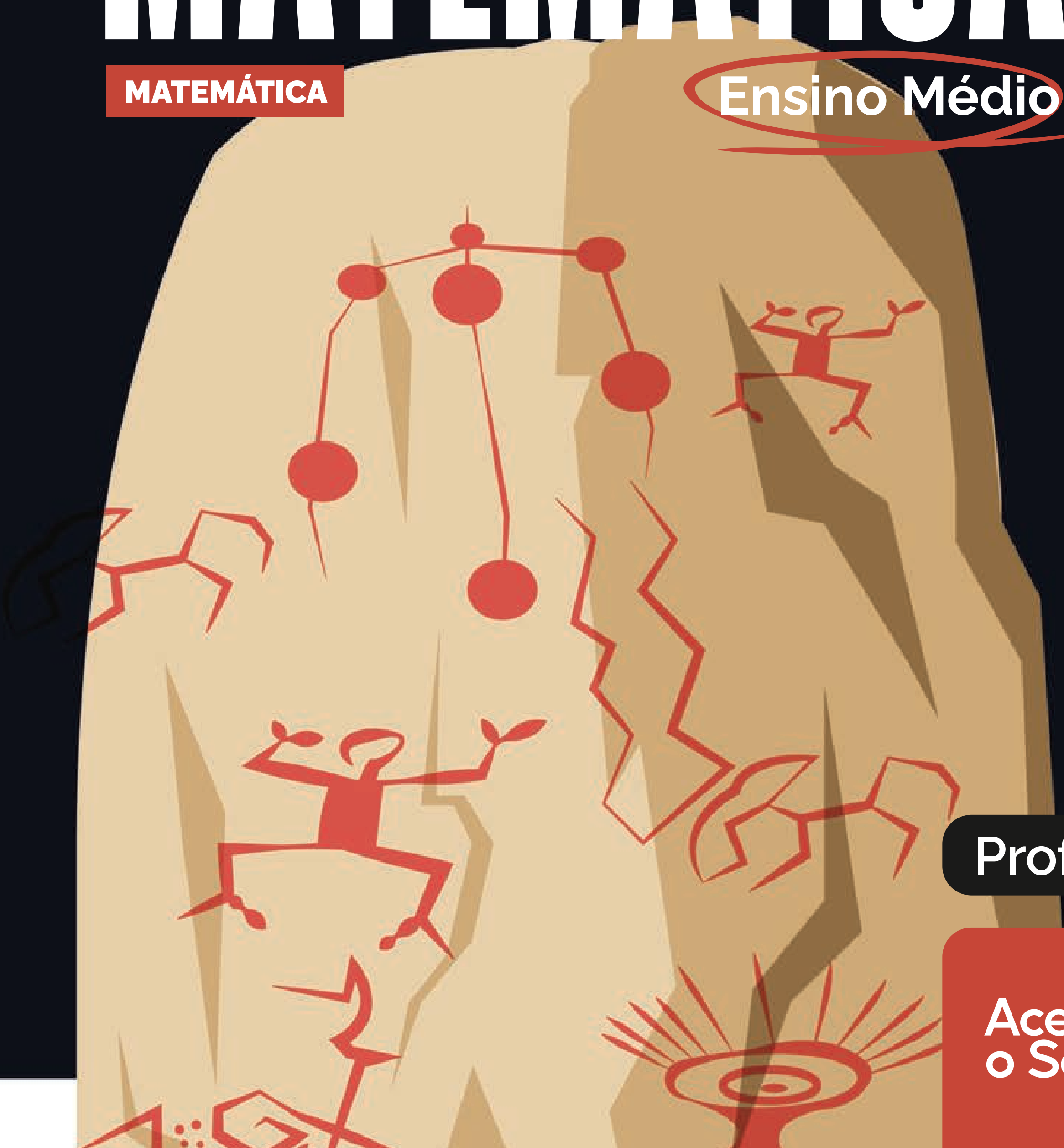
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO

GOVERNO DO PARÁ

MATEMÁTICA

MATEMÁTICA

Ensino Médio



Pinturas Rupestres de Alenquer

Professor

Acelere o Saber

Acelere o Saber

MATEMÁTICA

Ensino Médio

Coleção Acelere o Saber – Ensino Médio

Matemática - Livro do Professor

Uma produção

editora órbita

Direção Editorial
Tiago Braga

Organização
Antonio Nicolau Youssef

Colaboradores
Angel Honorato
Ângela Silvano
Camila Suckow
Cristina Tavares
Diego Vogt
Eduardo Araújo
Heloisa Takazaki
Ivyan Karoline M. Correa
Katherine Scott
Luciane Baía
Rosane Rudnik
Thiago Gusmão

Produção Executiva
Antonio Braga Filho

Revisão
Ana Christina M. Perfetti
Miriam de Carvaho Aboes
Victor Truccolo
Equipe Editora Órbita

Ilustrações
Danilo Neves Pereira
Fernando José Ferreira
Guilherme José Ferreira
Kauan Henrique
Tiago Bento

Imagens
Adobe Stock
Shutterstock

Projeto Gráfico
Amplitude.PP

Diagramação
Fórmula Produções
Artes e Letras
Amplitude.PP

A173 Acelere o saber : Matemática : livro do professor - Ensino Médio / Antônio Nicolau Youssef (org.) ; Tiago Braga (coord.) - 1ª ed. - São Paulo : Órbita, 2023.
288 p. : il. color.

ISBN 978-65-6038-022-6

1.Matemática. 2.Sistemas. 3.Geometria analítica. 4.Geometria espacial. 5.Polinômios. I.Youssef, Antônio Nicolau (org.). II.Braga, Tiago (coord.).

CDD 510
CDU 51

Dados de Catalogação AACR2 2ª. ed.
Tatiane Thielke dos Santos Cruz – Bibliotecária - CRB-8/121/2023.

1ª edição
São Paulo – 2023

APRESENTAÇÃO

Caro estudante,

Bem-vindo à Coleção Acelere o Saber.

Nossa maior preocupação ao desenvolver esta coleção foi a de ajudá-lo a seguir adiante em seus estudos, recompondo sua aprendizagem no Ensino Fundamental e pavimentando sua caminhada em direção ao Ensino Médio.

Ao longo deste livro você será convidado a pensar, explorar, resolver problemas, discutir e argumentar sobre os mais variados temas, para que, com a ajuda dos professores e educadores que estarão ao seu lado, possa desenvolver as habilidades e competências fundamentais para sua progressão de estudos.

Mantenha-se concentrado em seus objetivos de aprendizagem para, assim, usufruir desta importante oportunidade que se apresenta em um momento decisivo de sua vida escolar.

Esperamos que você participe ativamente das propostas constantes neste material e lembre-se sempre de contar com nossa colaboração.

Vamos começar?

Um abraço.

Sumário

Matemática 9

Capítulo 1 – Matemática financeira 11

Porcentagem 12
Cálculos com porcentagem 12
Juros simples 16
Cálculo de juros simples 16
Cálculo do montante no sistema de juros simples 17
Desconto comercial simples 18
Juros compostos 21
Cálculo do montante no sistema de juros compostos 22
Resumo 26
Avalie o que aprendeu 27

Capítulo 2 – Sistemas lineares, matrizes e determinantes 33

Equações lineares 34
Sistema de equações lineares 36
Sistema escalonado 39
Resolução de um sistema escalonado 39
Escalonamento e resolução de um sistema linear 41
Discussão sobre um sistema linear 43
Matrizes 47
Tipos de matrizes 51
Operações com matrizes 54
Adição e subtração de matrizes 57
Multiplicação de número real por matriz 58
Multiplicação de matrizes 61
Matriz inversa 64
Determinantes 65
Determinantes de matrizes de ordens 1, 2 e 3 66
Determinante de matrizes de ordem n 70
Propriedades dos determinantes 72
Regra de Cramer 75
Resumo 78
Avalie o que aprendeu 84

Capítulo 3 – Contagem e probabilidade **91**
Princípio fundamental da contagem 92
Fatorial 97
Permutação simples 99
Permutação com elementos repetidos 102
Práticas interdisciplinares 104
Combinações simples 106
Números binomiais 109
Triângulo de Pascal 110
Binômio de Newton 114
Termo geral 114
Noção de probabilidade 118
Experimentos aleatórios 118
Espaço amostral e evento 118
Probabilidade de um evento 119
Regra da soma 122
Regra do produto 124
Eventos independentes 125
Resumo 127
Avalie o que aprendeu 129

Capítulo 4 – Geometria espacial **135**
Geometria de posição 136
Conceitos primitivos, postulados e teoremas 136
Posições relativas de duas retas 141
Determinação de planos 145
Posições relativas de reta e plano 148
Teorema do paralelismo entre reta e plano 149
Posições relativas de dois planos 152
Teorema do paralelismo entre dois planos 153
Perpendicularismo 156
Teorema do perpendicularismo entre reta e plano 157
Geometria métrica 160
Áreas e volume do prisma 163
Pirâmides 168

Área e volume da pirâmide 170
Cilindros 174
Áreas e volume do cilindro reto 176
Cones 178
Áreas e volume do cone reto 180
Esfera 183
Área da superfície esférica e volume da esfera 184
Poliedros 186
Relação de Euler 187
Resumo 190
Avalie o que aprendeu 193

Capítulo 5 – Geometria analítica 197

Estudo do ponto 198
Distância entre dois pontos 201
Ponto médio 204
Alinhamento de três pontos 206
Estudo da reta 208
Coeficiente angular 209
Equação fundamental da reta 212
Equação geral da reta 215
Casos particulares da equação geral da reta 217
Equação reduzida da reta 220
Equação segmentária da reta 221
Posições relativas de duas retas 223
Retas perpendiculares 226
Ângulo entre duas retas 228
Distância de ponto a reta 230
Estudo da circunferência 233
Equação reduzida da circunferência 233
Equação geral da circunferência 236
Posição de um ponto em relação a uma circunferência 237
Posição de uma reta em relação a uma circunferência 240
Posições relativas de duas circunferências 243
Resumo 247
Avalie o que aprendeu 250

Capítulo 6 – Polinômios e equações polinomiais 253
Funções polinomiais 254
Igualdade de polinômios 254
Adição e subtração de polinômios 258
Multiplicação de polinômios 259
Divisão de polinômios 261
Teorema do resto 264
Teorema de d'Alembert 264
Algoritmo de Briot-Ruffini 267
Equações polinomiais 270
Teorema fundamental da Álgebra 270
Multiplicidade de uma raiz 272
Resumo 274
Avalie o que aprendeu 277
Referências 280

Acelere o Saber

MATEMÁTICA

AdobeStock

O mundo das finanças exige que sejam consultados diariamente os indicadores econômicos.

Professor

Neste capítulo, abordaremos alguns dos principais conceitos relacionados ao cálculo de porcentagens com aplicação em contextos financeiros, promovendo um ambiente propício ao desenvolvimento das habilidades relacionadas. Nesse contexto, sempre que possível, conte com o uso de calculadora e de recursos digitais no computador ou celular, como planilhas eletrônicas e aplicativos financeiros, para auxiliar no desenvolvimento dos conceitos e resolução de atividades.

Capítulo 1

Matemática financeira

O estudo da Matemática Financeira consiste na aplicação do conhecimento matemático na resolução de problemas relativos a transações comerciais e financeiras, como, por exemplo, investimentos, financiamentos, impostos e operações em mercados de capitais. O domínio dos conceitos básicos de Matemática Financeira é fundamental para o exercício das mais diversas profissões no mundo moderno, assim como para o nosso dia a dia.

Saber dimensionar formas de comprar, avaliar as variações dos preços dos produtos que compramos para nossa subsistência, compreender os significados básicos dos movimentos da economia nacional e mundial e suas implicações em nossas vidas, controlar uma conta bancária e operar os aspectos financeiros de nosso trabalho ou de nossa vida familiar são exemplos de ações que exigem o domínio de conceitos de Matemática Financeira.

(EM13MAT203)

Porcentagem

Inicialmente, vamos recordar o conceito de porcentagem, essencial devido ao seu emprego em praticamente todos os problemas e cálculos financeiros.

Chamamos de porcentagem toda razão $\frac{a}{b}$, na qual $b = 100$. Essas razões centesimais são representadas pelo símbolo %. Veja os exemplos:

$$\frac{5}{100} = 0{,}05 = 5\%$$

$$\frac{137}{100} = 1{,}37 = 137\%$$

$$\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 0{,}16 = 16\%$$

$$\frac{155}{1.000} = \frac{15{,}5}{100} = 0{,}155 = 15{,}5\%$$

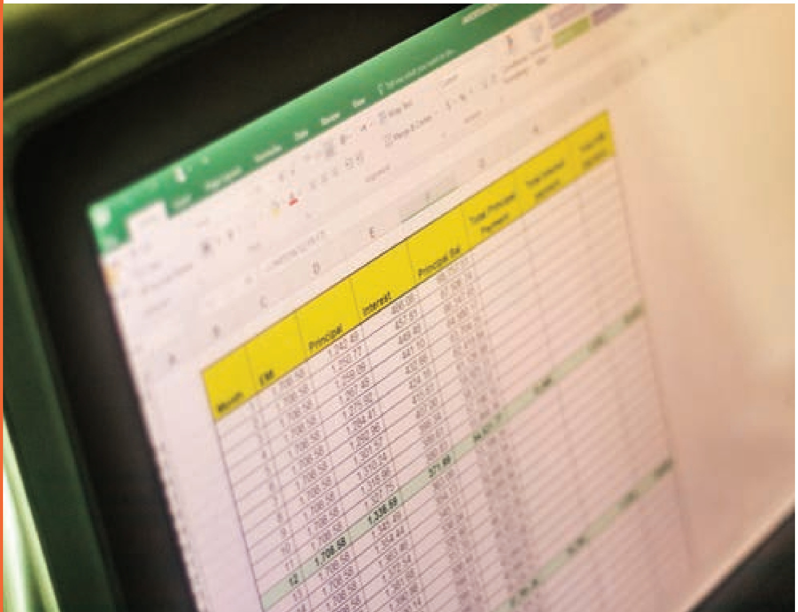
Professor

A introdução à Matemática Financeira oferece uma valiosa chance de utilizar as vivências cotidianas dos alunos como ponto de partida para explorar os princípios do cálculo comercial e financeiro. Começando pela relembrança dos conceitos de porcentagem, você pode alavancar as experiências deles, incentivando-os a compreender como esses conhecimentos se entrelaçam com a lógica financeira, estabelecendo uma sólida base para a exploração desse mundo complexo.

Cálculos com porcentagem

Os problemas que envolvem porcentagem podem ser resolvidos com o uso de uma calculadora simples, manipulando-se apenas as quatro operações fundamentais ou a tecla específica para a operação (%) disponível para esses cálculos. No entanto, é importante que se domine os conceitos de frações, razões e regra de três envolvidos na maioria das situações em que cálculos de porcentagens são necessários. Vamos verificar, nas atividades a seguir, algumas dessas situações.

Sempre que necessário, com o auxílio do professor, você poderá utilizar calculadora ou aplicativos de celular e computador para auxiliar nos cálculos.



AdobeStock

As ferramentas digitais podem ser grandes apoios nas situações de acompanhamento financeiro e auxílio nos cálculos relacionados.

Atividades resolvidas

R1. Um aluno acertou em um exame 12 das 15 questões apresentadas. Qual foi sua porcentagem de acerto?

Resolução

A razão entre o número de questões acertadas e o número total de questões apresentadas é:

$$\frac{12}{15} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{80}{100}$$

Logo, 80% foi a porcentagem de acerto. Isso significa que se a prova tivesse 100 questões, o aluno teria acertado 80 questões.

R2. Um vendedor tem 9% de comissão nos negócios que realiza. Qual foi a sua comissão em uma venda de R$ 36.000?

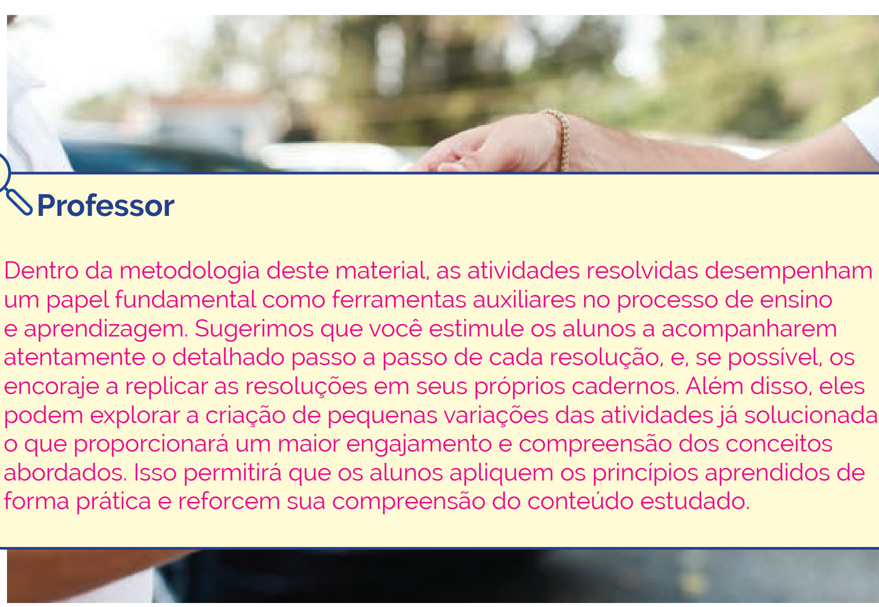
Resolução

A comissão do vendedor é 9% da venda, ou seja:

$$\text{comissão} = 9\% \text{ de } 36.000 = 3\% \times 36.000 = \frac{9}{100} \cdot 36.000 = 3.240$$

A comissão do vendedor foi de R$ 3.240,00.

R3. Uma loja está oferecendo 8% de desconto para pagamento à vista na compra de um automóvel que custa R$ 74.700. Quanto uma pessoa pagará por esse carro à vista?



AdobeStock

Professor

Dentro da metodologia deste material, as atividades resolvidas desempenham um papel fundamental como ferramentas auxiliares no processo de ensino e aprendizagem. Sugerimos que você estimule os alunos a acompanharem atentamente o detalhado passo a passo de cada resolução, e, se possível, os encoraje a replicar as resoluções em seus próprios cadernos. Além disso, eles podem explorar a criação de pequenas variações das atividades já solucionadas, o que proporcionará um maior engajamento e compreensão dos conceitos abordados. Isso permitirá que os alunos apliquem os princípios aprendidos de forma prática e reforcem sua compreensão do conteúdo estudado.

Resolução

Vamos resolver esse problema de dois modos: utilizando regra de três e, depois, com fração do total.

1º modo – regra de três:

preço	porcentagem
74.700	100
x	8

$$\frac{74.700}{x} = \frac{100}{8} \Rightarrow x = \frac{8 \cdot 74.700}{100} = 5.976$$

Logo, o preço do carro à vista será: R$ 74.700 – R$ 5.976 = R$ 68.724

2º modo – fração do total:

Aqui, calculamos o desconto a partir da porcentagem oferecida:

$$8\% \text{ de } 74.700 = \frac{8}{100} \cdot 74.700 = 5.976$$

Portanto, o preço à vista será:

R$ 74.700 – R$ 5.976 = R$ 68.724

Professor

Incentive os estudantes a resolverem as atividades em duplas ou em pequenos grupos, de modo que possam se ajudar nas resoluções.

Atividades

1. Em um treino de basquete, Bruno fez 360 arremessos e errou 198. Qual foi sua porcentagem de acerto?

AdobeStock

45%

2. Minha classe tem 30 alunos: 18 com 15 anos, 9 com 16 e os outros com 17. Calcule a porcentagem dos alunos da classe que têm:

a) 15 anos

60%

b) 16 anos

30%

c) 17 anos

10%

d) 18 anos

0%

3. Uma vendedora recebe 9% de comissão nas vendas realizadas. Qual foi a sua comissão em uma venda de R$ 3.000?

R$ 270

4. Um corretor recebeu R$ 21.800 pela venda de duas casas, tendo sido de 5% a taxa de comissão. Qual o valor de venda das propriedades?

R$ 436.000,00

5. Juca devia R$ 200 a Rodrigo e pagou apenas R$ 74. Quantos por cento da dívida foram pagos?

37%

6. Em uma sala em que 75% dos alunos são rapazes, estudam apenas 7 moças. Quantos alunos têm a classe?

28 alunos

7. Em uma liquidação, uma camisa que custava R$ 130 foi vendida com 15% de abatimento. Quanto passou a custar a camisa?

AdobeStock

R$ 110,50

Juros simples

(EM13MAT203)

Quando uma pessoa pede dinheiro emprestado a outra ou a uma instituição financeira, ela paga uma espécie de aluguel pelo tempo que fica com o dinheiro. Esse aluguel é sempre uma porcentagem do valor inicialmente emprestado e, além disso, o valor do aluguel é proporcional ao tempo que a pessoa fica com o dinheiro.

O aluguel de que falamos chama-se juro (J), a porcentagem que se paga é a taxa de juro (i), o dinheiro que se pede emprestado é o capital (C) e o total que se paga no final do empréstimo é o montante (M).

De forma resumida, chama-se juro simples a compensação em dinheiro pelo empréstimo de um capital financeiro, a uma taxa combinada, por um prazo determinado, produzida exclusivamente pelo capital inicial.

Cálculo de juros simples

Quando o regime é de juro simples, a remuneração pelo capital inicial é diretamente proporcional ao seu valor e ao tempo de aplicação. O tempo de aplicação é dado pelo número de períodos em que a taxa de juros combinada é aplicada. Por sua vez, a taxa é o fator de proporcionalidade para o cálculo dos juros. Assim:

$J = C \cdot i \cdot n$

C: capital inicial; J: juro simples;

i: taxa de juros; n: número de períodos

Professor

As palavras e os conceitos iniciais sobre taxa de juro, porcentagem, desconto, entre outras, são palavras que pertencem ao nosso cotidiano, cabendo ao professor lançar mão de situações do dia a dia para fazer os alunos interagirem com maior vontade com os cálculos financeiros, ganhando habilidade. É um momento propício também para o uso de calculadora científica ou financeira.

Atividades resolvidas

R4. Uma pessoa toma emprestado R$ 1.000 pelo prazo de 2 meses de um familiar, prometendo devolver com a taxa de 3% ao mês. Qual será o valor a ser pago como juro?

Resolução

Vamos inicialmente calcular o juro, mês a mês.

– 1º mês: juro = 3% de 1.000 = $0{,}03 \times 1.000 = 30$

– 2º mês: juro = 3% de 1.000 = $0{,}03 \times 1.000 = 30$

Ao final de 2 meses, os juros totalizam R$ 60.

Ou, então, podemos resolver o problema diretamente:

$J = C \cdot i \cdot n$ $\quad J = 1.000 \cdot 0{,}03 \cdot 2$ $\quad J = 60$

Decorrido o prazo, o valor a ser pago como juro simples será de R$ 60.

R5. Qual o valor de um capital que, aplicado à taxa de juros simples de 2% ao mês, rendeu depois de um ano R$ 2.400 de juros?

Resolução

Como a taxa é de i = 2% ao mês, devemos considerar, para 1 ano, um número de 12 meses ou 12 períodos de aplicação desta taxa para produzir um juro de R$ 2.400. Assim:

$J = C \cdot i \cdot n$

$2400 = C \cdot 0{,}02 \cdot 12$

$2400 = C \cdot 0{,}24 \Rightarrow C = 10.000$

O capital aplicado inicialmente foi de R$ 10.000.

Cálculo do montante no sistema de juros simples

Montante, ou valor acumulado de um capital inicial C, investido a uma taxa i por período e pelo prazo de n períodos, é a soma do capital inicial, também chamado de **principal**, com o juro produzido no prazo determinado.

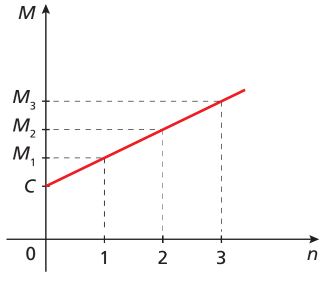
Indicando o montante por M, temos:

$M = C + J$

$M = C + C \cdot i \cdot n$

$M = C(1 + i \cdot n)$

Observe que fixados o capital C e a taxa i, o montante M varia linearmente em função do período n.



Atividades resolvidas

R6. Qual é o montante de um capital de R$ 10.000 aplicado à taxa de 10% a.a (ao ano) pelo prazo de 2 anos?

Resolução

Temos:

$C = 10.000$, $i = 0{,}10$ e $n = 2$ anos

$M = C(1 + i \cdot n) \Rightarrow M = 10.000\ (1 + 0{,}10 \cdot 2)$

$M = 12.000$

O montante, após 2 anos, à taxa de juro de 10% a.a., será de R$ 12.000.

R7. Que montante receberá um aplicador que tenha investido R$ 5.000, à taxa de juros simples de 18% a.a., durante 6 meses?

Resolução

Devemos observar que a taxa e o tempo de aplicação devem estar na mesma unidade.

Assim, 6 meses equivalem a $\frac{6}{12}$ do ano.

Aplicando a fórmula, temos:

$M = C(1 + i \cdot n) \Rightarrow M = 5.000 \left(1 + 0{,}18 \times \frac{6}{12}\right)$

$M = 5.450$

O aplicador receberá R$ 5.450 ao fim de 6 meses.

Professor

Para enriquecer a contextualização, questione os estudantes sobre as compras com desconto que podem já ter feito, solicitando que compartilhem com os colegas como foi a experiência e avaliando, se possível, as vantagens em cada caso apresentado.

Desconto comercial simples

Desconto comercial é aquele que se obtém quando saldamos um determinado compromisso antes do vencimento do prazo previamente estipulado. Seu cálculo é feito determinando-se o juro simples sobre o valor nominal N do compromisso, a uma taxa de desconto i, para os n períodos antes de seu vencimento.

Valor do desconto: $D_c = N \cdot i \cdot n$

Valor descontado: $V_c = N - N \cdot i \cdot n$

$V_c = N(1 - i \cdot n)$

Atividades resolvidas

R8. Uma pessoa pretende saldar um título de R$ 5.000 três meses antes do vencimento, cuja taxa de desconto comercial é 24% a.a. Qual é o desconto comercial? E o valor descontado?

Resolução

Lembrando que a taxa é anual e deve ser convertida para meses, aplicamos a fórmula:

Desconto comercial: $D_c = N \cdot i \cdot n$

$$D_c = 5.000 \times \frac{0,24}{12} \times 3 = 300$$

Valor descontado:

$$V_c = 5.000 \times \left(1 - \frac{0,24}{12} \times 3\right) = 4.700$$

O valor descontado também poderia ser calculado subtraindo-se o desconto do valor nominal:

$V_c = 5.000 - 300 \Rightarrow V_c = \text{R\$ } 4.700$

R9. O valor nominal de uma nota promissória é de R$ 10.000. Qual é o valor atual (valor aplicado) se a taxa de aplicação for de 38,4% a.a., com vencimento daqui a 10 meses?

Resolução

Considerando o valor nominal (*N*) da nota como o montante e o valor atual (*A*) como o capital inicial, temos:

$$N = A(1 + i \cdot n) \Rightarrow 10.000 = \left(1 + \frac{0,384}{12} \cdot 10\right)$$

$10.000 = A \cdot 1,32 \Rightarrow A = 7.575,76$

O valor atual é de R$ 7.575,76.

Essa operação é comumente chamada de **trazer a valor presente** o valor nominal da nota promissória, como se ela fosse ser paga ou quitada antes de seu vencimento. Isso equivale a dizer que sobre os R$ 10.000, calculamos um **desconto comercial simples** relativo aos dez meses que ainda faltam para o vencimento. Neste caso, o desconto comercial foi de:

$D_c = 10.000 - 7.575,76 \Rightarrow D_c = \text{R\$ } 2.424,24$

Atividades

8. Calcule o juro simples referente a um capital de R$ 2.000 aplicado à taxa de juros de 15% a.a. durante 1 ano.

R$ 300

---

9. Um capital aplicado a juro simples rende R$ 272 em 10 dias, a 12% a.m. Qual é esse capital?

R$ 6.800

---

10. Qual é o capital que, à taxa de 9% a.m., produz R$ 108 em 2 anos?

R$ 50

---

11. Determine a taxa mensal que faz com que um capital, investido a juro simples durante 8 meses, tenha seu valor triplicado.

25% a.m.

---

12. Quanto tempo deve ficar aplicado um capital de R$ 1.600, para que produza um montante de R$ 1.856, à taxa de 24% a.t. (ao trimestre)?

2 meses

Juros compostos

(EM13MAT203) (EM13MAT303)

Regime de juros compostos é aquele em que o juro gerado pela aplicação ou empréstimo será incorporado a ele, passando a participar da geração de juros no período seguinte. Isso significa que, ao fim de um período, o capital passa a ser o capital inicial acrescido dos juros do período e assim sucessivamente. Por essa razão, esse regime é comumente chamado de **juros sobre juros** e é o regime utilizado em operações de empréstimos bancários, cheques especiais, financiamentos e investimentos.

Suponhamos, por exemplo, que uma pessoa tome emprestada, a juro composto, a importância de R$ 1.000 pelo prazo de 4 meses, à taxa de 6% a.m. (ao mês). Observe na tabela a seguir que, a cada mês, são acrescidos 6% de juros ao montante produzido até o final do mês anterior.

n	Saldo no início do período	Juro por período	Montante
1	1.000	$1.000 \times 0,06 = 60$	$1.000 + 60 = 1.060$
2	1.060	$1.060 \times 0,06 = 63,60$	$1.060 + 63,60 = 1.123,60$
3	1.123,60	$1.123,60 \times 0,06 = 67,41$	$1.123,60 + 67,41 = 1.194,01$
4	1.194,01	$1.194,01 \times 0,06 = 71,64$	$1.194,01 + 71,64 = 1.265,65$

Decorrido o prazo, o valor a ser pago como juro será:

$J = 1.265,65 - 1.000 \Rightarrow J = \text{R\$ } 265,65$

Compare o juro a ser pago no regime de juros compostos com o valor em regime de juros simples:

$J = C \cdot i \cdot n \Rightarrow J = 1.000 \times 0,06 \times 4 \Rightarrow J = \text{R\$ } 240$

Veja que, com juros sobre juros, o valor é R$ 25,65 maior que o do regime de juros simples.

Professor

Sempre que possível, incentive os estudantes a recorrerem aos recursos digitais. A tabela desta página, por exemplo, pode ser feita em uma planilha eletrônica, de modo a criar uma fórmula para que o juro por período e montante sejam calculados de forma automática. Se possível, explore essa possibilidade com os estudantes.

Cálculo do montante no sistema de juros compostos

No regime de juros compostos, a cada período acrescentamos os juros ao montante já produzido, formando um novo capital para o período seguinte. A esse processo damos o nome de **capitalização.** Vamos calcular o montante M para um capital C aplicado a uma taxa i por período, ocorrendo capitalização no final de cada período, em um prazo de n períodos.

Final do 1º período:

$M_1 = C + Ci \Rightarrow M_1 = C(1 + i)$

Final do 2º período:

$M_2 = M_1 + M_1 \cdot i \Rightarrow M_2 = M_1(1 + i)$

$M_2 = C(1 + i)\,(1 + i) = C(1 + i)^2$

Final do 3º período:

$M_3 = M_2 + M_2 \cdot i \Rightarrow M_3 = M_2(1 + i)$

$M_3 = C(1 + i)\,(1 + i)\,(1 + i) = C(1 + i)^3$

Final do 4º período:

$M_4 = M_3 + M_3 \cdot i \Rightarrow M_4 = M_3(1 + i)$

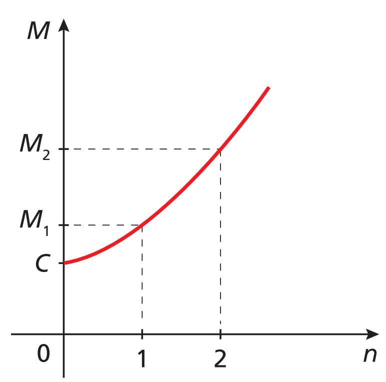
$M_4 = C(1 + i)\,(1 + i)\,(1 + i)\,(1 + i) = C(1 + i)^4$

E assim sucessivamente. Note que os montantes formam uma progressão geométrica de razão $(1 + i)$.

Generalizando, o montante ao final de n períodos, à taxa i de juros, é dado por:

$M = C(1 + i)^n$

Fixados o capital C e a taxa i, o montante M varia exponencialmente em função do período n.



Atividades resolvidas

R10. Uma pessoa toma R$ 2.000 emprestados, a juros de 2% a.m., pelo prazo de 10 meses com capitalização composta. Qual é o montante a ser devolvido?

Resolução

– Utilizando a tecla $\boxed{x^y}$ em uma calculadora científica:

Calcule inicialmente $(1 + 0{,}02)^{10}$

Digite $\boxed{1}\ \boxed{+}\ \boxed{0}\ \boxed{,}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{x^y}\ \boxed{1}\ \boxed{0}\ \boxed{=}$.

A sequência de teclas pode variar dependendo da calculadora.

Depois multiplique o resultado por 2.000. Assim, teremos:

M = R$ 2.437,98

Procuramos o valor do fator $(1 + i)^n$, para $n = 10$ e $i = 2\%$, que é 1,218994.

Logo:

$M = 2.000 \times (1{,}02)^{10}$

$M = 2.000 \times 1{,}218994 =$ R$ 2.437,98

R11. Calcule o montante produzido pelo capital de R$ 4.000 aplicado a 10% a.t., capitalizado trimestralmente, durante 12 meses.

Resolução

Vamos transformar 12 meses em 4 trimestres e substituir na relação $M = C(1 + i)^n$. Logo:

$M = 4.000\ (1 + 0{,}10)^4 = 5.856{,}40$

O montante produzido é de R$ 5.856,40.

R12. Calcule a taxa efetiva de juro mensal para que o capital de R$ 3.450, investido durante 2 anos, produza um montante de R$ 21.877,07.

Resolução

$M = C(1 + i)^n \Rightarrow 21.877{,}07 = 3.450\ (1 + i)^{24}$

$(1 + i)^{24} = \dfrac{21.877{,}07}{3.450} \Rightarrow 1 + i = \sqrt[24]{6{,}3411807}$

– Realizando o cálculo com calculadora científica, digite as seguintes teclas, mas verifique antes se a sua calculadora obedece a esta ordem:

[2] [4] [$\sqrt[n]{\ }$] [6] [,] [3] [4] [1] [1] [8] [0] [7] [=]

Você deve encontrar como resultado o número 1,08. Logo:

$1 + i = 1{,}08 \Rightarrow i = 0{,}08 \Rightarrow i = 8\%$ a.m.

R13. Um investidor aplicou R$ 25.000 em uma instituição que paga 3% a.m. Após certo período, ele recebeu R$ 35.644,02, estando incluídos nesse valor os juros compostos creditados e o capital investido. Por quanto tempo o dinheiro ficou aplicado?

Resolução

$M = C(1 + i)^n \Rightarrow 35.644{,}02 = 25.000\ (1 + 0{,}03)^n$

$(1{,}03)^n = \dfrac{35.644{,}02}{25.000} \Rightarrow (1{,}03)^n = 1{,}4257608$

– Inicialmente, calculamos o logaritmo decimal dos dois lados da igualdade. Com uma calculadora científica, obtemos os valores dos logaritmos e determinamos n. Acompanhe:

$\log(1{,}03)^n = \log 1{,}4257608 \Rightarrow n \cdot \log(1{,}03) =$

$= \log 1{,}4257608 \Rightarrow n = \dfrac{\log 1{,}4257608}{\log 1{,}03}$

[*log*] [1] [,] [4] [2] [5] [7] [6] [0] [8] [÷] [*log*] [1] [,] [0] [3]

Portanto, $n = 12$ meses.

– Assim:

$(1{,}03)^n = 1{,}4257608$

O fator $(1 + i)^n$, para $i = 3\%$ e $n = 12$, é 1,4257608.

Logo, o valor de n é 12.

Atividades

13. Calcule o montante de uma aplicação de R$ 1.000 a 4% a.m., capitalizado mensalmente, durante 5 meses.

R$ 1.216,65

14. Um capital de R$ 10.000 foi investido numa caderneta de poupança em regime de capitalização, que paga um juro mensal de 0,85%. Qual o valor que o investidor encontrará no extrato da caderneta ao final de 2 anos?

R$ 12.252,41

15. Calcule o montante de um capital de R$ 2.500 aplicado a uma taxa de juro composto de 2% a.m. durante 9 meses.

R$ 2.987,73

16. Determine o capital que, investido a juro composto de 3% a.m. durante 4 meses, produziu um montante de R$ 6.000.

R$ 533,09

17. Um cliente abriu uma caderneta de poupança, onde depositou R$ 2.000. Nos quatro primeiros meses, essa poupança pagou 1,1%, 0,9%, 1,2% e 1,0% de juros, sucessivamente. Qual o montante produzido ao final do quarto mês?

R$ 2.085,33.

18. Um lote é posto à venda por R$ 50.000 de entrada e R$ 200.000 em 10 anos. Como opção, o vendedor pede R$ 250.000 à vista. Se a taxa de juros (compostos) de mercado é de 2% a.m., qual a melhor alternativa?

Pagamento à vista.

Resumo

Cálculo de juros simples

$J = C \cdot i \cdot n$

C: capital inicial; *J*: juro simples;

i: taxa de juros; *n*: número de períodos

Cálculo do montante no sistema de juros simples

$M = C(1 + i \cdot n)$

Desconto comercial simples

$D_c = N \cdot i \cdot \cdot n$

N : valor nominal; *i*: taxa de desconto;

n: períodos antes do vencimento

Valor descontado

$V_c = N(1 - i \cdot n)$

Professor

Sugira aos estudantes revisitarem o resumo sempre que necessário, podendo também anotar outros conceitos que achem necessários para melhor entendimento. Se possível, deixe que utilizem o resumo para auxiliar na resolução da bateria final de atividades a seguir.

Cálculo do montante no sistema de juros compostos

$M = C(1 + i)^n$

AdobeStock

Avalie o que aprendeu

(EM13MAT203)

1. No primeiro dia do mês, um investidor aplica uma certa quantia. No segundo dia, o investidor aplica o dobro da quantia aplicada no primeiro dia. No terceiro dia, aplica o triplo da quantia aplicada no primeiro dia, e assim sucessivamente. Ao fim de 20 dias, a quantia total aplicada foi de R$ 6.300. Então, a quantia aplicada no primeiro dia foi de:

a) R$ 15
b) R$ 30
c) R$ 20
d) R$ 25
e) R$ 35

(EM13MAT203)

2. Um eletrodoméstico está a venda por R$ 1.200 em três pagamentos: R$ 400 de entrada, R$ 400 um mês depois e R$ 400 dois meses depois. Para pagamento à vista, o comerciante dá um desconto de 20%. Supondo que a inflação tenha se estabilizado em 20% ao mês e que, mantendo o dinheiro no banco, o comprador ganhe correção mensal, nesse caso:

a) O plano parcelado é mais vantajoso.
b) O plano à vista é mais vantajoso.
c) Nenhum dos planos tem vantagem sobre o outro.
d) O plano parcelado só é vantajoso se forem comprados 2 produtos.
e) O plano à vista só é vantajoso se forem comprados 2 produtos.

(EM13MAT203)

3. Se os preços aumentam 10% ao mês, qual a porcentagem de aumento em um trimestre?

a) 1,1%
b) 3,1%
c) 11,8%
d) 25,8%
e) 33,1%

(EM13MAT203)

4. Bancos costumam fazer propagandas do tipo: "Aplique hoje R$ 2.000 e receba R$ 4.120 daqui a 5 meses". Qual é a taxa mensal de juros que um banco que faz essa propaganda aplica sobre o valor investido?

a) 4,12% a. m
b) 8,24% a. m
c) 11,11% a. m
d) 14,44% a. m
e) 15,55% a. m

(EM13MAT303)

5. Um investidor aplicou no mercado financeiro um capital de R$ 300.000 a juros compostos de 4,5% a.m. durante 3 meses. O montante, ele reaplicou a 6% a.m. No final da operação, ele obteve um montante de R$ 730.000. Qual foi o período total em que o capital esteve aplicado?

a) 8 dias
b) 16 dias
c) 8 meses
d) 16 meses
e) 32 meses

Professor

A sugestão para a utilização desta série de atividades finais é como uma avaliação somativa. Essa avaliação pode ser adaptada conforme sua preferência, podendo ser realizada individualmente, em duplas ou em pequenos grupos, de acordo com o método que melhor se alinha aos objetivos de ensino e à dinâmica da sua turma. Isso proporcionará aos alunos uma oportunidade de demonstrar suas aprendizagens de maneira colaborativa ou individual, garantindo uma avaliação abrangente.

(EM13MAT203)

6. (Fuvest-SP) Um comerciante deu um desconto de 20% sobre o preço de venda de uma mercadoria e, mesmo assim, conseguiu um lucro de 20% sobre o preço que pagou pela mesma. Se o desconto não fosse dado, seu lucro, em porcentagem, seria:

a) 40%
b) 45%
c) 50%
d) 55%
e) 60%

(EM13MAT203)

7. (Unesp-SP) Um advogado contratado por Marcos consegue receber 80% de uma causa avaliada em R$ 200.000 e cobra 15% da quantia recebida a título de honorários. A quantia, em reais, que Marcos receberá, descontada a parte do advogado, será de:

a) 24.000
b) 30.000
c) 136.000
d) 160.000
e) 184.000

(EM13MAT203)

8. (FGV-SP) Um aparelho de TV é vendido por R$ 1.000 em dois pagamentos iguais, sem acréscimo, sendo o 1º como entrada e o 2º um mês após a compra. Se o pagamento for feito à vista, há um desconto de 4% sobre o preço de R$ 1.000. A taxa mensal de juros simples do financiamento é aproximadamente igual a:

a) 8,7%
b) 7,7%
c) 6,7%
d) 5,7%
e) 4,7%

(EM13MAT203)

9. (Unifesp-SP) Com relação à dengue, o setor de vigilância sanitária de um determinado município registrou o seguinte quadro, quanto ao número de casos positivos:

– em fevereiro, relativamente a janeiro, houve um aumento de 10% e

– em março, relativamente a fevereiro, houve uma redução de 10%.

Em todo o período considerado, a variação foi de:

a) – 1%
b) – 0,1%
c) 0%
d) 0,1%
e) 1%

(EM13MAT203)

10. (Unifesp-SP) Uma empresa brasileira tem 30% de sua dívida em dólares e os restantes 70% em euros. Admitindo-se uma valorização de 10% do dólar e uma desvalorização de 2% do euro, ambas em relação ao real, pode-se afirmar que o total da dívida dessa empresa, em reais:

a) aumenta 8%.
b) aumenta 4,4%.
c) aumenta 1,6%.
d) diminui 1,4%.
e) diminui 7,6%.

(EM13MAT203)

11. (UFV-MG) Uma pessoa deposita uma quantia em dinheiro na caderneta de poupança. Sabendo-se que o montante na conta, após *t* meses, é dado por $M(t) = c \cdot 2^{0,01t}$, em que C é uma constante positiva, o tempo mínimo para duplicar a quantia depositada é:

a) 6 anos e 8 meses.

b) 7 anos e 6 meses.

c) 8 anos e 4 meses.

d) 9 anos e 3 meses.

e) 10 anos e 2 meses.

(EM13MAT203)

12. (PUC-RS) A cada balanço anual, uma firma tem apresentado um aumento de 10% de seu capital. Considerando Q_o o seu capital inicial, a expressão que fornece esse capital C ao final de cada ano (t) em que essas condições permanecerem é:

a) $C = Q_o\ (1{,}1)^t$

b) $C = C\ (1{,}1)^t$

c) $C = Q_o\ (0{,}1)^t$

d) $C = C\ (0{,}1)^t$

e) $C = Q_o\ (10)^t$

(EM13MAT203)

13. (EEAR-SP) Para obter-se um total de R$ 22.800,00 ao final de 1 ano e 2 meses, à taxa de 12% ao ano, a juros simples, é necessário que se aplique:

a) R$ 10.000,00

b) R$ 12.000,00

c) R$ 15.000,00

d) R$ 20.000,00

(EM13MAT203)

14. (CN-RJ) Se uma pessoa aplica somente 2/5 de seu capital em letras durante 90 dias, à taxa de 2,5% ao mês (juros simples) e recebe R$ 9.600,00 de juros, então seu capital é de:

a) R$ 128.000,00

b) R$ 240.000,00

c) R$ 320.000,00

d) R$ 400.000,00

e) R$ 960.000,00

(EM13MAT303)

15. (CEF-DF) Um capital de R$ 15.000,00 foi aplicado a juro simples à taxa bimestral de 3%. Para que seja obtido um montante de R$ 19.050,00, o prazo dessa aplicação deverá ser de:

a) 1 ano e 10 meses

b) 1 ano e 9 meses

c) 1 ano e 8 meses

d) 1 ano e 6 meses

e) 1 ano e 4 meses

(EM13MAT203)

16. (Escreva-TAC-SP) Um capital de R$ 23.000,00 foi aplicado durante 4 meses a uma taxa mensal de juro simples de 3%. Vencida essa aplicação, apenas os juros obtidos foram reaplicados a uma taxa de juro simples de 3,5% durante 3 meses. Nesta reaplicação, o investidor obteve de juro a quantia de:

a) R$ 289,80

b) R$ 288,90

c) R$ 290,00

d) R$ 279,80

e) R$ 299,80

(EM13MAT203)

17. (TRT-RJ) Em um boleto bancário consta o pagamento de R$ 70,00 a ser efetuado até o vencimento. Sabendo-se que após o vencimento é cobrado 0,5 % de juros simples por dia de atraso, acrescido de multa de R$ 5,00, se esse pagamento for efetuado com 15 dias de atraso, a quantia a ser paga deverá ser de:

a) R$ 80,25

b) R$ 127,50

c) R$ 75,25

d) R$ 75,35

e) R$ 82,50

(EM13MAT203)

18. (Enem-MEC) João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é de R$ 21.000,00, e esse valor não será reajustado nos próximos meses. Ele tem R$ 20.000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro.

Para ter o carro, João deverá esperar

a) dois meses, e terá a quantia exata.

b) três meses, e terá a quantia exata.

c) três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 225,00.

d) quatro meses, e terá a quantia exata.

e) quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 430,00.

Adobestock

Os códigos de barras são sequências numéricas usadas para identificar produtos. Esses códigos são lidos por computador. Podemos presenciar isso sendo feito nas compras em um supermercado, por exemplo.

Professor

Neste capítulo, abordaremos os sistemas lineares, matrizes e determinantes, enriquecendo os conceitos com insights históricos e exemplos de aplicações práticas que se conectam diretamente à vida cotidiana dos alunos. Nosso objetivo é ampliar o entendimento por meio de discussões que contextualizam os tópicos, alinhando-os às habilidades propostas pela BNCC para este capítulo. Dessa forma, promoveremos uma compreensão mais profunda e enriquecedora dos conteúdos apresentados.

Capítulo 2

Sistemas lineares, matrizes e determinantes

Os primeiros exemplos de sistemas lineares são encontrados nos registros de antigas civilizações por volta de 2000 a.C. Ao final do século XVIII, foram desenvolvidos métodos de resolução de sistemas lineares baseados em tabelas numéricas formadas pelos coeficientes das equações que compunham esses sistemas. Essas tabelas numéricas deram origem ao que hoje denominamos de matrizes e determinantes, que, além de serem aplicadas ao estudo dos sistemas lineares, possibilitaram o desenvolvimento de novos ramos da Matemática.

Neste capítulo, vamos começar estudando os sistemas lineares, as matrizes e os determinantes.

(EM13MAT302)

Equações lineares

Professor

Comente que já em 250 a.C., encontramos uma importante contribuição chinesa ao desenvolvimento da Matemática: a obra *Nove Capítulos Sobre a Arte Matemática*. Nela, encontra-se o quadrado mágico, no qual a soma de quaisquer elementos de linhas, colunas ou diagonais resulta no mesmo valor, neste caso, a soma é 15. Os gregos também desenvolveram métodos de resolução de alguns sistemas de equações de 1º grau, como aqueles encontrados na obra de Diofanto de Alexandria (221?-305?). Trabalhos dessa natureza são igualmente encontrados nas obras de diversos matemáticos hindus, como Aryabhata (476-550) e Brahmagupta (589-668), e árabes, como Al-Khowarizmi (780?-840) e Omar Khayyam (1408-1131). Isso se repete até os dias atuais, com a Matemática sendo construída por inúmeros nomes importantes ao longo da história.

Equação linear é toda equação do tipo

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = k$

em que:

- $x_1, x_2, ... x_n$ são as incógnitas da equação;
- $a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais denominados coeficientes da equação;
- k é um número real chamado termo independente da equação.

É importante salientar que toda equação linear tem incógnitas de primeiro grau, isto é, os expoentes das incógnitas são iguais a 1. Observe os exemplos de equações lineares:

- $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$ tem coeficientes 2, 3 e – 1 e termo independente 7;
- $4x - 3y + z - 2t = \sqrt{3}$ tem coeficientes 4, –3, 1 e –2 e termo independente $\sqrt{3}$;
- $3x + y = 0$ tem coeficientes 3 e 1 e termo independente 0.

Sempre que o termo independente de uma equação linear é zero, ela é chamada de equação linear homogênea.

Toda sequência ordenada de números reais que verifica uma equação linear é chamada de solução da equação. Assim, uma sequência $(\alpha_1, \alpha_2, ... \alpha_n)$ será solução da equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = k$ se ocorrer $a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + ... + a_n\alpha_n = k$.

Observe alguns exemplos de soluções e note que uma mesma equação linear pode ter mais de uma solução:

- $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7$ tem como uma de suas soluções a terna (2, 1, 0), pois:

  $2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 0 = 7 \Rightarrow 7 = 7$

  Já a terna (1, 2, 1) também é solução desta equação, pois:

  $2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 1 = 7 \Rightarrow 7 = 7$

- $4x - 3y + z - 2t = \sqrt{3}$ tem como uma de suas soluções $(1, 0, \sqrt{3}, 2)$, pois:

  $4 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + \sqrt{3} - 2 \cdot 2 = 4 - 0 + \sqrt{3} - 4 = \sqrt{3}$

  $\sqrt{3} = \sqrt{3}$

  As quádruplas $(0, 0, \sqrt{3}, 0)$, $\left(0, 0, 2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0)$ também são soluções, pois satisfazem a equação linear;

- A quádrupla (0, 0, 0, 0) é solução da equação linear homogênea $3x - 4y + 2z + t = 0$, pois:

  $3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 = 0$

Uma sequência (0, 0, 0, ..., 0) será sempre uma das soluções para uma equação linear homogênea. Esta solução é denominada solução trivial.

Professor

Dentro da metodologia deste material, as atividades resolvidas desempenham um papel fundamental como ferramentas auxiliares no processo de ensino e aprendizagem. Sugerimos que você estimule os alunos a acompanharem atentamente o detalhado passo a passo de cada resolução e, se possível, os encoraje a replicar as resoluções em seus próprios cadernos. Além disso, eles podem explorar a criação de pequenas variações das atividades já solucionadas, o que proporcionará um maior engajamento e compreensão dos conceitos abordados. Isso permitirá que os alunos apliquem os princípios aprendidos de forma prática e reforcem sua compreensão do conteúdo estudado.

Atividades resolvidas

R1. Verifique se a equação linear homogênea $x + y + z + t = 0$ admite como soluções as quádruplas $(-1, 1, -1, 1)$ e $(-2, 2, -2, 2)$, além da trivial. Depois escreva uma quádrupla genérica, em função do parâmetro $m \in \mathbb{R}$.

Resolução

As quádruplas $(-1, 1, -1, 1)$ e $(-2, 2, -2, 2)$ satisfazem a equação, pois $-1 + 1 - 1 + 1 = 0$ e $-2 + 2 - 2 + 2 = 0$.

Uma quádrupla genérica que represente parte das soluções da equação $x + y + z + t = 0$ pode ser expressa em função de $m \in \mathbb{R}$ como $(m, -m, m, -m)$. Essa quádrupla representa um subconjunto do conjunto de soluções para a equação.

R2. Dada a equação $x - 3y - z = 4$, determine p de modo que $(0, 0, p)$ seja solução da equação.

Resolução

Substituindo 0, 0 e p em x, y e z, temos, respectivamente:

$0 - 3 \cdot 0 - p = 4 \Rightarrow -p = 4 \Rightarrow p = -4$

Professor

Sempre que possível, incentive os estudantes a resolverem as atividades em duplas ou em pequenos grupos, de modo que possam se ajudar nas resoluções.

Atividades

1. Verifique quais das ternas seguintes são soluções da equação linear $x + y - 2z = 2$:

a) $(1, 2, 4)$ Não é solução.

b) $\left(1, 2, \frac{1}{2}\right)$ É solução.

c) $(-3, -5, 3)$ Não é solução.

d) $(0, 0, 0)$ Não é solução.

2. Dada a equação $2x - 2y - 4z = 4$, determine p de modo que cada uma das ternas seja solução da equação:

a) $(0, 0, p)$ -1

b) $(1, -2p, 1)$ $\frac{3}{2}$

c) $(p + 1, 3, 0)$ 4

d) $(p, p, p + 5)$ -6

Sistema de equações lineares (EM13MAT315)

Um sistema de equações lineares $m \times n$ é um conjunto de m equações lineares, cada uma delas com n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Professor

É fundamental enfatizar que a compreensão do sistema de equações será um alicerce essencial para a compreensão dos conceitos que os alunos abordarão logo adiante neste capítulo. Portanto, reforçar a clareza e aprofundamento nessa primeira etapa do conteúdo é de extrema importância para que possam avançar de maneira sólida e bem-fundamentada nos tópicos subsequentes.

em que:

- $x_1, x_2, \ldots x_n$ são incógnitas;
- $\left.\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}\right\}$ são coeficientes numéricos;
- $b_1, b_2, \ldots b_m$ são termos independentes.

Observe os exemplos de sistemas lineares:

1. $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Esse é um sistema linear 2×2, pois é formado por duas equações lineares com incógnitas x e y.

2. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$

Nesse caso, temos um sistema linear 3×3, com três equações lineares e três incógnitas x, y e z.

3. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$

Aqui temos um caso de sistema linear do tipo 2×3, pois tem apenas duas equações e três incógnitas *x*, *y* e *z*.

4. $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases}$

Já esse sistema é do tipo 3×3, pois é formado por 3 equações lineares e 3 incógnitas e como suas equações lineares são todas homogêneas, o sistema é denominado sistema linear homogêneo.

Todo sistema linear do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

é denominado sistema linear homogêneo do tipo $m \times n$.

Denominamos solução do sistema linear toda sequência ordenada de números reais que verifica, simultaneamente, todas as equações do sistema. Dessa forma, resolver um sistema significa encontrar todas as sequências ordenadas de números reais que satisfaçam as equações do sistema.

Um sistema linear pode ser classificado de acordo com o número de soluções que admitir. Considerando esse critério, existem três classes de sistemas lineares:

– os possíveis e determinados, para os quais existe uma única solução;

– os possíveis e indeterminados, que têm infinitas soluções;

– os sistemas impossíveis, para os quais não existe solução.

Acompanhe alguns exemplos de classificações de sistemas de equações lineares:

• O par ordenado (2, 1) é solução do sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$, pois $\begin{cases} 2 + 1 = 3 \\ 2 - 1 = 1 \end{cases}$

Como não existe outro par que satisfaça simultaneamente as duas equações, dizemos que esse sistema é **possível e determinado**, pois possui uma única solução.

• As ternas (1, 1, 1) e $\left(0, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ são algumas das infinitas soluções do sistema

$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$, pois $\begin{cases} 1 + 1 + 1 = 3 \\ 1 - 1 + 2 = 2 \end{cases}$ e $\begin{cases} 0 + \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3 \\ 0 - \frac{4}{3} + \frac{10}{3} = 2 \end{cases}$.

Por essa razão, esse sistema é **possível e indeterminado**.

• Para o sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$, não existe um par de números reais que satisfaça simultaneamente as equações. Logo, o sistema não tem solução, portanto é impossível.

Atividades

3. Escreva em seu caderno quais sistemas são lineares:

a) $\begin{cases} x + y = -1 \\ x \cdot y = 3 \end{cases}$

Não é sistema linear.

b) $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$

É um sistema linear.

4. Verifique se a terna (0, 1, 1) é solução dos sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + 2y + z = 3 \end{cases}$

É solução.

b) $\begin{cases} 3x - y - z = -2 \\ x - y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$

Não é solução.

Professor

O ensino de sistemas lineares escalonados desempenha um papel crucial na compreensão da álgebra linear e suas aplicações. Ao aprender a organizar as equações de um sistema de forma escalonada, os alunos desenvolvem habilidades analíticas que os capacitam a encontrar soluções mais eficientemente. Além disso, essa abordagem oferece uma visão clara das relações entre as variáveis e as restrições impostas pelas equações, permitindo que os estudantes analisem e interpretem as soluções de maneira mais profunda. O ensino de sistemas lineares escalonados não apenas promove a capacidade de resolver problemas matemáticos, mas também estimula o pensamento lógico e a aplicação prática desses conceitos em diversos contextos da matemática e além.

Sistema escalonado

Sistema linear escalonado é todo sistema no qual as incógnitas das equações lineares estão escritas em uma mesma ordem e o 1º coeficiente não nulo de cada equação está à direita do 1º coeficiente não nulo da equação anterior.

Observe os exemplos a seguir.

1. Neste exemplo, o sistema 2×2 é escalonado. Note que a primeira equação tem dois coeficientes não nulos; a segunda tem apenas um.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ \quad 3y = 6 \end{cases}$$

2. Neste caso, o sistema é do tipo 3×3 e também está escalonado. A primeira equação tem três coeficientes não nulos, a segunda, dois, e a terceira, apenas um.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ \qquad y + z = 3 \\ \qquad\quad z = 1 \end{cases}$$

3. Este sistema, apesar de ser do tipo 2×3, também é escalonado.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ \qquad y - z = 3 \end{cases}$$

A partir da definição, pode-se concluir que em todo sistema escalonado, o número de equações é sempre igual ou menor que o número de incógnitas.

Resolução de um sistema escalonado

Para se resolver um sistema escalonado com *m* equações e *n* incógnitas, devemos considerar dois casos:

Número de equações (*m*) = Número de incógnitas (*n*)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & k_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & k_2 \\ & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{nn}x_n & = & k_n \end{cases}$$

Para se chegar à solução desse sistema, parte-se da última equação, que fornece diretamente o valor de x_n e, por substituição nas equações anteriores, obtém-se os valores de x_{n-1}, x_{n-2},..., x_2 e x_1.

Número de equações (*m*) < número de incógnitas (*n*)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = k_1 \\ \qquad\quad\; a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = k_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \qquad\;\; \vdots \\ \qquad\quad\; a_{mj}x_j + \cdots + a_{nn}x_n = k_n \end{cases}$$

Para se resolver esse tipo de sistema, procede-se da seguinte forma:

1) identificam-se as variáveis que não iniciam equações (variáveis livres);

2) transpõem-se as variáveis livres para o segundo membro de cada equação e atribuem-se a elas valores reais arbitrários.

Com esse procedimento, obtém-se um sistema em que o número de equações é igual ao número de incógnitas, que pode ser resolvido por substituições sucessivas. Acompanhe os exercícios resolvidos.

Atividades resolvidas

Professor

Comentário na página 42.

R3. Resolva e classifique o sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \text{ (I)} \\ \quad\;\; y + z = 3 \text{ (II)} \\ \qquad\quad z = 1 \text{ (III)} \end{cases}$$

Resolução

Da equação (III), temos $z = 1$. Substituindo o valor de z na equação (II), obtemos y:

$y + 1 = 5 \Rightarrow y = 4$

Substituindo z e y em (I), obtemos x:

$x + 4 + 2 \cdot 1 = 5 \Rightarrow x = -1$

A única solução do sistema é a terna (–1, 4, 1). Logo, esse sistema é possível e determinado.

Atividades

5. Escreva em seu caderno quais são os sistemas escalonados:

a) $\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ \quad 3y + z = 5 \\ \qquad\quad z = 1 \end{cases}$

É sistema escalonado.

b) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$

Não é sistema escalonado.

6. Indique, se houver, as variáveis livres nos sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ \quad y + z + t = 2 \\ \qquad z - t = 1 \end{cases}$

A variável livre é t.

b) $\begin{cases} x + y + z + 2t = 3 \\ \quad y - 2z + 3t = 1 \end{cases}$

As variáveis livres são z e t.

Professor

Existem ferramentas digitais que podem auxiliar na resolução de sistemas lineares. Se julgar pertinente, pesquise e apresente algum desses para os alunos, orientando-os no uso consciente desse tipo de ferramenta. Um exemplo é a seguinte ferramenta on-line: https://linkja.net/matrixcalc.

Escalonamento e resolução de um sistema linear

Dado um sistema linear *S*, pode-se obter um sistema escalonado que seja equivalente a *S*. Dizemos que dois sistemas lineares são equivalentes quando toda solução de um for também solução do outro e vice-versa. Por exemplo, os sistemas:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$$

são equivalentes, pois ambos têm como única solução o par (2, 1).

Professor

Como atividade extra, resolva com os estudantes na lousa, ajudando-os no passo a passo a resolver o sistema $\begin{cases} x + y - z + t = 5 \\ 2z - t = 4 \end{cases}$. Comente que neste caso, o sistema tem duas variáveis livres: y e t. Atribuiremos a elas os valores reais α e β. Assim, para $y = \alpha$ e $t = \beta$, o sistema fica:

$$\begin{cases} x + \alpha - z + \beta = 5 \\ 2z - \beta = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - z = 5 - \alpha - \beta \\ 2z = 4 + \beta \end{cases}$$

Da segunda equação $z = \dfrac{4 + \beta}{2}$ e substituindo na primeira equação, teremos o valor de x:

$$x - z = 5 - \alpha - \beta \rightarrow x - \frac{4 + \beta}{2} = 5 - \alpha - \beta$$

$$x = 5 - \alpha - \beta + \frac{4 + \beta}{2}$$

$$x = \frac{10 - 2\alpha - 2\beta + 4 + \beta}{2} \rightarrow x = \frac{14 - 2\alpha - \beta}{2}$$

Assim, explique que os valores encontrados nos permitem escrever a solução geral do sistema em função de α e β reais e classificá-lo, também, como possível e indeterminado, com grau de indeterminação igual a 2.

$$\left(\frac{14 - 2\alpha - \beta}{2}, \alpha, \frac{4 + \beta}{2}, \beta\right)$$

Agora, peça que acompanhem também as atividades resolvidas do livro e as refaçam no caderno.

Podemos transformar qualquer sistema linear em um outro equivalente pelas seguintes transformações elementares, realizadas com suas equações:

- trocar as posições de duas equações do sistema;
- multiplicar uma equação do sistema por um número real não nulo;
- somar a uma equação do sistema uma outra multiplicada por um número real.

Para resolvermos sistemas lineares por escalonamento, procuramos obter sistemas equivalentes, utilizando tantas transformações lineares quantas forem necessárias, até encontrarmos um sistema escalonado.

Atividades resolvidas

R4. Resolva o sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 4y = 6 \end{cases}$.

Resolução

Inicialmente, trocamos a posição das equações, pois é conveniente ter coeficiente igual a 1 na primeira equação.

$$\begin{cases} x + 4y = 6 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Depois, eliminamos a incógnita *x* da segunda equação. Para tanto, multiplicamos a primeira equação por −2 e a adicionamos à segunda equação.

$$\begin{cases} x + 4y = 6 \quad \boxed{\cdot (-2)} \\ 2x + y = 5 \quad \xleftarrow{+} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y = 6 \\ -7y = -7 \end{cases}$$

Da segunda equação, temos $y = 1$.

Substituindo $y = 1$ na primeira equação, obtemos $x = 2$.

O par (2, 1) é a única solução do sistema. Portanto, o sistema é possível e determinado.

R5. Resolva, se possível, o sistema $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$.

Resolução

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \quad \boxed{\cdot (-3)} \\ 3x + 6y = 3 \quad \xleftarrow{+} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 0y = -12 \end{cases}$$

Note que a equação $0y = -12$ não possui solução: não existe número que, multiplicado por zero, dê −12. Quando ocorrer, durante o escalonamento, uma equação desse tipo, o sistema será impossível.

Atividades

7. Escalone os seguintes sistemas lineares:

a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 2 \\ -5y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 5 \\ y = 2 \end{cases}$

8. Classifique os seguintes sistemas em possível determinado (SPD), possível e indeterminado (SPI) ou impossível (SI):

a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y - z = 5 \end{cases}$

SPI

b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 4 \\ z = 2 \end{cases}$

SPD

c) $\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ z - t = 1 \end{cases}$

SPI

d) $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ y + z = 3 \\ 0z = 4 \end{cases}$

SI

9. Escalone e classifique os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 4 \;\; s \\ 3x + 2y - 2z = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 5z = -2; SPI \\ 0z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 1; SI \\ y = -1 \end{cases}$

Professor

Ao guiar os alunos através das atividades resolvidas, destaque a importância de uma análise atenta para compreenderem as diferentes classificações de sistemas lineares. Incentive-os a examinar os passos de resolução e a identificar as características distintas de cada tipo. Além disso, considere usar exemplos adicionais na lousa, aprofundando a compreensão com variedade de cenários. Essa abordagem auxiliará na internalização das nuances de cada classificação, preparando os alunos para aplicar esses conhecimentos de forma confiante e precisa em futuras situações.

Discussão sobre um sistema linear

Discutir sobre sistema linear significa analisar as possibilidades de solução em função de valores que podem ser atribuídos a alguns de seus parâmetros. Assim, após o escalonamento do sistema, deve-se considerar para quais valores dos parâmetros pode-se ter um sistema possível e determinado, um sistema possível e indeterminado ou um sistema impossível.

Atividades resolvidas

R6. Discuta, em função do parâmetro a, o sistema: $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + ay = 6 \end{cases}$.

Resolução

Inicialmente, escalonamos o sistema efetuando as transformações lineares indicadas:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + ay = 6 \end{cases} \quad \cdot(-2)\ +$$

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ (a - 2)y = -2 \end{cases}$$

1) Se $a - 2 \neq 0$, então $y = -\dfrac{2}{a-2} = \dfrac{2}{2-a}$. Substituindo na primeira equação, achamos x (também em função de a):

$$x + y = 4 \Rightarrow x + \frac{2}{2-a} = 4$$

$$x = 4 - \frac{2}{2-a} = \frac{8 - 4a - 2}{2-a} = \frac{6-4a}{2-a}$$

Então:

Para cada $a \neq 2$, o par $\left(\dfrac{6-4a}{2-a}, \dfrac{2}{2-a}\right)$ é solução da equação. Note que essa solução depende de a, mas para cada a fixado, ela é única. Portanto, para $a \neq 2$, o sistema é possível e determinado.

2) Se $a - 2 = 0$, (ou seja, $a = 2$), temos na segunda equação $(a - 2)y = -2$, ou seja, $0 \cdot y = -2$, o que é impossível. Logo, para $a = 2$, o *sistema* é impossível (não existem valores de x e y que satisfaçam simultaneamente as duas equações).

Resumindo, temos:

1) $a \neq 2 \Rightarrow$ ***sistema possível e determinado***, com soluções $x = \dfrac{6-4a}{2-a}$ e $y = \dfrac{2}{2-a}$

2) $a = 2 \Rightarrow$ ***sistema impossível***

R7. Determine $m \in$ R de modo a se admitir apenas a solução trivial para o sistema homogêneo:

$$\begin{cases} 3x - my = 0 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases}$$

Resolução

$$\begin{cases} 3x - my = 0 \\ 6x + 2y = 0 \end{cases} \quad \cdot(-2)\ +$$

$$\begin{cases} 3x - my = 0 \\ (2m + 2)y = 0 \end{cases}$$

Para que o sistema admita apenas a solução trivial, ele deve ser possível e determinado. Para isso:

$2m + 2 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$

$S = \{m \in \mathbb{R} \mid m \neq -1\}$

Atividades

10. Discuta os sistemas nas incógnitas *x* e *y*.

a) $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x - 5y = a \end{cases}$

$a \in \mathbb{R} \Rightarrow$ SPD

b) $\begin{cases} 2x - ay = 5 \\ 4x + 2y = a \end{cases}$

$a \neq -1 \Rightarrow$ SPD

$a = -1 \Rightarrow$ SI

c) $\begin{cases} ax + y = 2 \\ x - y = 1 + b \end{cases}$

Se $a \neq -1 \Rightarrow$ SPD

Se $a = -1$ e $b = -3 \Rightarrow$ SPI

Se $a = -1$ e $b \neq -3 \Rightarrow$ SI

d) $\begin{cases} 3x + y = b \\ (a + 1)x + 2y = -1 \end{cases}$

Se $a \neq 5 \Rightarrow$ SPD

Se $a = 5$ e $b = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ SPI

Se $a = 5$ e $b \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow$ SI

11. Discuta os sistemas lineares nas incógnitas *x*, *y* e *z*.

a) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 7x + y - 3z = 10 \\ 4x + y + kz = p \end{cases}$

Se $k \neq -1 \Rightarrow$ SPD

Se $k = -1$ e $p = 8 \Rightarrow$ SPI

Se $k = -1$ e $p \neq 8 \Rightarrow$ SI

b) $\begin{cases} x + py + z = 1 \\ 2x + 3y - z = q \\ x + y - 4z = 2 \end{cases}$

Se $p \neq \frac{12}{7} \Rightarrow$ SPD

Se $p = \frac{12}{7}$ e $q = \frac{13}{5} \Rightarrow$ SPI

Se $p = \frac{12}{7}$ e $q \neq \frac{13}{5} \Rightarrow$ SI

12. Resolva e classifique os sistemas lineares homogêneos:

a) $\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$

S = {(0, 0)}; sistema determinado

b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \end{cases}$

S = {(0, 0, 0)}; sistema determinado

13. Determine $m \in$ R de modo que os sistemas homogêneos a seguir admitam apenas a solução trivial:

a) $\begin{cases} 4x + my = 0 \\ 8x - 4y = 0 \end{cases}$

S = {m ∈ R | m ≠ -2}

b) $\begin{cases} x + 2my = 0 \\ 2x - 6y = 0 \end{cases}$

$S = \left\{ m \in R \mid m \neq -\frac{3}{2} \right\}$

Matrizes

(EM13MAT315)

Denomina-se matriz toda tabela retangular de valores dispostos ordenadamente em linhas e colunas. As matrizes são indicadas por letras maiúsculas do alfabeto latino e representadas utilizando-se parênteses ou colchetes.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 45 & 31 & 24 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

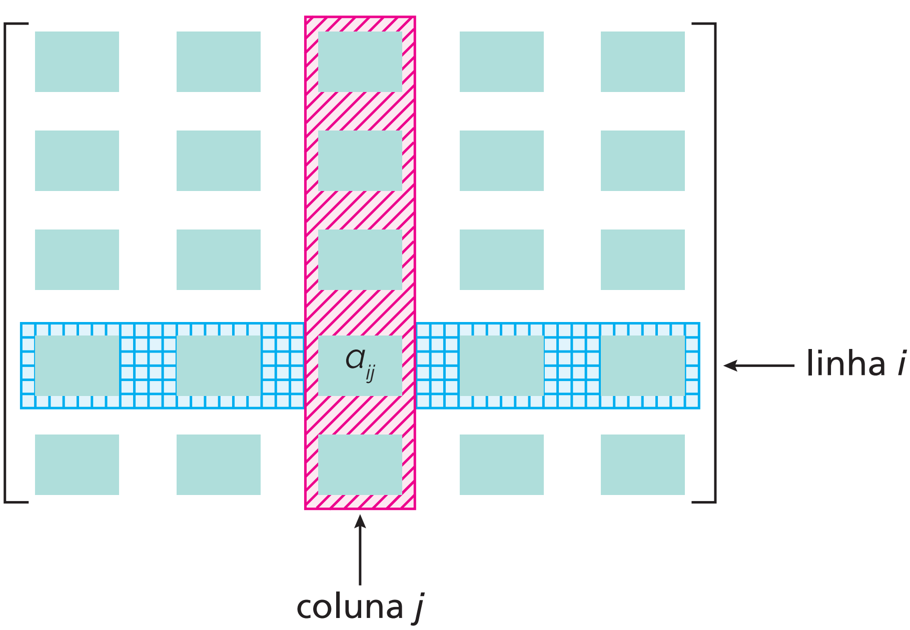
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 8{,}2 & 1{,}5 & 9{,}3 & 0 \\ 6{,}5 & 0 & 9{,}4 & 7{,}2 \end{bmatrix}$$

Professor

Ao introduzir o conceito de matriz, recomenda-se revisitar, quando necessário, as equações lineares estudadas no início do capítulo. Essa abordagem permitirá uma conexão direta entre as equações e a estrutura da matriz, facilitando a compreensão dos alunos. Durante essa etapa inicial, é fundamental que os estudantes obtenham um entendimento claro da organização matricial, capacitação para identificar elementos individuais da matriz. Isso garantirá uma base sólida para a exploração mais profunda dos tópicos subsequentes e a aplicação eficaz desses conceitos em diferentes contextos.

Um elemento genérico de uma matriz A é simbolizado por a_{ij}, em que i indica a linha, e j, a coluna a que o elemento pertence.



Na matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 5 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, temos:

$a_{11} = \mathbf{6}$, linha 1 e coluna 1

$a_{12} = \mathbf{7}$, linha 1 e coluna 2

$a_{13} = \mathbf{2}$, linha 1 e coluna 3

$a_{14} = \mathbf{8}$, linha 1e coluna 4

$a_{21} = \mathbf{1}$, linha 2 e coluna 1

$a_{22} = \mathbf{3}$, linha 2 e coluna 2

$a_{23} = \mathbf{2}$, linha 2 e coluna 3

$a_{24} = \mathbf{6}$, linha 2 e coluna 4

$a_{31} = \mathbf{5}$, linha 3 e coluna 1

$a_{32} = \mathbf{5}$, linha 3 e coluna 2

$a_{33} = \mathbf{7}$, linha 3 e coluna 3

$a_{34} = \mathbf{8}$, linha 1 e coluna 4

A matriz A é constituída por três linhas e quatro colunas. Por essa razão, é denominada matriz do tipo 3×4.

Uma matriz genérica do tipo $m \times n$ é representada assim:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Essa matriz $m \times n$ possui $m \cdot n$ elementos. Podemos também expressá-la de forma mais reduzida, por meio de uma lei de formação para seus elementos:

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ | lei de formação, com

$i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Atividades resolvidas

R8. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que $a_{ij} = i + j$.

Resolução

Como a matriz é do tipo 2×2, ela possui duas linhas e duas colunas, ou seja, quatro elementos assim dispostos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Cada um de seus elementos pode ser calculado pela lei de formação:

$$a_{ij} = i + j \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = 1 + 1 = 2 \\ a_{12} = 1 + 2 = 3 \\ a_{21} = 2 + 1 = 3 \\ a_{22} = 2 + 2 = 4 \end{cases}$$

Logo, a matriz é: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

R9. Determine a matriz $A = (a_{ij})_{2\times 2}$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } i = j \\ 0, \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Resolução

A matriz A do tipo 2×2 é: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Seus elementos obedecem à lei: $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } i = j \\ 0, \text{se } i \neq j \end{cases}$

Assim, temos: $a_{11} = 1$, pois $i = j$.

$a_{12} = 0$, pois $i \neq j$

$a_{21} = 0$, pois $i \neq j$

$a_{22} = 1$, pois $i = j$

Logo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Atividades

14. Identifique o tipo de cada uma das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

2×3

b) $B = (1 \quad 5 \quad -3)$

1×3

c) $C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

3×1

d) $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

3×3

15. Determine quantos elementos possui uma matriz do tipo:

a) 1×6

6 elementos

b) 4×1

4 elementos

c) 3×3

9 elementos

d) 3×5

15 elementos

16. É dada a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & -7 \\ \sqrt{2} & -3 & 9 \end{bmatrix}$$

Identifique os elementos da:

a) 1ª linha

3, -2, 5

b) 3ª coluna

5, 0, -7, 9

c) 4ª linha

$\sqrt{2}, -3, 9$

d) 2ª coluna

-2, 2, 4, -3

17. Considere a matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Determine o valor dos seguintes elementos:

a) b_{11}

2

b) b_{21}

−3

c) b_{12}

1

d) b_{23}

5

e) b_{32}

$\nexists$

f) b_{22}

4

18. Uma matriz possui quatro elementos. Quais os tipos possíveis para essa matriz?

1×4, 4×1, 2×2

19. Determine a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ tal que:

a) $a_{ij} = i + 2j$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

b) $a_{ij} = i^2 + j$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

c) $a_{ij} = 2i - j$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

d) $a_{ij} = j - 2i$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

20. Determine a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que:

a) $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{se } i = j \\ 1, \text{se } i \neq j \end{cases}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } i = j \\ -1, \text{se } i \neq j \end{cases}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

21. Dada a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

determine a soma dos elementos a_{ij}, tais que:

a) $i + j = 4$

8

b) $i + j = 3$

1

Tipos de matrizes

Algumas matrizes recebem nomes especiais em função de suas características:

Matriz linha

É toda matriz do tipo $1 \times n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

$A = [a_{11} \ldots a_{12}\ a_{13} \ldots a_{1n}]$

Observe os exemplos:

$A = [4,\ \ -2\ \ \ 0]_{1 \times 3}$

$B = [2\ \ 1\ \ 0\ \ 9]_{1 \times 4}$

Matriz coluna

É toda matriz do tipo $m \times 1$ ($m \in \mathbb{N}^*$).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

As matrizes $M = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ k \end{bmatrix}$

são exemplos de matrizes coluna, respectivamente do tipo 3×1 e 4×1.

Professor

Aborde cada tipo de matriz conforme sugerido no livro e, para ajudar na fixação do conteúdo, peça aos estudantes que escrevam nos seus cadernos, chamando alguns à lousa, cada um dos tipos apresentados.

Matriz quadrada

É toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas. Assim, chamamos matriz quadrada de ordem n toda matriz do tipo $n \times n$.

Observe, como exemplo, que as matrizes

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

são matrizes quadradas de ordem 2 e 3, respectivamente.

Toda matriz quadrada possui duas diagonais:

– a principal, composta por elementos a_{ij}, tais que $i = j$, isto é, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, ..., a_{nn}$;

– a secundária, em que os elementos a_{ij} são tais que $i + j = n + 1$, ou $a_{1n}, a_{2,\,n-1}, a_{3,\,n-2}, ..., a_{n1}$.

Veja como são as diagonais de uma matriz quadrada do tipo 3×3:

$$\text{diagonal secundária} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{diagonal principal}$$

Matriz nula

É toda matriz do tipo $m \times n$ cujos elementos são todos nulos. Para indicar uma matriz nula, utiliza-se a notação $O_{m \times n}$. Observe os exemplos de matrizes nulas de tipos 2×2 e 3×2:

$$O_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } O_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal

É toda matriz quadrada em que os elementos não pertencentes à diagonal principal são todos nulos. Por exemplo, $K = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ são matrizes diagonais de 2ª e 3ª ordem, respectivamente.

Matriz identidade

É toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Para indicar uma matriz identidade de ordem n, utilizamos a notação I_n.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são exemplos de matrizes identidades de 2ª e 3ª ordem, respectivamente.

Atividades resolvidas

R10. Determine x e y para que a matriz A seja diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & x - 2y \\ y - 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolução

Os elementos não pertencentes à diagonal principal devem ser nulos.

Assim, $x - 2y = 0$ e $y - 1 = 0$

$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$

Substituindo $y = 1$ em $x - 2y = 0$, temos $x = 2$.

Atividades

22. Escreva os elementos da diagonal principal e os da diagonal secundária das matrizes quadradas:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

diagonal principal: 1, -1; diagonal secundária: 2, 3

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

diagonal principal: -1, 2, 2; diagonal secundária: 4, 2, 6

c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

diagonal principal: 1, 2, 7, 3; diagonal secundária: 1, -5, 6, -1

23. Quantos elementos tem uma matriz quadrada de ordem 5?

25

24. Quantos elementos nulos tem a matriz identidade de ordem 4?

12

25. Em uma matriz quadrada de ordem *n*, quantos elementos não pertencem à diagonal secundária?

$n^2 - n$

26. Escreva as matrizes:

a) I_3

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $O_{2 \times 3}$

$$O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

27. Determine *x* e *y* para que a matriz *A* seja diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3x - 2y \\ y + 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$x = -\dfrac{2}{3}$ e $y = -1$

Operações com matrizes

Para que seja possível aplicar o conceito de matrizes em diversas situações de resolução de problemas práticos, é necessário que sejam definidos os processos de operações com matrizes.

Transposição de uma matriz

Dada uma matriz A do tipo $m \times n$, chama-se transposta de A e indica-se por A^t a matriz que se obtém trocando-se ordenadamente as linhas pelas colunas de A. A operação de obtenção de uma matriz transposta de A é denominada transposição da matriz A. Observe o exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Note que A é do tipo 3×2 e A^t é do tipo 2×3 e que, na matriz transposta, a primeira linha corresponde à primeira coluna da matriz original, e a segunda linha corresponde à segunda coluna, também da matriz original.

Igualdade de matrizes

Duas matrizes, A e B, serão iguais se forem do mesmo tipo e se os elementos correspondentes forem iguais. Assim, se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são matrizes do tipo $m \times n$, então: $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij\,>}$

As matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 1-4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2+1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, por exemplo, são iguais, pois ambas são do tipo 2×2 e os elementos correspondentes são iguais.

Atividades resolvidas

R11. Verifique se as matrizes $A = (a_{ij})_{2\times 2}$, tal que $a_{ij} = i - j$, e $B = (b_{ij})_{2\times 2}$, tal que $b_{ij} = \dfrac{3(i-j)}{i+j}$, são iguais.

Resolução

Para verificarmos se $A = B$, vamos calcular os elementos das duas matrizes e, depois, compará-los.

Matriz $A = (a_{ij})_{2\times 2}$

$a_{11} = 1 - 1 \Rightarrow a_{11} = 0$

$a_{12} = 1 - 2 \Rightarrow a_{12} = -1$

$a_{21} = 2 - 1 \Rightarrow a_{21} = 1$

$a_{22} = 2 - 2 \Rightarrow a_{22} = 0$

Matriz $B = (b_{ij})_{2\times 2}$

$b_{11} = \dfrac{3(1-1)}{1+1} \Rightarrow b_{11} = 0$

$b_{12} = \dfrac{3(1-2)}{1+2} \Rightarrow b_{12} = -1$

$b_{21} = \dfrac{3(2-1)}{2+1} \Rightarrow b_{21} = 1$

$b_{22} = \dfrac{3(2-2)}{2+2} \Rightarrow b_{22} = 0$

Como os elementos correspondentes são iguais nas duas matrizes, podemos dizer que elas são iguais.

Professor

Destaque a transposição de matrizes e a igualdade entre matrizes como conceitos-chave. Explique que a transposição envolve a troca das linhas pelas colunas de uma matriz, resultando em uma matriz nova. Demonstre como esse processo é realizado e realce a propriedade de que a transposição de uma matriz transposta resulta na matriz original. Além disso, explique a igualdade entre matrizes, ressaltando que duas matrizes são iguais se possuem as mesmas dimensões e os mesmos elementos correspondentes em cada posição. Por meio de exemplos práticos, instrua os alunos a aplicar esses conceitos, incentivando-os a praticar a transposição e a testar a igualdade entre diversas matrizes. Essa abordagem permitirá que eles compreendam profundamente essas operações e suas implicações na manipulação e análise de matrizes em diversos contextos matemáticos e científicos.

R12. Chama-se matriz simétrica toda matriz quadrada que é igual à sua transposta. Determine x e y para que a matriz M seja simétrica.

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & x \\ 2y & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Resolução

Sendo $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & x \\ 2y & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, temos $M_t = \begin{bmatrix} 3 & 2y & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ x & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Comparando os elementos de M com os de M^t, temos:

$$M = M^t \Rightarrow \begin{cases} 2y = 1 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2} \\ x = 3 \end{cases}$$

Professor

Incentive os alunos a acompanharem o passo a passo das resoluções e a replicarem em seus cadernos, verificando se entenderam o algoritmo de resolução em cada caso. Para reforçar, eles podem resolver atividades semelhantes no caderno.

Atividades

28. Construa a matriz transposta de:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

b) $C = [-3 \quad 4 \quad 0 \quad 1]$

$C^t = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

29. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, encontre:

a) A^t

$A^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\left(A^t\right)^t$

$\left(A^t\right)^t = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

c) O que se pode dizer das matrizes A e de $\left(A^t\right)^t$?

São iguais

30. Escreva a matriz quadrada de ordem 2 para cada item:

a) A^t, com $A = (a_{ij}) \mid a_{ij} = i - j$

$A^t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

b) B^t, com $B = (b_{ij}) \mid b_{ij} = j - i$

$B^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

31. Escreva a matriz $(A^t)^t$, quadrada de ordem 3, em que $A = (a_{ij})$ é dada pela lei $a_{ij} = 3j - 4i$.

$$\left(A^t\right)^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ -5 & -2 & 1 \\ -9 & -6 & -3 \end{bmatrix}$$

32. Determine os valores de p e q, sabendo que a matriz A é simétrica.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & q \\ p & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

p = 0 e q = 2

Adição e subtração de matrizes

Dadas duas matrizes de mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, denomina-se **matriz soma** $(A + B)$ a matriz obtida adicionando-se os elementos correspondentes de A e B:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}, \text{ em que } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n.$$

– Propriedades da adição:

Sendo A, B, C e O (matriz nula) matrizes de mesmo tipo e p, $q \in$ R, valem as propriedades:

- comutativa: $A + B = B + A$
- associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$
- elemento neutro: $A + O = O + A = A$

Matriz oposta

Chama-se **matriz oposta** de A a matriz $-A$, cuja soma com A resulta na matriz nula.

Tomando-se como exemplo $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, a oposta de A será $-A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$,

pois: $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Professor

Reforce a ideia de que a adição e subtração ocorrem elemento por elemento, e a multiplicação requer uma abordagem específica que leva em consideração as linhas e colunas das matrizes. Por meio de exemplos práticos, encoraje os alunos a praticar e internalizar as técnicas de operações, enfatizando a relevância desses procedimentos em contextos matemáticos mais amplos, como resolução de sistemas de equações lineares e representação de transformações geométricas.

Subtração de matrizes

Dadas duas matrizes de mesmo tipo, $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, denomina-se matriz diferença $(A - B)$ a matriz obtida subtraindo-se os elementos correspondentes de A e B:

$A - B = (a_{ij} - b_{ij})_{m \times n}$, em que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Atividades resolvidas

R13. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, obtenha $A + B$.

Resolução

Para obter $A + B$, adicionamos os elementos de mesma posição:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 + 3 & 1 + (-2) & 3 + 1 \\ 0 + (-4) & 5 + 1 & -2 + 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B - A = \begin{bmatrix} 1 - 3 & 2 - 4 \\ -2 - 5 & 4 - (-3) \end{bmatrix} \Rightarrow B - A = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}$$

Note que $A - B \neq B - A$ e que $A - B$ e $B - A$ são matrizes opostas.

Multiplicação de número real por matriz

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e um número real k, denomina-se produto do real k por A a matriz obtida multiplicando-se cada um dos elementos de A por k.

$k \cdot A = (k \cdot a_{ij})_{m \times n}$, em que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$

Observe, como exemplo, a determinação da matriz $3A$ a partir de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$:

$$3A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 9 & 0 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

– Propriedades da multiplicação de número real por matriz:

Sendo A, B, C e O (matriz nula) matrizes de mesmo tipo, valem as propriedades:

- $1 \cdot A = A$
- $(-1) \cdot A = -A$
- $p \cdot O = O$
- $0 \cdot A = O$
- $p \cdot (A + B) = p \cdot A + p \cdot B$
- $(p + q) \cdot B = p \cdot B + q \cdot B$
- $p \cdot (q \cdot A) = (p \cdot q) \cdot A$

Atividades resolvidas

R14. Dadas as matrizes

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$,

determine a matriz X tal que $X + A = 2B - C$.

Resolução

$X + A = 2B - C \Rightarrow X = 2B - C - A$

Cálculo de $2B$:

$$2B = 2 \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $X = 2B - C - A$:

$$X = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$X = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$$

R15. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, tal que $a_{ij} = 2i - j$, e $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, tal que $b_{ij} = 3i + 2j$, escreva a lei de formação da matriz $C = A + B$.

Resolução

Se $C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Logo: $c_{ij} = 2i - j + 3i + 2j$

$c_{ij} = 5i + j$

Atividades

33. São dadas as seguintes matrizes:

$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$.

Encontre a matriz X em cada caso:

a) $X - A - B = C$

$X = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$

b) $X - 2A = 3B - 4C$

$X = \begin{bmatrix} 12 & 21 \\ 30 & 13 \end{bmatrix}$

c) $X + A = B - C$

$X = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$

34. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ **e** $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$.

a) Determine A^t e B^t.

$A^t = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$; $B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

b) Encontre $A^t + B^t$.

$A^t + B^t = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$

c) Encontre $(A + B)^t$

$(A + B)^t = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$

d) Compare $(A + B)^t$ e $A^t + B^t$.

$(A + B)^t = A^t + B^t$

35. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, **tal que** $a_{ij} = i - 2j$, **e** $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, **tal que** $b_{ij} = 2i + 3j$, **escreva a lei de formação das matrizes:**

a) $C = A + 2B$

$C = 5i + 4j$

b) $D = A - B$

$D = -i - 5j$

c) $E = 2A + 3B$

$E = 8i + 5j$

d) $F = 2(B - A)$

$F = 2i + 10j$

36. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, determine as matrizes X e Y:

a) $\begin{cases} X + Y = A \\ X - Y = B \end{cases}$

$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}; Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{cases} X + Y = A + 2B \\ X - 2Y = 2A + B \end{cases}$

$X = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{26}{3} \\ \frac{14}{3} & \frac{52}{3} \end{bmatrix}; Y = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$

Multiplicação de matrizes

Dadas as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{jk})$, de tipos $m \times n$ e $n \times p$, respectivamente, pode-se obter a matriz produto $C = A \cdot B$, do tipo $m \times p$. Para que o produto $A \cdot B$ seja possível, é necessário que o número de colunas de A seja igual ao número de linhas de B.

$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$

Professor
Comentário na página 62.

Considere, por exemplo, as matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

O produto $A \cdot B$ é possível, pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B, mas o produto $B \cdot A$ não é possível:

$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 1}$ $\quad$ $B_{3 \times 1} \cdot A_{2 \times 3}$

Cada elemento c_{ik} da matriz produto C é dado pela soma dos produtos de cada elemento da linha i de A pelo elemento correspondente da coluna k de B:

$C = A \cdot B = (c_{ik})_{m \times p}$

$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{in}b_{nk}$

No produto de matrizes, multiplicamos cada elemento de uma linha pelo elemento correspondente de uma coluna e, em seguida, somamos esses produtos.

Considere, por exemplo, as matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

É possível obter a matriz produto $C = A \cdot B$, pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. A matriz produto C será então do tipo 2×3:

$C = A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 10 \\ 0 & 12 & -5 \end{bmatrix}$

Professor

Na lousa, mostre as etapas a seguir para o cálculo dos elementos de C:

1ª linha × 1ª coluna

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 7 \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & & \\ & & \end{bmatrix}$$

1ª linha × 2ª coluna

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 4 \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 4 & \\ & & \end{bmatrix}$$

1ª linha × 3ª coluna

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 = 10 \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 4 & 10 \\ & & \end{bmatrix}$$

2ª linha × 1ª coluna

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 4 & 10 \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

2ª linha × 2ª coluna

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12 \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 4 & 10 \\ 0 & 12 & \end{bmatrix}$$

2ª linha × 3ª coluna

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow 1 \cdot 5 + 3 \cdot 0 = -5 \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 4 & 10 \\ 0 & 12 & -5 \end{bmatrix}$$

Atividades resolvidas

R16. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = A \cdot B$.

Resolução

O produto é possível, pois o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B. Como A e B são do tipo 2×2, C será do tipo 2×2. Vamos então calcular os elementos de C:

c_{11}: 1ª linha de $A \times$ 1ª coluna de B

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow C_{11} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \Rightarrow C_{11} = 2$

c_{12}: 1ª linha de $A \times$ 2ª coluna de B

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow C_{12} = 2 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \Rightarrow C_{12} = 8$

c_{21}: 2ª linha de $A \times$ 1ª coluna de B

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow C_{21} = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \Rightarrow C_{21} = 1$

c_{22}: 2ª linha de $A \times$ 2ª coluna de B

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow C_{22} = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \Rightarrow C_{22} = 7$

Logo, a matriz produto será $C = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$.

R17. Determine a matriz X tal que $X \cdot [1 \quad 2] = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Resolução

Inicialmente, determinamos o tipo da matriz X.

$$\underset{(m \times n)}{X} \cdot \underset{(1 \times 2)}{[1 \quad 2]} = \underset{(2 \times 2)}{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}}.$$

A matriz X deve ser do tipo 2×1 para satisfazer a igualdade. Atribuindo-se os valores a e b aos elementos de X, temos:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 2a \\ b & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Logo, $a = 2$ e $b = 3$. Portanto, $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Atividades

37. Sendo $A_{2 \times 2}$, $B_{2 \times 4}$ e $C_{4 \times 1}$, determine o tipo das matrizes produto, se existirem:

a) $A \cdot B$

2×4

b) $B \cdot C$

2×1

c) $B \cdot A$

Não existe a matriz produto.

d) $A \cdot A$

2×2

e) $C \cdot B$

Não existe a matriz produto.

f) $C \cdot C$

Não existe a matriz produto.

38. Efetue cada um dos produtos, se existirem:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$[24]$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Não existe a matriz produto.

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 8 & 7 & 8 \\ 11 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [2 \quad 1 \quad -2]$

$\begin{bmatrix} 10 & 5 & -10 \\ 12 & 6 & -12 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

39. São dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

a) Calcule $A \cdot B$.

$\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

b) Calcule $B \cdot A$.

$\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 20 & -5 \end{bmatrix}$

c) Compare $A \cdot B$ com $B \cdot A$.

$AB \neq BA$

40. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $A \cdot B$

$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 12 & 20 \end{bmatrix}$

b) A^2

$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

Nota: A^2 é o mesmo que $A \cdot A$.

c) B^2

$\begin{bmatrix} -1 & 15 \\ -6 & -10 \end{bmatrix}$

d) $A^2 - B^2$

$\begin{bmatrix} 9 & -13 \\ 14 & 14 \end{bmatrix}$

41. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = [7 \quad 3]$, determine a matriz X tal que $A^t \cdot X = B^t$.

$\begin{bmatrix} \frac{17}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$

Matriz inversa

Dada uma matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$, dizemos que A é invertível se existir uma matriz $B = (b_{ij})_{n \times n}$ tal que:

$A \cdot B = B \cdot A = I_n$

Nesse caso, dizemos que B é a matriz inversa de A e indicamos $B = A^{-1}$.

Vamos, como exemplo, determinar a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Para isso, consideramos $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e efetuamos $A^{-1} \cdot A = I_2$.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3a + 5b & a + 2b \\ 3c + 5d & c + 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a + 5b = 1 \\ a + 2b = 0 \times (-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 5b = 1 \\ -3a - 6b = 0 \end{cases} +$$

$$-b = 1 \Rightarrow b = -1 \text{ e } a = 2$$

$$\begin{cases} 3c + 5d = 0 \\ c + 2d = 1 \times (-3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3c + 5d = 0 \\ -3c - 6d = -3 \end{cases} +$$

$$-d = -3 \Rightarrow d = 3 \text{ e } c = -5$$

Logo, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$.

Atividades

42. Determine a matriz inversa de cada uma das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -5 & 8 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

43. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, determine a matriz X tal que $X + A^{-1} = A^t$.

$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

44. Calcule $(A + A^{-1})^2$, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} \frac{29}{2} & \frac{15}{2} \\ \frac{45}{4} & \frac{103}{4} \end{bmatrix}$

Determinantes

(EM13MAT315)

Dada uma matriz A, quadrada de ordem n, podemos associar a ela um número real, chamado determinante da matriz A, obtido a partir de operações realizadas com seus elementos.

Para se indicar o determinante de uma matriz A, utiliza-se a abreviatura det A ou duas barras em torno dos elementos da matriz.

Notação:

det A ou $|A|$

Seja, por exemplo, a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$.

Seu determinante será um número indicado por det $A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$.

O cálculo do determinante de uma matriz A pode ser feito por uma lei geral que estabelece as operações a serem realizadas com os elementos da matriz. Antes de estudarmos essa lei geral, vamos estabelecer regras práticas para determinantes de matrizes quadradas de ordens 1, 2 e 3.

Determinantes de matrizes de ordens 1, 2 e 3

Matriz 1×1

Dada a matriz $A = [a_{11}]$, o seu determinante é o próprio número a_{11}:

$\det A = |a_{11}| = a_{11}$

Assim, para uma matriz $A = [-3]$, temos: $\det A = -3$.

Matriz 2×2

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, o seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária. Esquematicamente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$a_{21}a_{21}$ $\qquad$ $a_{11}a_{22}$

$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

O determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, por exemplo, será:

$$\det A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 4 = 7$$

$2 \cdot 4$ $\qquad$ $3 \cdot 5$

Matriz 3×3

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, o seu determinante é igual a:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Professor

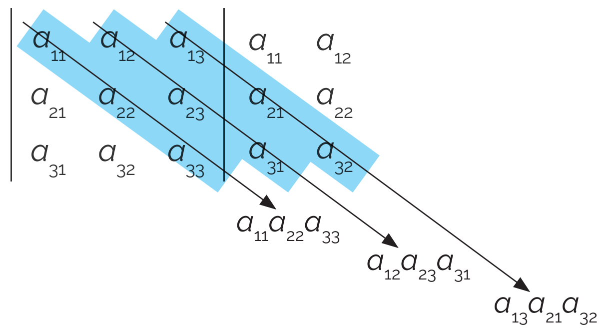
É relevante ressaltar que o cálculo de determinantes possui aplicações práticas abrangentes, tanto dentro da Matemática quanto em diversas outras áreas. Explique como a habilidade de calcular determinantes é valiosa na verificação do alinhamento de pontos em um plano, auxiliando na compreensão de configurações geométricas. Além disso, destaque a importância dos determinantes na resolução de sistemas lineares, um campo crucial na solução de problemas variados. Além do contexto matemático, ilustre como determinantes são utilizados em campos elétricos na Física, exemplificando como esses conceitos têm aplicabilidade direta em análises mais amplas. Ao mostrar as diversas áreas em que os determinantes são úteis, você inspira os alunos a reconhecer a relevância desses cálculos e a sua aplicabilidade em situações práticas do dia a dia e em campos científicos diversos.

Para obtermos essa soma, usamos uma regra prática denominada **regra de Sarrus.** Acompanhe as etapas que compõem essa regra:

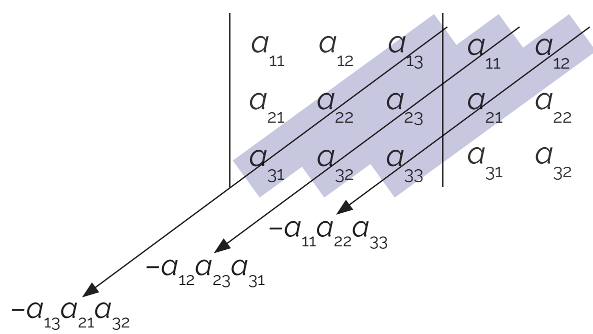
– Repetem-se, à direita da matriz, as duas primeiras colunas:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

– Efetuam-se os produtos dos elementos indicados, conservando-se os sinais:



– Efetuam-se os produtos dos elementos indicados, trocando-se os sinais:



– Somam-se os produtos obtidos:

det $A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

Atividades resolvidas

R18. Calcule o valor do determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução

O determinante da matriz A, quadrada de terceira ordem, é calculado pela regra de Sarrus:

$$\det A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{array}\right]\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} -2 & 0 & -24 & 4 & 0 & 3 \end{array}$$

$\det A = 4 + 0 + 3 - 2 - 0 - 24 \Rightarrow \det A = -19$

R19. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, vamos calcular $2 \cdot \det A$.

Resolução

$$\det A = \left[\begin{array}{ccc} -2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{cc} -2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 30 & -2 & -4 & -4 & -5 & -12 \end{array}$$

$\det A = -4 - 5 - 12 + 30 - 2 - 4$

$\det A = 3 \Rightarrow 2 \det A = 6$

R20. Determine x tal que $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8$.

Resolução

$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8 \Rightarrow x - 6 = 8$

Logo, $x = 14$.

Atividades

45. Calcule o determinante das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

14

b) $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$

-7

46. Determine *x* tal que:

a) $\begin{vmatrix} 2x & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 12$

x = 3

b) $\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$x = -\frac{1}{5}$

47. Calcule o determinante das matrizes:

a) $A = (a_{ij})_{2\times 2} \mid a_{ij} = i + 2j$

-2

b) $B = (b_{ij})_{2\times 2} \mid, b_{ij} = i^2 - j$

3

48. Calcule o determinante das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

-3

b) $D = (d_{ij})_{3\times 3} \mid d_{ij} = 3i - 2j$

0

49. Determine o valor de *x* para que:

a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

1

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1+x & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -3$

$-\frac{1}{5}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & x & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1$

7

50. Resolva as inequações em R:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & x \end{vmatrix} \geq \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

$S = \left\{x \in R \middle| x \geq \frac{19}{8}\right\}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & x & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \leq \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & x \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$

$S = \left\{x \in R \middle| x \geq \frac{3}{2}\right\}$

Determinante de matrizes de ordem *n*

O determinante de uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$, com $n \geq 2$, pode ser obtido a partir do conceito de **cofator** de um elemento da matriz A.

Cofator

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$, chama-se **cofator** do elemento a_{ij} o número $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$, em que D_{ij} é o determinante da matriz que se obtém de A eliminando-se a linha i e a coluna j.

Na matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, vamos determinar, por exemplo, o cofator do elemento a_{22}. Inicialmente, obtemos D_{22} eliminando a linha 2 e a coluna 2 da matriz A:

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{vmatrix} \\ \uparrow \\ \text{coluna 2} \end{array} \leftarrow \text{linha 2} \Rightarrow D_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 0 \end{vmatrix}$$

O cofator de a_{22} é o número $A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot D_{22}$.

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-28) \Rightarrow A_{22} = -28$$

A partir do conceito de cofator, podemos enunciar a lei geral para o cálculo do determinante de uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$, conhecida como teorema de Laplace.

Teorema de Laplace

Dada uma matriz A, quadrada de ordem $n \geq 2$, o valor de det A é o número real obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) por seus respectivos cofatores.

Assim, se considerarmos os elementos de uma linha i, podemos escrever:

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2}\ A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$$

Atividades resolvidas

R21. Calcule o determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Resolução

Vamos calcular o determinante de A a partir dos elementos da **primeira linha**:

$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$

$\det A = 0 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$\det A = 0 \cdot (6 - 1) - 1 \cdot (2 - 2) + 2 \cdot (1 - 6) = -10$

Atividades

51. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, calcule o cofator dos elementos:

a) a_{12}

3

b) a_{31}

1

c) a_{23}

5

d) a_{32}

-2

52. Calcule o determinante das matrizes:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

-4

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

4

53. Calcule o determinante das matrizes:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

-1

b) $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

6

Propriedades dos determinantes

Para uma matriz quadrada A de ordem n, podem ser demonstradas algumas propriedades que simplificam o cálculo de seu determinante.

- 1ª propriedade

Se A tem uma fila com todos os elementos nulos, seu determinante é nulo.

Tomemos, por exemplo, a matriz A a seguir. Utilizando o teorema de Laplace, podemos calcular seu determinante a partir dos elementos nulos da 2ª linha. Como todos os produtos desses elementos por seus cofatores serão nulos, teremos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 0$$

- 2ª propriedade

Se uma matriz A tem duas filas paralelas proporcionais, seu determinante é nulo.

Por exemplo, na matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -6 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 10 \end{bmatrix},$$

cada elemento da 3ª linha é o dobro do correspondente na 1ª linha. Sendo assim, dizemos que a 1ª e a 3ª linhas são proporcionais e o determinante será nulo.

Já para a matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

o determinante será nulo, pois a 1ª e a 3ª colunas são iguais.

• 3ª propriedade

Se trocarmos entre si a posição de duas filas paralelas de A, obtemos uma matriz A', tal que det $A' = -$det A.

Na matriz A a seguir, temos um exemplo no qual, ao trocarmos as posições da 1ª e 3ª linha, acarretamos a troca do sinal do determinante na nova matriz obtida. É importante salientar que a troca de sinal ocorrerá a cada troca de posição de uma linha ou coluna da matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 24$$

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A' = -24$$

• 4ª propriedade

Se multiplicarmos os elementos de uma fila de A por um número real k, obtemos uma matriz A', tal que det $A' = k$ det A.

Para $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, temos det $A = -27$.

Multiplicando a 1ª linha por 2, obtemos:

$$A' = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A' = 2 \det A = -54$$

Veja agora o que ocorre com o valor do determinante de A quando multiplicamos a matriz por 2, ao invés de multiplicarmos apenas a primeira linha. Vamos, portanto, calcular o determinante de $2A$:

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & -6 & 2 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(2A) = -216 = 8(-27)$$

Observe que det $(2A) = 2^3 \cdot$ det A, pois multiplicamos todas as filas por 2.

Professor

Para tornar o entendimento e aplicação de cada propriedade mais eficaz, sugere-se que os estudantes elaborem um formulário contendo uma descrição das propriedades e um exemplo numérico correspondente a cada uma. Essa abordagem permitirá que os alunos consolidem seu conhecimento de forma ativa, reforçando as propriedades por meio da explicação e ilustração de exemplos concretos. Além disso, o formulário criado se tornará uma ferramenta de referência prática, auxiliando-os a revisitar e consolidar o conteúdo de maneira autônoma sempre que necessário. Ao adotar essa estratégia, você incentivará a participação ativa dos alunos na construção de seu próprio material de estudo e aprimorará a retenção e aplicação das propriedades em questão.

De uma forma mais geral, podemos dizer que, para uma matriz A, quadrada de ordem n, temos:

$\det (k \cdot A) = k^n \cdot \det A$

• 5ª propriedade

O determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta.

$\det A = \det A^t$

Ao fazer a transposição da matriz A, por exemplo, obtemos o mesmo valor para det A:

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 43$$

$$A^t = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A^t = 43$$

• 6ª propriedade

O determinante do produto de duas matrizes quadradas de mesma ordem é igual ao produto dos determinantes dessas matrizes.

$\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Considere, por exemplo, as matrizes A e B a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 5$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det B = 2$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det (A \cdot B) = 10$$

Observe que $\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

• 7ª propriedade

Se somarmos a uma fila de A uma outra fila previamente multiplicada por um número real, obtemos uma matriz A', tal que $\det A' = \det A$.

Quando fazemos uma transformação dessa natureza numa matriz, dizemos que estamos fazendo uma **combinação linear**. Essa propriedade nos garante, portanto, que ao fazermos combinações lineares entre filas de uma matriz, o valor de seu determinante não se altera. Observe, como exemplo, a combinação linear que fazemos entre linhas da matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 15$$

Multiplicando a terceira linha por 2 e adicionando-a à primeira, obtemos A':

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A' = 15$$

Atividades

54. Calcule os determinantes das matrizes a seguir sem desenvolvê-los.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

0

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

0

55. É dada a matriz $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$. Sabendo-se que $\det A = 12$, calcule:

a) $\begin{vmatrix} z & t \\ x & y \end{vmatrix}$

-12

b) $\begin{vmatrix} x & z \\ y & t \end{vmatrix}$

12

Regra de Cramer

A solução de um sistema linear com n equações e n incógnitas pode ser obtida utilizando-se o cálculo com determinantes em uma regra prática denominada regra de Cramer. Considere o sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Para obtermos sua solução por meio da regra de Cramer, procedemos da seguinte forma:

Calculamos o determinante da matriz A, formada pelos coeficientes das variáveis do sistema:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Calculamos os determinantes das matrizes obtidas a partir de A, substituindo cada coluna dos coeficientes de x_i pela coluna dos termos independentes do sistema:

$$\det X_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det X_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det X_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

Se $\det A \neq 0$, o sistema é possível e determinado e sua solução será:

$$x_1 = \frac{\det X_1}{\det A} \quad x_2 = \frac{\det X_2}{\det A} \; \dots \; x_n = \frac{\det X_n}{\det A}$$

Note que só é possível usar a regra de Cramer em sistemas $n \times n$ em que $\det A \neq 0$. Caso ocorra que $\det A = 0$, a discussão da solução do sistema deve ser feita por escalonamento.

Atividades resolvidas

R22. Determine a para que o sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 5x + ay = 6 \end{cases}$ seja possível e determinado.

Resolução

Para que o sistema seja possível e determinado, é necessário que o determinante da matriz dos coeficientes seja diferente de zero.

$$\det A \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 3a - 10 \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{10}{3}$$

Atividades

56. Resolva os seguintes sistemas pela regra de Cramer:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ x - y = -1 \end{cases}$

S = {(5, 6)}

b) $\begin{cases} 5x - 3y = 13 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$

S = {(2, -1)}

57. Determine a para que o sistema $\begin{cases} -x + 5y = 15 \\ 3x + ay = 9 \end{cases}$ seja possível e determinado.

S = {a ∈ R | a ≠ -15}

Resumo

Equações lineares

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = k$, em que:

$x_1, x_2, ..., x_n$ são as incógnitas da equação;

$a_1, a_2, ..., a_n$ são números reais denominados coeficientes da equação;

k é um número real chamado de termo independente da equação.

Sistema de equações lineares

$$m \times n \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistema linear homogêneo:

$b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$

Classificação dos sistemas lineares

- Possíveis e determinados: possui uma única solução;
- Possíveis e indeterminados: possui infinitas soluções;
- Impossíveis: não existe solução.

Sistema escalonado

Sistema linear escalonado é todo sistema no qual as incógnitas das equações lineares estão escritas em uma mesma ordem e o 1º coeficiente não nulo de cada equação está à direita do 1º coeficiente não nulo da equação anterior.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & k_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & k_2 \\ & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{nn}x_n & = & k_n \end{cases}$$

Para se chegar à solução desse sistema, parte-se da última equação, que fornece diretamente o valor de x_n e, por substituição nas equações anteriores, obtém-se os valores de $x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2$ e x_1.

Escalonamento e resolução de um sistema linear

Podemos transformar qualquer sistema linear em um outro equivalente pelas seguintes transformações elementares, realizadas com suas equações:

- trocar as posições de duas equações do sistema;
- multiplicar uma equação do sistema por um número real não nulo;
- somar a uma equação do sistema uma outra multiplicada por um número real.

Matrizes

Matriz genérica $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Representação por lei de formação dos elementos

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ | lei de formação, com $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Tipos de matrizes

- Matriz linha

$A = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \ldots \quad a_{1n}]$

- Matriz coluna

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Professor

Encoraje os alunos a revisitarem o resumo sempre que precisarem, incentivando-os a anotar outros conceitos que considerem relevantes para um melhor entendimento. Além disso, sugira que utilizem o resumo como um auxílio durante a resolução da bateria final de atividades que virá a seguir. Isso permitirá que os estudantes apliquem de forma prática o conteúdo revisado e fortaleçam sua compreensão, ao mesmo tempo em que se tornam mais autônomos na gestão do próprio aprendizado. Dessa maneira, você estará proporcionando uma ferramenta valiosa que promove a retenção de conhecimento e a habilidade de aplicação em situações desafiadoras.

• Matriz quadrada

É toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas. Assim, chamamos matriz quadrada de ordem n toda matriz do tipo $n \times n$.

diagonal secundária $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ diagonal principal

• Matriz nula

É toda matriz do tipo $m \times n$ cujos elementos são nulos.

• Matriz diagonal

É toda matriz quadrada em que os elementos não pertencentes à diagonal principal são nulos.

• Matriz identidade

É toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1.

• Matriz transposta

Dada uma matriz A do tipo $m \times n$, chama-se transposta de A e indica-se por A^t a matriz que se obtém trocando-se ordenadamente as linhas pelas colunas de A.

Igualdade de matrizes

$A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são do tipo $m \times n \mid A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \begin{cases} \text{para todo } 1 \leq i \leq m \\ \text{para todo } 1 \leq j \leq n \end{cases}$

Adição e subtração de matrizes

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$

$A \pm B = (aij \pm bij)_{m \times n}$ $(1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n)$

Multiplicação de número real por matriz

$A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $k \in \mathbb{R}$

$k \cdot A = (k \cdot a_{ij})_{m \times n}$ $(1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n)$

Multiplicação de matrizes

Dadas $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{jk})$, de tipos $m \times n$ e $n \times p$, o produto $C = A \cdot B$ será do tipo $m \times p$ e cada elemento c_{ik} da matriz produto C é dado pela soma dos produtos de cada elemento da linha i de A pelo elemento correspondente da coluna k de B.

$C = A \cdot B$ $(c_{ik})_{m \times p}$ onde $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{in}b_{nk}$

Matriz inversa

Para $A = (a_{ij})_{n \times n}$, se existir $B = (b_{ij})_{n \times n}$ tal que $A \cdot B = B \cdot A = I_n \Rightarrow B$ é a inversa de A e será representada por A^{-1}.

Determinantes

$A = (a_{ij})_{n \times n} \Rightarrow$ existe o número real det A ou $|A|$ associado à matriz.

Determinantes de matrizes de ordens 1, 2 e 3

• matriz 1×1

det $A = |a_{11}| = a_{11}$

• matriz 2×2

det $A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$a_{21}a_{21}$ $\qquad$ $a_{11}a_{22}$

• matriz 3×3 (regra de Sarrus)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

Efetuam-se os produtos dos elementos indicados, conservando-se os sinais:

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

$a_{11}a_{22}a_{33}$

$a_{12}a_{23}a_{31}$

$a_{13}a_{21}a_{32}$

Efetuam-se os produtos dos elementos indicados, trocando-se os sinais:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$-a_{11}a_{22}a_{33}$

$-a_{12}a_{23}a_{31}$

$-a_{13}a_{21}a_{32}$

Somam-se os produtos obtidos:

$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

Teorema de Laplace

Para uma matriz A, quadrada de ordem $n \geq 2$:

$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$, em que $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}$ são os cofatores dos elementos da linha i.

Propriedades dos determinantes

• 1ª propriedade

Se A tem uma fila com todos os elementos nulos, seu determinante é nulo.

• 2ª propriedade

Se uma matriz A tem duas filas paralelas proporcionais, seu determinante é nulo.

• 3ª propriedade

Se trocarmos entre si a posição de duas filas paralelas de A, obtemos uma matriz A', tal que $\det A' = -\det A$.

• 4ª propriedade

Se multiplicarmos os elementos de uma fila de A por um número real k, obtemos uma matriz A', tal que $\det A' = k \det A$.

• 5ª propriedade

O determinante de uma matriz é igual ao determinante de sua transposta.

$\det A = \det A^t$

• 6ª propriedade

O determinante do produto de duas matrizes quadradas de mesma ordem é igual ao produto dos determinantes dessas matrizes.

$\det (A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

• 7ª propriedade

Se somarmos a uma fila de A uma outra fila previamente multiplicada por um número real, obtemos uma matriz A', tal que det A' = det A.

Regra de Cramer

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det X_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det X_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det X_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

$$\det A \neq 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\det X_1}{\det A}$$

$$x^2 = \frac{\det X_2}{\det A} \quad \dots \quad x_n = \frac{\det X_n}{\det A}$$

Avalie o que aprvendeu

(EM13MAT302)

1. Calcule o valor de p para que o sistema dado admita outras soluções além da trivial.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -x + (p+2)y = 0 \end{cases}$$

a) $p = 2$

b) $p = 1$

c) $p = 0$

d) $p = -1$

e) $p = -\frac{1}{2}$

(EM13MAT302)

2. Determine o valor de k para que o sistema admita uma única solução.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y - kz = -3 \end{cases}$$

a) $k = -1$

b) $k = 0$

c) $k \neq 0$

d) $k \neq -1$

e) $k \neq -2$

(EM13MAT315)

3. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{2\times3}$, com $a_{ij} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{8}i\right)$, e $B = (b_{ij})_{2\times3}$, com $b_{ij} = \cos\left(\frac{\pi}{4}j\right)$, calcule $a_{21} - b_{13}$.

a) 2

b) $\sqrt{2}$

c) 5

d) $\sqrt{5}$

(EM13MAT315)

4. Calcule x, y, z e t, sabendo que

$$\begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & y \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ z & t \end{pmatrix}.$$

a) $x = 8$; $y = -3$; $z = -1$; $t = 1$

b) $x = 4$; $y = -5$; $z = 0$; $t = 12$

c) $x = y = z = t = 0$

d) $x = y = z = t = -2$

e) $x = y = z = t = 2$

(EM13MAT315)

5. Multiplicando $\begin{pmatrix} a & -3 \\ -4 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, obtemos $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -10 & -12 \end{pmatrix}$. Calcule $a + b$.

a) 0

b) 2

c) 4

d) 6

e) 8

(EM13MAT315)

6. Encontre a matriz X tal que $X + B = A^2$, sendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) $X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

b) $X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

c) $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

d) $X = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(EM13MAT315)

7. Sabendo que $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, determine x e y para que $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

a) $x = 0$; $y = 1$

b) $x = 0$; $y = -1$

c) $x = 1$; $y = 1$

d) $x = -1$; $y = 0$

e) $x = 0$; $y = 0$

(EM13MAT315)

8. Sendo dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, tais que $A \cdot B^t = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, obtenha a e b.

a) $b = a = 2$

b) $b = a = -5$

c) $b = -5$; $a = 2$

d) $b = 2$; $a = -5$

e) $b = 0$; $a = 1$

(EM13MAT315)

9. São dadas as matrizes

$A = I_4$, $B = (2x - 5 \quad y + 2 \quad 3z + 4 \quad t - 2)$ e $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcule o valor de x, y, z e t de modo que se tenha $B \cdot A = C^t$.

a) $x = 0$; $y = \frac{1}{2}$; $z = \frac{4}{3}$; $t = 5$

b) $x = 4$; $y = 0$; $z = -\frac{4}{3}$; $t = 3$

c) $x = y = z = t = 0$

d) $x = -\frac{3}{2}$; $y = \frac{1}{2}$; $z = \frac{1}{3}$; $t = 7$

(EM13MAT315)

Professor

Uma possibilidade de aplicação dessa bateria final de atividades é como avaliação somativa, que, ao critério do professor, poderá ser feita de maneira individual, em duplas ou pequenos grupos.

10. Dados $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, determine a matriz $X = (A^{-1} \cdot B)^{t}$.

a) $X = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

b) $X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

c) $X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

d) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

e) $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(EM13MAT315)

11. Qual deve ser o valor de x para que se tenha $\begin{vmatrix} x-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} = 0$?

a) $x = 0$ ou $x = -2$

b) $x = 4$ ou $x = -1$

c) $x = 0$

d) $x = 1$ ou $x = -3$

e) $x = 2$ ou $x = -2$

(EM13MAT302)

12. O valor de um determinante é 52. Se multiplicarmos a 2ª linha por 2, qual será o valor do novo determinante?

a) 104

b) 88

c) 76

d) 44

e) 12

(EM13MAT315)

13. (EEAR-SP) O sistema $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \\ x + 4y = -6 \\ 2x - 3y = m \end{cases}$, nas incógnitas x e y, admite uma única solução se, e somente se:

a) $m \neq -1$

b) $m = 0$

c) $m = -1$

d) $m = 2$

(EM13MAT315)

14. (EPCAR-MG) Considere o sistema nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

Os valores de a de modo que o sistema tenha uma solução ou para que não tenha solução são, respectivamente:

a) $a \neq 2$; $a \neq -3$

b) $a = 2$; $a = -3$

c) $a = -3$; $a = 2$

d) $a \neq 3$; $a = 2$

(EM13MAT315)

15. (AFA-SP) A condição que deve ser satisfeita pelos termos independentes a, b e c (a, b e $c \in$ R) para que seja compatível o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = a \\ y + 2z = b \\ x + 3y + z = c \end{cases}$ é estabelecida por:

a) $c - a + b = 0$

b) $a + b + c = 0$

c) $c + a - b = 0$

d) $a + b - c = 0$

(EM13MAT315)

16. (AFC-DF) De forma generalizada, qualquer elemento de uma matriz M pode ser representado por m_{ij}, em que i representa a linha e j a coluna em que esse elemento se localiza. Uma matriz $S = s_{ij}$, de terceira ordem, é a matriz resultante da soma entre as matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, ou seja, $S = A + B$. Sabendo-se que $(a_{ij}) = i^2 + j^2$ e que $b_{ij} = (i + j)^2$, então a soma dos elementos da primeira linha da matriz S é igual a:

a) 17

b) 29

c) 34

d) 46

e) 58

(EM13MAT315)

17. (FGV-SP) A, B e C são matrizes quadradas de ordem 3, e I é a matriz identidade de mesma ordem. Assinale a alternativa correta:

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

b) $B \cdot C = C \cdot B$

c) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$

d) $C \cdot I = C$

e) $I \cdot A = I$

(EM13MAT315)

18. (UPM-SP) Considerando o produto de matrizes:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

o valor de a é:

a) 0

b) −1

c) 2

d) −2

e) 1

(EM13MAT315)

19. (UEL-PR) Uma nutricionista recomendou aos atletas de um time de futebol a ingestão de uma quantidade mínima de certos alimentos (frutas, leite e cereais) necessária para uma alimentação sadia. A matriz *D* fornece a quantidade diária mínima (em gramas) daqueles alimentos. A matriz *M* fornece a quantidade (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida por cada grama ingerida dos alimentos citados.

$$D = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 600 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{fruta} \\ \text{leite} \\ \text{cereais} \end{array} \end{array}$$

$$M = \begin{array}{cl} \begin{array}{ccc} \text{fruta} & \text{leite} & \text{cereais} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0{,}006 & 0{,}033 & 0{,}108 \\ 0{,}001 & 0{,}035 & 0{,}018 \\ 0{,}084 & 0{,}052 & 0{,}631 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{proteinás} \\ \text{gorduras} \\ \text{carboidratos} \end{array} \end{array}$$

A matriz que mostra a quantidade diária mínima (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão daqueles alimentos é:

a) $\begin{bmatrix} 18{,}20 \\ 36{,}30 \\ 454{,}20 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 29{,}70 \\ 16{,}20 \\ 460{,}20 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 48{,}30 \\ 36{,}00 \\ 432{,}40 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 51{,}90 \\ 48{,}30 \\ 405{,}60 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 75{,}90 \\ 21{,}50 \\ 411{,}00 \end{bmatrix}$

(EM13MAT315)

20. (Fuvest-SP) Uma matriz real *A* é ortogonal se $A \cdot A^t = I$, em que *I* indica a matriz identidade e A^t indica a transposta de *A*. Se $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & x \\ y & z \end{bmatrix}$ é ortogonal, então $x^2 + y^2$ é igual a:

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{3}{2}$

Adobestock

Estudar o número de combinações em jogos é prática de muitos matemáticos.

Capítulo 3

Contagem e probabilidade

Neste capítulo, vamos estudar as técnicas de contagem que permitem calcular o número de elementos de conjuntos formados de acordo com certas regras, sem que seja necessário enumerar seus elementos.

Encontramos essas situações, por exemplo, quando precisamos calcular a quantidade de placas de automóveis, números telefônicos, grupos de pessoas, cartões de loteria, ocorrência de uma investigação científica, incidência de um sinistro, etc. Finalmente, calcularemos a chance de determinada situação ocorrer.

Professor

Neste capítulo, os alunos terão a oportunidade de enfrentar problemas relacionados à contagem e calcular probabilidades, explorando situações que se assemelham ao seu cotidiano. Isso visa dar ao conteúdo um caráter mais relevante e pessoal, facilitando sua compreensão e fomentando o desenvolvimento das habilidades necessárias. O conteúdo apresentado oferece uma variedade de abordagens práticas em sala de aula, permitindo que você, com recursos simples, demonstre aos estudantes os resultados de experimentos aleatórios básicos, como lançamento de moedas, dados ou seleção de bolinhas, conforme os conceitos forem introduzidos. É importante recordar que os alunos já têm algum embasamento nesse tópico do Ensino Fundamental, o que permite que você recupere esses conceitos prévios para auxiliar no crescimento das habilidades estimuladas neste capítulo.

Princípio fundamental da contagem

(EM13MAT310)

O princípio fundamental da contagem, ou princípio multiplicativo, estabelece o número de maneiras distintas de ocorrência de um evento composto de duas ou mais etapas. Pode ser enunciado da seguinte forma:

Se uma decisão E_1 pode ser tomada de n_1 modos e, tomada a decisão E_1, a decisão E_2 pode ser tomada de n_2 modos, então o número de maneiras de se tomarem as decisões E_1 e E_2 é $n_1 \cdot n_2$.

E_1	e E_2	$\longrightarrow E$
n_1 modos	n_2 modos	$n_1 \cdot n_2$ modos

Professor

Inicie a abordagem verificando o que os estudantes se lembram do princípio multiplicativo a partir do que viram no Ensino Fundamental, sendo esse um passo importante para desenvolvimento do conteúdo, pois pode fornecer subsídios de como conduzir o trabalho com o tópico

Atividades resolvidas

R1. Uma lanchonete serve 3 tipos de sanduíches e 4 tipos de refrigerantes. Calcule o número de modos distintos de uma pessoa fazer um lanche constituído de um sanduíche e um refrigerante.

Resolução

E_1	e E_2	$\longrightarrow E$
3 tipos	4 tipos	12 modos

E_1: escolher um sanduíche

E_2: escolher um refrigerante

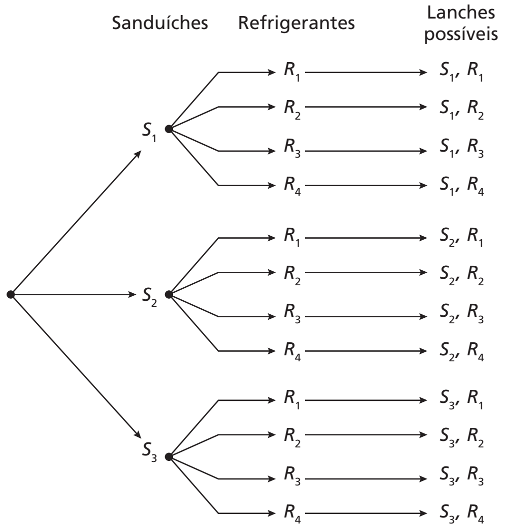
E: escolher um lanche

Para formar um lanche, a cada sanduíche podemos escolher um dos 4 tipos de refrigerantes; como são 3 tipos de sanduíches, podemos compor 3 × 4 lanches.

Professor

Dentro da metodologia deste material, as atividades resolvidas desempenham um papel fundamental como ferramentas auxiliares no processo de ensino e aprendizagem. Sugerimos que o professor estimule os alunos a acompanharem atentamente o detalhado passo a passo de cada resolução, e, se possível, os encoraje a replicar as resoluções em seus próprios cadernos. Além disso, eles podem explorar a criação de pequenas variações das atividades já solucionadas, o que proporcionará um maior engajamento e compreensão dos conceitos abordados. Isso permitirá que os alunos apliquem os princípios aprendidos de forma prática e reforcem sua compreensão dos conceitos estudados.

Se S_1, S_2 e S_3 são os tipos de sanduíches e R_1, R_2, R_3 e R_4 são os tipos de refrigerantes, então o "par" (S_1, R_1) representa um lanche formado pelo sanduíche S_1 e pelo refrigerante R_1.



Assim, os 12 lanches possíveis são (S_1, R_1), (S_1, R_2), (S_1, R_3), (S_1, R_4), (S_2, R_1), (S_2, R_2), (S_2, R_3), (S_2, R_4), (S_3, R_1), (S_3, R_2), (S_3, R_3) e (S_3, R_4).

– Se $A = \{S_1, S_2, S_3\}$ e $B = \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$, então o conjunto de todos os pares (S_i, R_j), onde $i = 1, 2, 3$ e $j = 1, 2, 3, 4$, que tem 12 elementos, é chamado de "produto cartesiano de A por B":

$A \times B = \{(S_1, R_1), (S_1, R_2), (S_1, R_3), (S_1, R_4), (S_2, R_1), (S_2, R_2), (S_2, R_3), (S_2, R_4), (S_3, R_1), (S_3, R_2), (S_3, R_3), (S_3, R_4)\}$

R2. Dados os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, determine quantos números naturais podemos formar:

a) com 3 algarismos;

b) com 3 algarismos distintos.

Resolução

a) Temos 6 possibilidades para cada um dos 3 algarismos:

$$\begin{array}{ccc} \text{centenas} & \text{dezenas} & \text{unidades} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6 & 6 & 6 \end{array} \rightarrow 6 \times 6 \times 6 = 216$$

Assim, podemos formar 216 números.

b) Como os algarismos devem ser distintos, isto é, não pode haver repetição, cada algarismo utilizado é excluído da etapa seguinte:

$$\begin{array}{ccc} \text{centenas} & \text{dezenas} & \text{unidades} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6 & 5 & 4 \end{array} \rightarrow 6 \times 5 \times 4 = 120$$

Assim, podemos formar 120 números.

R3. Quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem?

Resolução

O primeiro algarismo pode ser escolhido de 9 modos (não podemos usar o 0 na casa da centena); o segundo algarismo, de 9 modos (não podemos usar o algarismo utilizado anteriormente); e o terceiro, de 8 modos (não podemos usar os dois algarismos já empregados).

1º	2º	3º
algarismo	algarismo	algarismo
↓	↓	↓
9	9	8

Assim, temos $9 \times 9 \times 8 = 648$ números naturais de 3 algarismos distintos.

Professor

As atividades compõem um importante momento de assimilação dos conteúdos e desenvolvimento das habilidades nos estudantes. A seu critério, incentive os estudantes a resolverem as atividades de forma individual ou em pequenos grupos focais nos quais eles possam se ajudar.

Atividades

1. Uma moça possui 5 blusas diferentes e 4 saias diferentes. De quantos modos distintos ela pode se vestir?

Professor

Para completar as atividades resolvidas, antes de iniciar as seguintes, lance o seguinte desafio aos estudantes e depois resolva com eles na lousa: quantos números naturais pares de 3 algarismos podem ser formados com os dígitos 1, 3, 4, 5, 6 e 7? Na resolução, explique que podemos começar pela escolha do terceiro algarismo, porque esse é o mais problemático. Ele pode ser escolhido de 2 modos (termina em 4 ou 6). Posteriormente, vamos analisar os dois primeiros algarismos; o primeiro algarismo pode ser escolhido de 6 modos, e o segundo também, já que pode haver repetição. Assim:

1º	2º	3º
algarismo	algarismo	algarismo
↓	↓	↓
6	6	2

Portanto, nesse contexto, temos: $6 \times 6 \times 2 = 72$ números.

20 formas diferentes

2. Existem 2 estradas que ligam as cidades *A* e *B* e 3 estradas que ligam *B* e *C*. De quantas formas distintas é possível ir de *A* até *C* passando por *B*?

6 formas distintas

3. Uma determinada viagem pode ser feita de carro, ônibus ou avião. De quantos modos pode-se escolher o meio de transporte se não for usado na volta o mesmo meio de transporte usado na ida?

6 modos

4. Em uma prova classificatória para as olimpíadas, 10 atletas disputam os 800 metros. Sabe-se que apenas os 4 primeiros serão classificados para as finais. Quantos resultados possíveis existem para os 4 primeiros lugares?

5.040 resultados possíveis

5. Quantos são os gabaritos possíveis para uma prova de 10 testes, com 5 alternativas por questão?

5^{10} gabaritos possíveis

6. Dispondo de 6 cores, de quantas formas distintas podemos pintar uma bandeira com 3 listras verticais de cores diferentes?

120 formas distintas

7. Uma comissão de uma câmara de vereadores será composta por 1 presidente, 1 secretário e 1 relator. Considerando que essa câmara possui 18 vereadores, de quantos modos pode ser formada essa comissão?

4.896 modos

8. Quantos números de telefone com 8 algarismos podemos formar? (Utilize os 10 algarismos do sistema decimal.)

$9 \cdot 10^7$ números de telefone

9. Quantos números de telefone com 8 algarismos e prefixo 3.241 podem ser formados? (Utilize os 10 algarismos do sistema decimal.)

10^4 números de telefone

10. Com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9:

a) quantos números naturais de 4 algarismos podem ser formados?

6.561 números

b) quantos números naturais pares de 3 algarismos distintos podem ser escritos?

224 números

11. Calcule quantas placas de carro podemos formar, dispondo de 26 letras e 10 algarismos, considerando:

a) 3 letras e 4 algarismos;

175.760.000 placas

b) 3 letras distintas e 4 algarismos distintos.

78.624.000 placas

12. Um cofre de segurança possui um disco com as 26 letras do alfabeto e dois outros numerados de 1 a 9. O segredo do cofre consiste em 4 letras distintas, em uma determinada ordem, e 2 números distintos, também em ordem. Considerando que as letras devem sempre anteceder os números, quantos segredos diferentes pode ter o cofre?

25.833.600 segredos

13. Quantos números naturais de 4 algarismos distintos existem?

4.536 números

14. Quantos números naturais pares de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos de 0 a 9?

328 números

15. Quantos números naturais ímpares de 3 algarismos distintos podemos formar com os algarismos de 0 a 9?

360 números

16. Quantos são os inteiros positivos de 4 algarismos distintos nos quais o algarismo 5 sempre figura?

1.848 números

17. Quantos números naturais de 5 algarismos, distintos e maiores de 53.000, existem?

12.432 números

18. Quantos números compreendidos entre 2.000 e 7.000 podemos escrever com os algarismos ímpares sem os repetir?

48 números

19. Quantos números de 3 algarismos são maiores que 320 e:

a) possuem todos os algarismos distintos?

392 números

b) não possuem os algarismos 2, 5 e 7?

294 números

c) possuem todos os algarismos distintos e não possuem os algarismos 2, 5 e 7?

180 números

Fatorial

Para tornar mais prática a representação e a execução dos cálculos relativos aos problemas de contagem, vamos introduzir um novo conceito: o produto $n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ é chamado n fatorial, ou fatorial de n, e representado por $n!$. Então:

$n! = n\,(n-1)\,(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1,\ (n \in \mathbb{N})$

Leitura de "*n!*": n fatorial

Convenciona-se que $0! = 1$ e $1! = 1$

Atividades resolvidas

R4. Calcule os fatoriais:

a) $5!$

b) $4!$

c) $\dfrac{7!}{5!}$

d) $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)}$

Resolução

a) $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

b) $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

c) $\dfrac{7!}{5!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$

d) $\dfrac{(n-1)!}{(n+1)} = \dfrac{(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!} = \dfrac{1}{(n+1)n} = \dfrac{1}{n^2+n}$

R5. Simplifique a expressão: $\dfrac{4!+5!}{3!}$.

Resolução

Para simplificar, decompomos 4! e 5! em função do menor dos fatoriais, que é o 3!

$$\frac{4!+5!}{3!}=\frac{4\cdot 3!+5\cdot 4\cdot 3!}{3!}=\frac{3!(4+5\cdot 4)}{3!}=24$$

Professor

Como atividade extra, proponha como desafio aos alunos resolverem a equação $\dfrac{x!}{(x-2)!}=30,\ x\in \mathbb{N} \mid x\geq 2$. Depois de um tempo, resolva com eles na lousa, explicando que devemos simplificar os fatoriais para resolver a equação. Assim:

$$\frac{x!}{(x-2)!}=30\rightarrow\frac{(x-1)\cdot(x-2)!}{(x-2)!}=30$$

Cancelando $(x-2)!$, temos: $x(x-1)=30\rightarrow$
$\rightarrow x^2-x-30=0$.

Dessa forma, explique que é uma equação do segundo grau, cujo Δ é 121. Assim:

$$x=\frac{1\pm 11}{2}\rightarrow$$
$$\rightarrow\begin{cases}x_1=6\\ x_2=-5 \text{ (não serve, pois } -5\notin \mathbb{N})\end{cases}$$

Portanto, mostre que a solução final é $S=\{6\}$.

Atividades

20. Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{10!}{8!}$

90

b) $\dfrac{26!}{23!}$

15.600

c) $\dfrac{10!}{12!}$

$\dfrac{1}{132}$

d) $\dfrac{8!}{2!6!}$

28

21. Verifique em seu caderno a alternativa correta:

a) $10! = 8! + 2!$

b) $10! = 2! \cdot 5!$

c) $10! = 12! - 2!$

d) $10! = 10 \cdot 9 \cdot 8!$

22. Efetue: $\dfrac{50!+51!}{49!}$

2.600

23. Simplifique as expressões:

a) $\dfrac{n!}{(n-1)!}$

n

b) $\dfrac{(n-2)!}{(n-3)!}$

$n - 2$

25. Resolva as equações:

a) $\dfrac{(x+1)!}{(x-1)!}=7{,}2,\ x\in \mathbb{N} \mid x\geq 1$

$S=\{8\}$

b) $\dfrac{x!}{(x-2)!}=5,\ x\in \mathbb{N} \mid x\geq 2$

$S=\varnothing$

Permutação simples

(EM13MAT310)

Dados n objetos a_1, a_2, a_3, ..., na, podemos formar com todos eles, sem repetição, agrupamentos de n elementos que diferem entre si apenas pela ordem dos elementos em cada agrupamento. O 1º elemento pode ser escolhido de n modos, isto é, pode ser qualquer um dos n objetos; o 2º elemento pode ser qualquer um dos $n - 1$ elementos que não foram usados no 1º lugar, e assim por diante. Temos então: n possibilidades para o 1º, $n - 1$ para o 2º, $n - 2$ para o 3º, ..., até uma única possibilidade para o último elemento. Pelo princípio multiplicativo, o número total de agrupamentos (ou ordenações) dos n elementos será igual a:

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Cada um desses agrupamentos é chamado de **permutação** dos n objetos dados. Concluímos, portanto, que o número de permutações de n objetos (elementos) é igual a $n!$.

$P_n = n\,(n-1)\,(n-2)\,...\,1 = n!$

$P_n = n!$

$(n \in \mathbb{N})$

Leitura de P_n: permutação de n elementos

Dada uma palavra (como CASTILHO), cada permutação de suas letras recebe o nome de anagrama. Observe que um anagrama é uma palavra que pode não ser dicionarizada.

Professor

Caso julgue pertinente, monte ou peça aos alunos para começarem a montar um diagrama de árvore com as possibilidades dos anagramas da palavra CASTILHO, exemplificada anteriormente, que também será resolvida na atividade a seguir.

Atividades resolvidas

R6. Obtenha os anagramas da palavra CASTILHO.

Resolução

Fazer um anagrama de uma palavra é formar outra pela transposição das letras da primeira, ou seja, permutar as letras para obter-se outra.

Assim, permutando suas 8 letras, temos:

$P_8 = 8! = 40\,320.$

R7. Considere a palavra PERNAMBUCO. Quantos anagramas:

a) podemos formar?

b) começam com a letra P?

c) começam com PER?

d) possuem a sílaba PER?

Resolução

a)

$$\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}$$

Com 10 letras distintas, que trocam de posição entre si, temos:

$P_{10} = 10!$ anagramas.

b)

$$\boxed{P}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{\text{9 letras}}$$

$P_9 = 9!$ anagramas.

c)

$$\boxed{P}\boxed{E}\boxed{R}\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{\text{7 letras}}$$

$P_7 = 7!$ anagramas.

d)

$$\underbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{P\ \ E\ \ R}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}\boxed{}}_{8}$$

Considerando a sílaba PER como se fosse uma única letra, temos:

$P_8 = 8!$

R8. Dispostos em ordem crescente todos os números de 4 algarismos, obtidos com 1, 3, 5 e 7 (sem repetir), que posição ocupa o número 5.731?

Resolução

Para resolver esse tipo de exercício, estudamos as possibilidades de cada algarismo em cada casa, separadamente. Dessa forma, temos um controle maior até encontrar a posição de 5.731.

1				$\longrightarrow P_3 = 3! = 6$
3				$\longrightarrow P_3 = 3! = 6$
5	1			$\longrightarrow P_2 = 2! = 2$
5	3			$\longrightarrow P_2 = 2! = 2$
5	7	1	3	$\longrightarrow P_1 = 1! = 1$

Temos 6 + 6 + 2 + 2 + 1= 17 números menores; portanto, o número 5.731 ocupa o 18º lugar.

Atividades

26. Determine quantos anagramas possuem as palavras:

a) ESCOLA

720 anagramas

b) RIMA

24 anagramas

c) PEDAL

120 anagramas

27. Qual é o número de anagramas da palavra FUTEBOL que:

a) terminam com BOL?

24 anagramas

b) possuem a sílaba TE?

720 anagramas

c) possuem, juntas, as letras F, U e T?

720 anagramas

28. Quantos anagramas da palavra VESTIBULAR:

a) têm, juntas, todas as vogais?

120.960 anagramas

b) têm, juntas, as letras V, E, S, e T, nessa ordem?

5.040 anagramas

29. Quantos anagramas da palavra BIGODE têm as consoantes e as vogais dispostas alternadamente?

72 anagramas

30. Qual a soma dos números que se pode formar com as permutações dos algarismos 1, 2, 3 e 4?

A soma é 66.660

31. Forme números obtidos pela permutação dos algarismos 2, 3, 4, 8 e 9 e disponha-os em ordem crescente. Que lugar ocupa o número 43.892?

58º lugar

32. Em uma estante estão dispostos 8 livros distintos, sendo 3 de Matemática, 2 de Física e 3 de Química. Determine de quantas formas distintas podemos dispor os livros, de tal maneira que fiquem sempre juntos:

a) os de matemática;

4.320 formas

b) os de uma mesma matéria.

432 formas

Professor

Destaque que o entendimento das permutações com elementos repetidos possui relevância direta em várias áreas, inclusive na análise de cenários da vida real. Por exemplo, ao planejar eventos ou reuniões, é necessário considerar as diferentes maneiras de organizar convidados ou elementos repetidos, como decorações. Além disso, em projetos de design, explorar as permutações com elementos repetidos auxilia na criação de padrões esteticamente agradáveis. Nos domínios da computação e da criptografia, a compreensão dessas permutações é crucial para criar sequências de caracteres únicas, como senhas e códigos de segurança. Portanto, destacar as aplicações práticas das permutações com elementos repetidos não apenas ajuda os alunos a apreciar a relevância do conteúdo, mas também a reconhecer como esse conhecimento permeia diversas facetas do cotidiano e do desenvolvimento tecnológico.

Permutação com elementos repetidos

De modo geral, o número de permutações de n objetos, dos quais n_1 são iguais a A, n_2 são iguais a B, n_3 são iguais a C, etc. é dado por:

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! \ldots n_k!}$$

($n \in \mathbb{N}$ e $n_1, n_2, n_3 \ldots n_k \in \mathbb{N}^*$)

Atividades resolvidas

R9. Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra NATA?

Resolução

Se todas as letras fossem distintas, teríamos 4! permutações. Como temos uma letra repetida, esse número será menor, visto que uma permutação entre letras repetidas não produz nova palavra. Vamos colocar índices nas letras repetidas para visualizar o que acontece. Assim, NA_1TA_2, NA_2TA_1, que seriam diferentes se $A_1 \neq A_2$, são, na verdade, iguais quando retiramos os índices, ou seja, o resultado deve ser dividido por 2, pois duas palavras são contadas apenas uma vez.

Então o número de palavras distintas que podem ser formadas por permutação das letras de NATA é igual a $\frac{4!}{2} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 12$.

R10. Quantos anagramas podem ser formados com as letras da palavra BALADA?

Resolução

Nesse caso, temos 3 letras A que, se fossem letras distintas, teríamos 6! permutações, mas todas as permutações de $A_1A_2A_3$, que são em número de $3! = 6$, produzem a mesma palavra.

Temos então $\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ palavras.

R11. Quantos números de 7 algarismos podem ser formados usando os algarismos 2, 2, 2, 3, 3, 4 e 5?

Resolução

Se todos os algarismos fossem distintos, teríamos $P_7 = 7!$ números.

Porém, como temos três 2 e dois 3, teremos um número menor representado por

$P_7^{(3,\,2)} = \frac{7!}{3! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1}$ números $= 420$ números.

Atividades

33. A partir da palavra CARAGUATATUBA, determine quantos anagramas:

a) podemos formar.

12.972.960 anagramas

b) começam por vogal.

6.985.440 anagramas

34. De quantos modos podemos separar 10 alunos de uma classe em dois grupos: um de 6 alunos e o outro de 4?

210 modos

35. De quantos modos podemos embalar 15 sabonetes em 4 caixas, sabendo que na primeira cabem 3 sabonetes, na segunda, 4, na terceira, 6 e na quarta, 2?

6.306.300 modos

36. Bruno mora 3 quarteirões ao norte e 5 quarteirões a leste de sua escola. Quantos caminhos possíveis, percorrendo sempre a menor distância, Bruno pode fazer para ir de sua casa à escola?

56 caminhos

37. Quantos números de sete algarismos podem ser formados usando os algarismos 2, 2, 2, 3, 3, 4 e 5?

420 números

Professor

Nesta atividade, o aluno terá oportunidade de fazer uma contextualização interdisciplinar com Ciências da Natureza sobre o tema de DNA, verificando como a matemática é importante na linguagem das ciências.

Práticas interdisciplinares

Combinações e recombinações no DNA (EM13MAT310) (EM13CNT304)

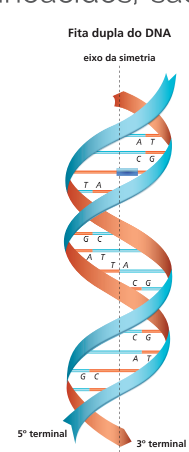
O modelo do DNA, proposto na década de 1950, parece uma hélice dupla, contendo em cada "corrimão" uma sequência de bases nitrogenadas, denominadas adenina (A), timina (T), citosina (C) e guanina (G).

As duas hélices ligam-se uma à outra por "degraus" formados por pares específicos dessas bases. Assim, a adenina liga-se sempre à timina (A – T ou T – A) e a citosina, à guanina (C – G ou G – C).

Quando a dupla hélice do DNA se abre para a produção de uma molécula de RNA, responsável pela síntese de proteínas na célula, a sequência de bases nitrogenadas determina a sequência que terá o RNA.

O RNA vai, então, promover a síntese das proteínas a partir dos 20 tipos de aminoácidos existentes. Como a mensagem contida no RNA vem do DNA, podemos dizer que é este último que determina a sequência de ligações dos aminoácidos, de forma a sintetizar uma nova proteína.

Cada aminoácido, dos 20 existentes, é codificado por uma sequência de três bases nitrogenadas, entre as quatro existentes (A, T, G e C). É fácil entender a necessidade de três bases para cada aminoácido: com duas bases (AA, AT, TA, GC, CG, TT, etc.), só poderíamos codificar 16 aminoácidos ($4^2 = 16$). Porém, como são 20 os tipos de aminoácidos, são necessárias sequências de três bases nitrogenadas.



Como existem 64 permutações ($4^3 = 64$), isso nos leva à conclusão de que muitas combinações de três bases se repetem para um mesmo aminoácido.

Essas e outras combinações de aminoácidos e bases nitrogenadas traduzem um conjunto de informações correspondente a mais de 3 bilhões de características relativas à espécie humana. Esse número, segundo os cientistas do Projeto Genoma, responsáveis por mapear o chamado "código da vida", constituem a identificação de aproximadamente 97% do mapeamento do DNA humano.

Agora, converse com sua turma:

1. Por que são necessárias três bases nitrogenadas para codificar cada aminoácido?

Pelo texto, são necessárias três bases nitrogenadas para codificar cada aminoácido, porque, com apenas duas bases, teríamos apenas 16 combinações possíveis, o que não seria suficiente para representar os 20 aminoácidos diferentes. Com três bases, temos 64 permutações possíveis, o que permite uma correspondência única para cada aminoácido.

Professor

Enfatize a importância do conceito de codificação de aminoácidos e suas conexões com a Biologia e a Matemática. Incentive os alunos a se maravilharem com a beleza e a profundidade do "código da vida", ressaltando como esse entendimento é fundamental para explorar a genética e a evolução das espécies. Ao abordar esses pontos, você proporcionará aos alunos uma visão abrangente e envolvente da interseção entre a Matemática e a Biologia no contexto da codificação genética. Isso certamente estimulará o interesse e a compreensão deles sobre esse tema intrigante.

2. Como a relação entre o número de aminoácidos e o número de permutações de bases nitrogenadas resulta em repetições de combinações?

Pelo texto, devido ao fato de existirem apenas 20 tipos de aminoácidos, enquanto há 64 permutações possíveis de três bases nitrogenadas, várias combinações de bases se repetem para codificar o mesmo aminoácido. Isso ocorre porque a quantidade de permutações é maior do que a quantidade de aminoácidos, o que resulta na reutilização de certas combinações de bases para representar os aminoácidos faltantes.

3. Você considera importante a matemática no entendimento da Biologia?

Resposta pessoal.

4. Dos seus estudos nas Ciências da Natureza, que outras áreas utilizam ferramentas da matemática em suas explicações?

Espera-se que citem que na Física, na Química e na Astronomia também se utiliza muitas ferramentas matemáticas nas explicações, pois a matemática acaba sendo a linguagem dessas ciências.

5. Aproveitando o assunto do texto, o que mais você sabe sobre DNA? Converse com seu professor de Biologia a respeito.

Resposta pessoal.

Combinações simples

(EM13MAT310)

Representamos por $C_{n,\,p}$ o número de combinações de n objetos tomados p a p. Por exemplo, as combinações simples de 3 dos 4 objetos a_1, a_2, a_3, a_4 são:

$$\{a_1, a_2, a_3\}\ \{a_1, a_2, a_4\}\ \{a_1, a_3, a_4\}\ \{a_2, a_3, a_4\}$$

Assim, $C_{4,\,3} = 4$.

Analisando essa resposta: a escolha do 1º elemento da combinação pode ser feita de 4 modos; a do 2º, de 3 modos e a do 3º, de 2 modos. A resposta parece ser $4 \times 3 \times 2 = 24$. Entretanto, se pensarmos em uma combinação, por exemplo $\{a_1, a_2, a_3\}$, verificamos que as combinações $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_3, a_2\}$, $\{a_2, a_1, a_3\}$ etc. são idênticas e foram contadas como se fossem diferentes. Portanto, na resposta 24, estamos contando cada combinação uma vez para cada ordem de escrever seus elementos.

Como em cada combinação os elementos podem ser escritos em $P_3 = 3! = 6$ ordens, cada combinação foi contada 6 vezes. Logo, a resposta é $\frac{24}{6} = 4$.

Genericamente, temos:

$$C_{n,p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!},\ 0 \le p \le n.$$

Multiplicando o numerador e o denominador por $(n - p)!$, obtemos:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!},\ 0 \le p \le n$$

$C_{n,p} = \binom{n}{p}$ é chamado de número binomial.

Atividades resolvidas

R12. Calcule o número de comissões com 2 professores e 3 alunos que podem ser formadas a partir de um grupo de 5 professores e 8 alunos.

Resolução

Para escolher os professores, temos $C_{5,2}$ possibilidades, e para cada uma delas temos $C_{8,\,3}$ possibilidades de escolher os alunos. Portanto, o número de comissões é:

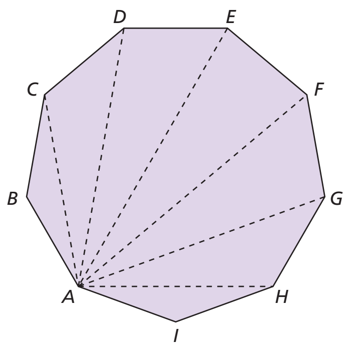
$C_{5,\,2} \cdot C_{8,\,3} = 10 \cdot 56 = 560$

R13. Quantas diagonais possui um polígono convexo de 9 lados?

Resolução

O número de segmentos que têm extremidades nos vértices do polígono é:

$$C_{9,2} = \frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7!}{2!7!} = 36$$

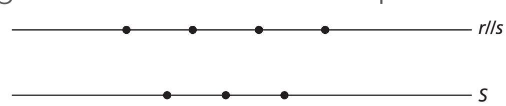


Desses segmentos, 9 são lados e, portanto, o número de diagonais é 36 – 9 = 27.

Professor

Destaque a aplicação dos números binomiais em várias áreas, como probabilidade, estatísticas, teoria dos números e combinatória. Enfatize como eles são fundamentais para calcular o número de maneiras únicas de selecionar subconjuntos de elementos. Espera-se que com isso os alunos tenham uma compreensão sólida das combinações simples e dos números binomiais, bem como uma base para explorar conceitos mais avançados de combinatória e matemática discreta. Certifique-se de fornecer exemplos adicionais e oportunidades para os alunos praticarem o cálculo de combinações em diferentes contextos.

R14. Dados 7 pontos distintos, 4 sobre uma reta e 3 sobre uma paralela à primeira, calcule o número de triângulos com vértices nesses pontos.



Resolução

Temos, no total, $C_{7,3}$ agrupamentos de 3 pontos, sendo que $C_{4,3}$ são pontos alinhados em r e $C_{3,3}$ são pontos alinhados em s. Como 3 pontos alinhados não determinam um triângulo, temos que o número de triângulos é:

$C_{7,3} - C_{4,3} - C_{3,3} = 35 - 4 - 1 = 30.$

Professor

Como desafio extra, proponha que os alunos façam grupos de 5 pessoas e calculem o número de comissões compostas de 3 alunos que podemos formar a partir desse grupo. Após um tempo, resolva com eles na lousa, explicando que cada comissão difere das outras apenas pela natureza. Assim, o número de comissões é:

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!\,2!} = 10$$

Atividades

38. Em uma classe de 20 alunos, o professor deseja organizar grupos de 5 para trabalhar no laboratório. Quantos grupos distintos poderá formar?

15.504 grupos

39. Quantos subconjuntos de 4 elementos possui um conjunto de 8 elementos?

70 subconjuntos

40. Um baralho comum possui 52 cartas. De quantas formas distintas um jogador pode receber 5 cartas?

2.598.960 formas

41. Determine o número de diagonais de um polígono convexo de *n* lados.

$$\frac{n(n-3)}{2}$$

42. Em uma câmara municipal, deve-se formar uma comissão de 8 vereadores de tal maneira que 3 sejam do partido *A*, 2 do *B* e 3 do *C*. Quantas comissões distintas podem ser formadas, sabendo-se que os partidos *A* e *C* têm 8 deputados cada e o partido *B* tem 5 deputados?

31.360 comissões

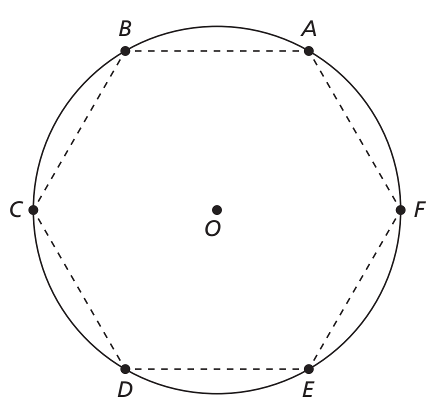
43. Em uma seleção de futebol, existem 8 jogadores de ataque, 6 de meio-campo, 6 defensores e 3 goleiros. Quantos times diferentes podem ser formados utilizando-se 1 goleiro, 4 defensores, 3 meio-campistas e 3 atacantes?

50.400 times

44. Resolva o exercício anterior sem considerar as posições dos jogadores, com exceção do goleiro.

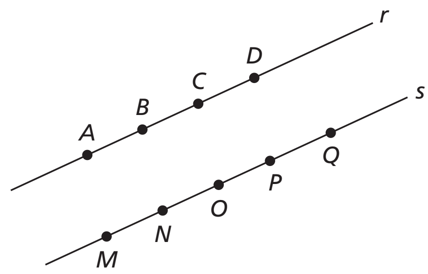
554.268 times

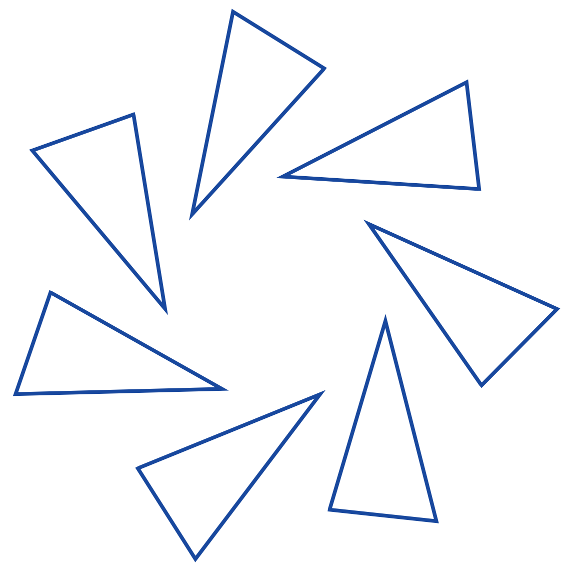
45. A figura a seguir mostra uma circunferência com os 6 vértices de um hexágono regular. Quantos quadriláteros com vértices nesses pontos podemos inscrever na circunferência?



15 quadriláteros

46. Quantos triângulos com vértices em duas retas paralelas *r* e *s* podem ser formados com 4 pontos distintos em uma e 5 pontos também distintos na outra? 70 triângulos





Números binomiais

(EM13MAT310)

Denomina-se número binomial todo número na forma $\binom{n}{p}$, com $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$, $n \geq p$, em que:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

lê-se: binomial de *n* sobre *p*.

n: numerador do binominal.

p: denominador do binominal.

Note que $\binom{n}{p} = C_{n,\,p}$.

Podem ser demonstradas duas importantes propriedades dos números binomiais:

1ª) Binomiais complementares

Dois binomiais de mesmo numerador, em que a soma dos denominadores é igual ao numerador comum:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

2ª) Relação de Stifel

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Atividades resolvidas

R15. Calcule os números binomiais:

a) $\binom{7}{2}$

b) $\binom{n}{0}$

Resolução

a) $\binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$

b) $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$

R16. Verifique a igualdade: $\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$.

Resolução

De fato, $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!}$ e $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!}$ $\therefore$ $\frac{5!}{2!3!} = \frac{5!}{3!2!}$

Dois binomiais serão iguais quando possuírem numeradores e denominadores iguais ou se forem complementares.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{q} \Rightarrow \begin{cases} p = q \text{ ou} \\ p + q = n \end{cases}$$

R17. Determine x em $\binom{7}{3} = \binom{7}{x}$.

Resolução

$$\binom{7}{3} = \binom{7}{x} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ ou} \\ 3 + x = 7 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

Triângulo de Pascal

Triângulo de Pascal é uma tabela de números binomiais dispostos da seguinte maneira:

– em uma mesma linha, todos os binomiais com numeradores iguais;

– em uma mesma coluna, todos os binomiais com denominadores iguais.

$$
\begin{array}{cccccccc}
\binom{0}{0} & & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \binom{n}{4} & \cdots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Calculando cada binomial, temos:

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

As propriedades binomiais podem ser facilmente observadas no triângulo de Pascal.

– No triângulo, dois binomiais complementares ocupam posições equidistantes dos extremos de uma linha:

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

$$
\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \cdots \quad \binom{n}{n-2} \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}
$$

Chamamos esses binomiais de complementares.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

– Somando-se dois binomiais consecutivos de uma linha, obtém-se um número que se encontra na linha seguinte, abaixo do segundo binomial somado:

1							
1	1						
1	2	1					
1	3 +	3	1				
1	4	$\Downarrow$ 6	4	1			
1	5	10	10 +	5	1		
1	6	15	20	$\Downarrow$ 15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Essa relação é denominada de relação de Stifel.

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

– A soma dos elementos de uma linha n é igual a 2^n.

1	$S_0 = 2^0 = 1$
1 1	$S_1 = 2^1 = 2$
1 2 1	$S_2 = 2^2 = 4$
1 3 3 1	$S_3 = 2^3 = 8$
1 4 6 4 1	$S_4 = 2^4 = 16$
1 5 10 10 5 1	$S_5 = 2^5 = 32$
⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮	⋮ ⋮ ⋮
Linha n	$S_n = 2^n$

Atividades resolvidas

R18. Calcule o valor de x na equação:

$$\binom{5}{2x} = \binom{5}{x+2}$$

Resolução

Condição de existência:

$$\begin{cases} 2x \leq 5 \Rightarrow x \leq \dfrac{5}{2} \\ x + 2 \leq 5 \Rightarrow x \leq 5 - 2 \Rightarrow x \leq 3 \\ x \in N \end{cases}$$

Assim, $\binom{5}{2x} = \binom{5}{x+2} \Rightarrow \begin{cases} 2x = x + 2 \Rightarrow x = 2 \\ \text{ou} \\ 2x + x + 2 = 5 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$

$S = \{1, 2\}$

Atividades

47. Calcule os binomiais:

a) $\binom{4}{3}$

4

b) $\binom{9}{2}$

36

c) $\binom{n+1}{n}$

n + 1

d) $\binom{2n}{1}$

2n

48. Calcule o valor das expressões utilizando as propriedades dos binomiais:

a) $\binom{8}{5} + \binom{8}{3}$

112

b) $\binom{10}{8} - \binom{9}{7} - \binom{9}{8}$

0

c) $\binom{5}{3} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} - 2\binom{5}{2}$

0

49. Calcule o valor de x nas equações:

a) $\binom{9}{x} = \binom{9}{3}$

S = {3, 6}

b) $\binom{12}{2x - 1} = \binom{12}{x + 1}$

S = {2, 4}

Professor

Ao abordar este tópico, recomenda-se uma abordagem abrangente e prática para garantir que os alunos compreendam e apliquem efetivamente esse conceito matemático poderoso. Aplique exemplos práticos para ilustrar a expansão de binômios elevados a diferentes potências, incentivando os alunos a seguirem a fórmula passo a passo.

Binômio de Newton

Denomina-se binômio de Newton todo binômio da forma $(a + b)^n$, com $n \in \mathbb{N}$. Vamos desenvolver alguns binômios de Newton:

$n = 0 \Rightarrow (a + b)^0 = 1$

$n = 1 \Rightarrow (a + b)^1 = 1a + 1b$

$n = 2 \Rightarrow (a + b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$n = 3 \Rightarrow (a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$n = 4 \Rightarrow (a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

Observe os coeficientes dos termos do desenvolvimento de $(a + b)^n$. Eles formam o triângulo de Pascal. Observe também que os expoentes de a decrescem de n até 0, enquanto os de b crescem de 0 a n.

Vamos agora escrever o binômio $(a + b)^n$, utilizando os coeficientes binomiais:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Note que, em qualquer termo do binômio, a soma dos expoentes de a e b é sempre n.

Termo geral

Um termo qualquer do binômio pode ser expresso pela fórmula do termo geral:

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

em que $k + 1$ é a posição do termo e n, o expoente do binômio.

Atribuindo a k valores que variam de 0 a n, temos:

$k = 0 \Rightarrow$ 1º termo: $T_1 = \binom{n}{0} a^{n-0}b^0$

$k = 1 \Rightarrow$ 2º termo: $T_2 = \binom{n}{1} a^{n-1}b^1$

$k = 2 \Rightarrow$ 3º termo: $T_3 = \binom{n}{2} a^{n-2}b^2$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$k = n \Rightarrow (n+1)$º termo: $T_{n+1} = \binom{n}{n} a^{n-n}\,b^n$

Observe que a ordem de cada termo é sempre uma unidade maior do que o valor atribuído a k.

Atividades resolvidas

R19. Efetue o desenvolvimento de $(x + 3)^4$.

Resolução

$(x+3)^4 = \binom{4}{0}x^4 \cdot 3^0 + \binom{4}{1}x^3 \cdot 3^1 + \binom{4}{2}x^2 \cdot 3^2 + \binom{4}{3}x \cdot 3^3 + \binom{4}{4}x^0 \cdot 3^4$

$(x+3)^4 = 1 \cdot x^4 \cdot 1 + 4 \cdot x^3 \cdot 3 + 6 \cdot x^2 \cdot 9 + 4 \cdot x \cdot 27 + 1 \cdot 1 \cdot 81$

$(x+3)^4 = x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81$

R20. Determine o sexto termo do desenvolvimento de $(x + 2)^8$:

Resolução

Para obter o 6º termo, devemos ter $k = 5$ e $T_{k+1} = \binom{8}{k}x^{8-k} \cdot 2^k$.

Logo:

$T_{5+1} = \binom{8}{5}x^{8-5} \cdot 2^5$

$T_6 = \dfrac{8!}{5!3!} \cdot x^3 \cdot 32 = 1\,792x^3$

R21. Calcule o termo médio do desenvolvimento de $(2x - y)^8$.

Resolução

Como, nesse caso, temos 9 termos, o termo médio é o quinto.

$T_{k+1} = \binom{8}{k}(2x)^{8-k} \cdot (-y)^k$ e $k = 4$

$T_5 = \binom{8}{4}(2x)^4 \cdot (-y)^4 = 1\,120\, x^4y^4$

R22. Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^6$.

Resolução

Inicialmente, escrevemos o termo geral:

$T_{k+1} = \binom{6}{k}(x^2)^{6-k}\left(\dfrac{1}{x}\right)^k \Rightarrow T_{k+1} = \binom{6}{k}\dfrac{x^{12-2k}}{x^k}$

$T_{k+1} = \binom{6}{k}x^{12-3k}$

Para que T_{k+1} seja independente de x, devemos ter:

$12 - 3k = 0 \Rightarrow k = 4$

Logo, o termo independente é: $T_5 = \binom{6}{4}x^0 \Rightarrow T_5 = 15$.

Professor

Como desafio extra, peça aos estudantes que calculem a soma dos coeficientes no desenvolvimento do binômio $(x + y)^5$. Após algum tempo, explique que os coeficientes binomiais serão os elementos da linha 5 do triângulo de Pascal. Logo, mostre que a soma será:

$S_5 = (1 + 1)^5 = 2^5$

$S_5 = 32$

Atividades

50. Desenvolva os binômios

a) $(2x + 1)^4$

$16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$

b) $(3x - y)^5$

$24^3x^5 - 40^5x^4y + 270x^3y^2 - 90x^2y^3 + 15xy^4 - y^5$

c) $\left(2x + \dfrac{1}{2}\right)^6$

$64x^6 + 96x^5 + 60\,x^4 + 20x^3 + \dfrac{15}{4}x^2 + \dfrac{3}{8}x + \dfrac{1}{64}$

d) $(4 - a)^7$

$16\,384 - 28\,672a + 21\,504a^2 - 8\,960a^3 + 2\,240a^4 - 336a^5 + 28a^6 - a^7$

51. Determine o termo pedido no desenvolvimento dos binômios abaixo:

a) o quarto termo de $(4x + 1)^7$;

$T_4 = 8\,960x^4$

b) o sétimo termo de $(x - 1)^{10}$;

$T_7 = 210\,x^4$

c) o quinto termo de $(x^2 - y)^8$.

$T_5 = 70x^8y^4$

52. Determine, se houver, o termo independente de *x* no desenvolvimento de:

a) $\left(\frac{1}{x^2} + x^3\right)^{10}$

$T_5 = 210$

b) $\left(3x - \frac{2}{x^2}\right)^5$

Não existe termo independente.

53. Qual o termo em x^4 no desenvolvimento de $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^8$?

$T_5 = 1\,120x^4$

54. Determine o coeficiente do termo em X^2 no desenvolvimento de $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)^6$.

$\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

55. Determine a soma dos coeficientes no desenvolvimento de $(x - y)^9$.

0

Noção de probabilidade

(EM13MAT311) (EM13MAT312) (EM13MAT511)

Experimentos aleatórios

Experimentos aleatórios são aqueles que têm resultados imprevisíveis. Por exemplo, lançar um dado e obter a face 6, retirar 1 bola verde de uma urna na qual se encontram 3 bolas verdes e 2 vermelhas, ou apostar 6 números num jogo de loteria e acertar a quina. O estudo de probabilidades destina-se basicamente a estabelecer uma maneira de analisar experimentos aleatórios.

Espaço amostral e evento

Espaço amostral de um experimento aleatório é o conjunto dos resultados possíveis para aquele experimento.

Espaço amostral

$E = \{r_1, r_2, r_3, ..., r_n\}$

$r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ são os resultados possíveis

$$\left.\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ \vdots \\ r_n \end{matrix}\right\} \text{resultados possíveis}$$

Veja os exemplos:

1. Quando lançamos uma moeda, temos duas possibilidades:

– obter cara;

– obter coroa.

Professor

Antes de iniciar a abordagem, faça um levantamento sobre o que os alunos lembram e sabem sobre probabilidade de seus estudos no Ensino Fundamental, de modo que os subsídios possam ajudar na condução dessas aulas. Proponha, por exemplo, como abordagem inicial um experimento aleatório simples com uma moeda ou dado que tenha há disposição em sala de aula, verificando o que sabem de experimentos aleatórios, espaço amostral e eventos, para então definir formalmente esses conceitos novamente.

Logo, o espaço amostral do experimento será:

$E = \{\text{cara, coroa}\}$


AdobeStock

2. Jogando um dado ideal e anotando a face voltada para cima, teremos o seguinte espaço amostral:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Qualquer subconjunto do espaço amostral chama-se evento.

Probabilidade de um evento

Probabilidade de um evento A representa a "chance" de ocorrer um evento A. O valor $p(A)$ é igual ao número de elementos de A dividido pelo número de elementos do espaço amostral E.

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } E} = \frac{n(A)}{n(E)}$$

$p(A)$: probabilidade de um evento A.

Como $A \subset E$, temos $n(A) \leq n(E)$. Logo:

$0 \leq p(A) \leq 1$

Em particular, se $p(A) = 0$, A será chamado evento impossível e, se $p(A) = 1$, A será chamado evento certo.

Atividades resolvidas

R23. Qual é o espaço amostral quando lançamos uma moeda duas vezes seguida? Escreva dois eventos possíveis nesse espaço amostral.

Resolução

O espaço amostral é:

$E = \{(\text{cara, cara}); (\text{cara, coroa}); (\text{coroa, cara}); (\text{coroa, coroa})\}$

São exemplos de eventos:

– obter 2 caras: $A = \{(\text{cara, cara})\}$

– obter ao menos 1 cara: $B\ \{(\text{cara, cara}); (\text{cara, coroa}); (\text{coroa, cara})\}$

R24. Calcule a probabilidade de, jogando um dado ideal, obter um número maior que 4:

Resolução

Espaço amostral: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

evento: $A = \{5, 6\}$

$$\left.\begin{matrix} n(A) = 2 \\ n(E) = 6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

R25. Calcule a probabilidade de retirar 1 bola vermelha de uma urna contendo 3 bolas brancas, 2 vermelhas e 5 verdes:

Resolução

$$\left.\begin{matrix} 3 \text{ brancas} \\ 2 \text{ vermelhas} \\ 5 \text{ verdes} \end{matrix}\right\} \Rightarrow n(E) = 10 \text{ e } n(A) = 2$$

$$p(A) = \frac{2}{10} \Rightarrow p(A) = \frac{1}{5}$$

Professor

Como forma de desafio, leve um baralho completo para a sala de aula e faça alguns experimentos aleatórios com ele. Depois, peça que determinem a probabilidade de retirar ao acaso uma carta de ouros, por exemplo. Após algum tempo, faça de fato a retirada das cartas, verificando quando sai ouros. Explique a eles que um baralho é formado por 52 cartas, divididas em 4 naipes: ouros, copas, paus e espadas, sendo 13 cartas de cada naipe. Você pode mostrar essas cartas com o baralho. Assim, considerando o evento de tirar carta de ouros, mostre na lousa:

$$\left.\begin{matrix} n(E) = 52 \\ n(A) = 13 \end{matrix}\right\} \to p(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} \to p(A) = 0{,}25$$

Explique que também podemos expressar $p(A)$ em porcentagem:

$p(A) = 0{,}25 \to p(A) = 25\%$.

Atividades

56. Lançando-se um dado ideal, qual a probabilidade de ser obtido um número menor que 4?

$p(A) = \frac{1}{2}$

57. Retira-se 1 carta ao acaso de um baralho de 52 cartas. Determine a probabilidade de ser:

a) uma dama;

$p(A) = \frac{1}{13}$

b) uma dama ou um rei.

$p(A) = \frac{2}{13}$

58. Qual a probabilidade de sorteio de 1 bola que não seja branca em uma urna que contém 6 bolas brancas, 2 azuis e 4 amarelas?

$p(A) = \frac{1}{2}$

59. Em um avião viajam 40 brasileiros, 20 japoneses, 8 americanos e 3 árabes. Escolhendo ao acaso um passageiro, determine a probabilidade de ele:

a) ser árabe;

$p(A) = \frac{3}{71}$

b) não ser árabe;

$p(B) = \frac{68}{71}$

c) ser japonês ou americano;

$p(C) = \frac{28}{71}$

d) ser argentino.

$p(D) = 0$

Observação: Se $p(A)$ é a probabilidade de A ocorrer, a probabilidade de A não ocorrer será $1 - p(A)$.

$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$, em que $\overline{A}$: evento complementar de A.

60. Em uma urna há 20 bolas, numeradas de 1 a 20. Retira-se 1 bola ao acaso. Calcule a probabilidade de seu número ser:

a) ímpar;

$p(A) = \frac{1}{2}$

b) múltiplo de 3;

$p(B) = \frac{3}{10}$

c) divisível por 2 e 3.

$p(C) = \frac{3}{20}$

d) múltiplo de 5 e 7.

$p(D) = 0$

61. Um grupo de amigos organiza uma loteria cujos bilhetes são formados por 4 algarismos distintos. Qual é a probabilidade de uma pessoa que possui os bilhetes 1.387 e 7.502 ser premiada, sendo que nenhum bilhete tem como algarismo inicial o zero?

$p(A) = \frac{1}{2.268}$

62. Lançando-se 2 dados simultaneamente, qual a chance de ocorrerem números iguais?

$p(A) = \frac{1}{6}$

63. Jogando-se 2 dados simultaneamente, qual a probabilidade de se obter um número par na soma das faces?

$p(A) = \frac{1}{2}$

64. São lançadas 3 moedas simultaneamente. Qual a chance de se obterem 3 caras?

$p(A) = \frac{1}{8}$

65. Lançamos 2 dados: 1 azul e 1 vermelho. Sabendo que no azul apareceu o número 3, calcule a probabilidade de obtermos a soma dos números maior ou igual a 7.

$\frac{1}{12}$

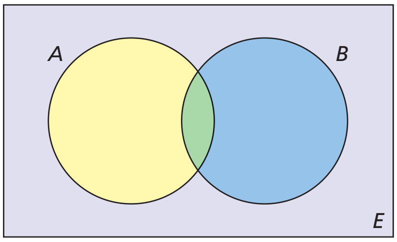
Regra da soma

Considerando dois eventos, A e B, de um mesmo espaço amostral E, a probabilidade de ocorrer A ou B ($A \cup B$) é dada por:

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$p(A \cup B)$: probabilidade de A ou B

$p(A \cap B)$: probabilidade de A e B simultaneamente



Atividades resolvidas

R26. Em uma urna existem 10 bolas, numeradas de 1 a 10. Retira-se 1 bola ao acaso. Determine a probabilidade de seu número ser par ou maior que 4.

Resolução

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \Rightarrow n(E) = 10$

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow n(A) = 5$

$B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} \Rightarrow n(B) = 6$

$A \cap B = \{6, 8, 10\} \Rightarrow n(A \cap B) = 3$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$p(A \cup B) = \frac{5}{10} + \frac{6}{10} - \frac{3}{10} \Rightarrow p(A \cup B) = \frac{8}{10}$

Professor

Como atividade extra, pergunte: considerando a mesma situação da atividade resolvida anterior, qual a probabilidade de a bola retirada ter um número primo ou um número maior que 8? A resolução é a seguinte:

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \rightarrow n(E) = 10$

$A = \{2, 3, 5, 7\} \rightarrow n(A) = 4$

$B = \{9, 10\} \rightarrow n(B) = 2$

$A \cap B = \varnothing \rightarrow n(A \cap B) = 0$

$p(A) = \frac{4}{10} + \frac{2}{10} - 0 \rightarrow p(A) = \frac{6}{10}$

Eventos mutuamente exclusivos

Eventos para os quais $A \cap B = \varnothing$.

Nesse caso:

$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

R27. Retira-se 1 carta ao acaso de um baralho de 52 cartas. Determine a probabilidade de ela ser de ouro ou ser um rei.

Resolução

$n(E) = 52$

evento A: ser de ouro $\Rightarrow n(A) = 13$

evento B: ser rei $\Rightarrow n(B) = 4$

evento $A \cap B$: ser rei de ouros $\Rightarrow n(A \cap B) = 1$, $p(A \cup B) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$

Atividades

66. Em uma escola de 1.200 alunos, 550 gostam apenas de rock, 230 apenas de samba e 120 gostam de samba e de rock. Escolhendo-se um aluno ao acaso, qual a probabilidade de ele gostar de samba ou de rock?

$\frac{3}{4}$

67. Em uma urna existem 10 bolas coloridas. As brancas estão numeradas de 1 a 6 e as vermelhas, de 7 a 10. Retirando-se 1, qual a probabilidade de ela ser branca ou de seu número ser maior que 7?

$\frac{9}{10}$

68. Retira-se 1 carta ao acaso de um baralho de 52 cartas. Determine a probabilidade de ela:

a) ser preta ou ser figura;

$\frac{8}{13}$

b) não ser figura ou ser um ás.

$\frac{10}{13}$

69. Uma caixa contém 1.000 bolas, numeradas de 1 a 1.000. Qual a probabilidade de se tirar, ao acaso, uma bola contendo um número par ou um número de 2 algarismos?

$\frac{109}{200}$

70. Em um grupo, 50 pessoas pertencem ao clube A, 70 ao clube B, 30 ao clube C, 20 pertencem aos clubes A e B, 22 aos clubes A e C, 18 aos clubes B e C e 10 pertencem aos três clubes. Escolhida, ao acaso, 1 das pessoas presentes, calcule a probabilidade de ela:

a) pertencer aos três clubes;

$\frac{1}{10}$

b) pertencer somente ao clube C;

0

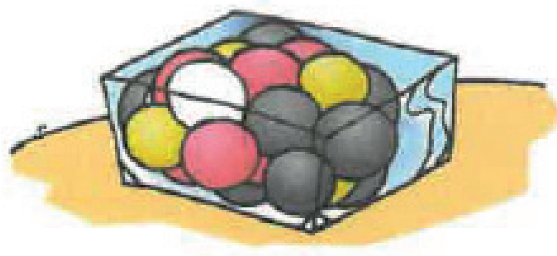
c) pertencer a dois clubes, pelo menos;

$\frac{2}{5}$

d) não pertencer ao clube B.

$\frac{3}{10}$

71. Em uma urna, temos bolas brancas, amarelas, vermelhas e pretas. O número de bolas amarelas é o dobro do número de bolas brancas, e o de bolas vermelhas, o triplo. Determine a probabilidade de ser retirada uma bola preta, sabendo-se que o número de pretas é o dobro do número de amarelas.



$\frac{2}{5}$

72. Uma estação meteorológica informa: "Hoje, a probabilidade de não chover é de 55%, a probabilidade de fazer frio é de 35% e a probabilidade de chover ou fazer frio é de 80%". Com esses dados, determine a probabilidade de:

a) chover;

45%

b) não fazer frio;

65%

c) não chover e não fazer frio.

20%

73. Um homem tem em sua mão 4 cartas de espadas de um baralho comum de 52 cartas. Se ele receber mais 3 cartas, calcule a probabilidade de ao menos 1 das cartas recebidas ser também de espadas.

≈ 47%

Regra do produto

Considerando dois eventos, *A* e *B*, de um mesmo espaço amostral, a probabilidade de ocorrer *A* e *B* é dada por:

$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$

$p(A \cap B)$: probabilidade de ocorrer *A* e *B* simultaneamente

$p\,(B/A)$: probabilidade de ocorrer *B*, tendo ocorrido *A*

Eventos independentes

Dois eventos A e B são independentes quando a probabilidade de ocorrer um deles não depende da ocorrência do outro. Nesse caso, $p(B/A) = p(B)$. Assim, para dois eventos independentes, a regra do produto pode ser escrita:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

Atividades resolvidas

R28. Considere uma urna contendo 7 bolas, numeradas de 1 a 7. Calcule a probabilidade de retirarmos a bola 1 e, em seguida, sem a reposição desta, a bola 2.

Resolução

A probabilidade de sair a bola 1 na primeira retirada é $p(A) = \frac{1}{7}$.

Restando 6 bolas na urna, a probabilidade de ocorrer a bola 2 na segunda, tendo ocorrido a bola 1 na primeira, é $p(B/A) = \frac{1}{6}$.

Como devem ocorrer os dois eventos, temos:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{42}$$

R29. Um lote de peças para automóveis contém 60 peças novas e 10 usadas. Escolhe-se 1 peça ao acaso e, em seguida, sem reposição da primeira, uma outra é retirada. Determine a probabilidade de as 2 peças serem usadas.

Resolução

$n(E) = 70$

Primeira retirada $\begin{cases} n(E) = 70 \\ n(A) = 10 \end{cases} \Rightarrow p(A) = \frac{1}{7}$

Segunda retirada $\begin{cases} n(E) = 69 \\ n(B) = 9 \end{cases} \Rightarrow p(B) = \frac{9}{69}$

$$p\,(A \cap B) = \frac{1}{7} \cdot \frac{9}{69} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{3}{161}$$

Professor

Como desafio extra, proponha a seguinte situação: em uma urna, temos 100 bolas, numeradas de 1 a 100. Sabe-se que a bola sorteada é par. Nesse contexto, peça que calculem a probabilidade de ser um múltiplo de 10. Após um tempo para que resolvam, corrija com eles na lousa:

A: o número é par $\rightarrow n(A) = 50$

B: o número é múltiplo de 10 $\rightarrow n(B) = 10$

$A \cap B$: o número é par e múltiplo de 10 $\rightarrow n(A \cap B) = 10$

Assim, a probabilidade de ser um múltiplo de 10, sabendo que a bola sorteada é par, é:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{50}{100}} = \frac{1}{5}$$

Atividades

74. Em uma urna, há 16 bolas, sendo 8 brancas, 4 azuis e 4 vermelhas. Retiram-se 2 bolas, uma após a outra. Indique a probabilidade de:

a) serem ambas vermelhas.

$\frac{1}{20}$

b) 1 ser azul e 1 ser branca, independentemente da ordem.

$\frac{2}{15}$

75. Lançando-se 1 dado e 1 moeda, qual a probabilidade de obtenção de número maior que 2 no dado e cara na moeda?

$\frac{1}{3}$

76. Jogando-se 4 dados, qual a probabilidade de se obterem 24 pontos na soma das faces?

$\frac{1}{1296}$

77. Sabendo-se que, ao retirar 1 carta de um baralho de 52 cartas, ela era de copas, qual a probabilidade de que ela seja menor que 3? (Considere o ás com valor 1.)

$\frac{2}{13}$

78. Uma prova é composta de 50 testes de múltipla escolha, cada um com 5 alternativas, sendo apenas 1 correta. Qual a probabilidade de que um aluno, apenas "chutando", acerte todas as questões?

$\left(\frac{1}{5}\right)^{50}$

Resumo

Princípio fundamental da contagem

Um evento E é composto pelas etapas $E_1, E_2, ..., E_n$, que podem ocorrer de $n_1, n_2, ..., n_n$ maneiras distintas.

$E = E_1 \cdot E_2 \cdot ... \cdot E_n$

$E = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_n$

Professor

Encoraje os alunos a revisitarem o resumo sempre que precisarem, incentivando-os a anotar outros conceitos que considerem relevantes para um melhor entendimento. Além disso, sugira que utilizem o resumo como um auxílio durante a resolução da bateria final de atividades que virá a seguir. Isso permitirá que os estudantes apliquem de forma prática o conteúdo revisado e fortaleçam sua compreensão, ao mesmo tempo em que se tornam mais autônomos na gestão do próprio aprendizado. Dessa maneira, você estará proporcionando uma ferramenta valiosa que promove a retenção de conhecimento e a habilidade de aplicação em situações desafiadoras.

Fatorial

$n! = n(n-1)(n-2) ... 3 \cdot 2 \cdot 1 \ (n \in \mathbb{N})$

Convenciona-se que $0! = 1$ e $1! = 1$

Permutação simples

$P_n = n(n-1)(n-2) ... 1 = n! \ (n \in \mathbb{N})$

$P_n - n!$

Permutação com repetição

$$P_n^{n_1, n_2, n_3, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! n_3! ... n_k!}, \ (n \in \mathbb{N} \text{ e } n_1, n_2, n_3 ... n_k \in \mathbb{N}^*)$$

Combinação simples

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \ 0 \le p \le n$$

Números binomiais

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \ n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}, n \ge p.$$

Binomiais complementares

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Igualdade de números binomiais

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{q} \Rightarrow \begin{cases} p = q \ \text{ ou} \\ p + q = n \end{cases}$$

Relação de Stifel

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Triângulo de Pascal

$$\begin{array}{ccccccc}
\binom{0}{0} & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & & & \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & & \dots & & \binom{n}{n} & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Propriedades do triângulo de Pascal

– Binomiais complementares ocupam posições equidistantes dos extremos de uma linha;

– somando-se dois binomiais consecutivos de uma linha, obtém-se um número que se encontra na linha seguinte, abaixo do segundo binomial somado;

– a soma dos elementos de uma linha n é igual a

$2^n \Rightarrow S_n = 2^n$.

Binômio de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2}$$

$$a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

Termo geral do binômio de Newton

$$T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Noções de probabilidades

Experimentos aleatórios são aqueles que têm resultados imprevisíveis.

Espaço amostral (E) de um experimento aleatório é o conjunto dos resultados possíveis para aquele experimento.

Evento (A) é qualquer conjunto de resultados possíveis.

Probabilidade do evento A

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } E} = \frac{n(A)}{n(E)}$$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(E)}$$

$A \subset E \Rightarrow n(A) \leq n(E) \Rightarrow 0 \leq p(A) \leq 1$

$p(A) = 0 \Rightarrow A$ é evento impossível

$p(A) = 1 \Rightarrow A$ é evento certo

$p(\overline{A})$: probabilidade de não ocorrer A

$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$

Regra da soma

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$p(A \cup B)$: probabilidade de A ou B

$p(A \cap B)$: probabilidade de A e B simultaneamente

Eventos mutuamente exclusivos:

$A \cap B = \varnothing \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

Regra do produto

$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Eventos independentes

$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$

Professor

A sugestão para a utilização desta série de atividades finais é como uma avaliação somativa. Essa avaliação pode ser adaptada conforme sua preferência, podendo ser realizada individualmente, em duplas ou em pequenos grupos, de acordo com o método que melhor se alinha aos objetivos de ensino e à dinâmica da sua turma. Isso proporcionará aos alunos uma oportunidade de demonstrar suas aprendizagens de maneira colaborativa ou individual, garantindo uma avaliação abrangente.

Avalie o que aprendeu

(EM13MAT310)

1. Um casal pretende ter 5 filhos. Quantas são as possíveis sequências de menino ou menina?

a) 8

b) 16

c) 32

d) 48

e) 56

(EM13MAT310)

2. Uma moça tem 5 saias, 6 blusas e 4 pares de sapatos. De quantas maneiras distintas ela pode se vestir usando 1 saia, 1 blusa e 1 par de sapatos?

a) 120
b) 60
c) 45
d) 30
e) 15

(EM13MAT310)

3. A lanchonete "Coma Bem" oferece, na compra de 1 sanduíche, 1 refrigerante grátis. Quantas são as opções para um cliente se a lanchonete oferece 10 tipos de sanduíches e 6 tipos de refrigerantes?

a) 15
b) 30
c) 45
d) 60
e) 120

(EM13MAT310)

4. Com os algarismos 0, 1, 3, 5, 6, 7 e 9, quantos são os números de algarismos distintos compreendidos entre 3.000 e 9.000?

a) 120
b) 480
c) 960
d) 1.280
e) 5.440

(EM13MAT310)

5. De quantas maneiras diferentes 10 pessoas podem acomodar-se em um banco de apenas 4 lugares?

a) 970
b) 1.010
c) 2.760
d) 3.060
e) 5.040

(EM13MAT310)

6. Quantas mensagens de código podem ser enviadas, contendo 10 elementos, se cada elemento ou é 0 (zero) ou é 1 (um)?

a) 574
b) 1.024
c) 1.466
d) 2.040
e) 5.078

(EM13MAT310)

7. Quantos são os números naturais de 4 algarismos que possuem pelo menos dois algarismos iguais?

a) 1.022
b) 2.354
c) 4.464
d) 6.728
e) 8.088

(EM13MAT310)

8. Usando o alfabeto de 26 letras, quantas palavras contendo 3 letras diferentes podem ser formadas?

a) 4.200

b) 6.300

c) 8.400

d) 10.500

e) 15.600

(EM13MAT310)

9. Em um tabuleiro de xadrez 8×8, de quantos modos podemos colocar 8 peões iguais, de modo que não haja dois peões na mesma linha ou na mesma coluna?

a) 40.320

b) 35.180

c) 28.000

d) 17.850

e) 15.000

(EM13MAT310)

10. Na primeira fileira de um teatro, há 8 poltronas. De quantas maneiras podemos acomodar 6 grandes fãs de um ator que encenará uma peça nesse teatro?

a) 20.160

b) 19.900

c) 18.760

d) 17.680

e) 16.550

(EM13MAT310)

11. Um rapaz deseja fazer 5 tatuagens diferentes em seu corpo. Ele escolheu as costas, o braço e a perna para desenhá-las. De quantas formas isso pode ser feito?

a) 30

b) 40

c) 50

d) 60

e) 70

(EM13MAT311)

12. O número da chapa de um carro é par. Qual a probabilidade de o algarismo das unidades ser 2?

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{1}{7}$

d) $\frac{1}{9}$

e) 1

(EM13MAT312)

13. No lançamento de 2 dados, qual a probabilidade de a soma dos pontos obtidos ser maior que 7?

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{7}{9}$

c) $\frac{5}{9}$

d) $\frac{5}{12}$

e) $\frac{1}{12}$

(EM13MAT311)

14. Com os algarismos 2, 3, 4, 6 e 7 são formados números de 3 algarismos distintos. Escolhendo-se 1 deles, qual a probabilidade de esse número ser par?

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{4}{5}$

d) $\frac{3}{7}$

e) $\frac{5}{7}$

(EM13MAT311)

15. De um grupo de 8 pessoas, das quais 4 são morenas, 3 loiras e 1 ruiva, 1 pessoa é escolhida ao acaso. Calcule a probabilidade de ela ser ruiva.

a) 1

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{6}$

e) $\frac{1}{8}$

(EM13MAT311)

16. Qual a probabilidade de ser ímpar o produto de dois números escolhidos dentre os números naturais distintos de 1 a 20?

a) $\frac{9}{38}$

b) $\frac{9}{20}$

c) $\frac{7}{38}$

d) $\frac{7}{20}$

e) $\frac{5}{16}$

(EM13MAT312)

17. Sabendo-se que a probabilidade de que um animal adquira certa enfermidade no decurso de cada mês é igual a 30%, calcule a probabilidade de que um animal somente venha a contrair a doença no terceiro mês.

a) 17,5%

b) 14,7%

c) 13,5%

d) 11,7%

e) 10,0%

(EM13MAT311)

18. Se num grupo de 15 homens e 5 mulheres sorteamos 3 pessoas para formarem uma comissão, qual a probabilidade de que ela seja formada por 2 homens e 1 mulher?

a) $\frac{17}{35}$

b) $\frac{33}{35}$

c) $\frac{35}{76}$

d) $\frac{30}{76}$

e) $\frac{25}{76}$

(EM13MAT312)

19. No lançamento de dois dados, qual a probabilidade de sair soma 7, sabendo-se que ocorreu 2 no segundo dado?

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{9}$

d) $\frac{1}{12}$

e) $\frac{1}{15}$

(EM13MAT312)

20. Numa escola de 300 alunos, 180 são meninas e 30 exercem a função de representante, sendo 10 meninas. Escolhendo ao acaso um desses alunos, qual é a probabilidade de que, sendo menina, seja representante?

a) $\frac{1}{12}$

b) $\frac{3}{12}$

c) 1

d) $\frac{1}{18}$

e) $\frac{3}{18}$

Adobestock

Você já comparou as formas geométricas das construções de sua cidade com os modelos apresentados neste capítulo? Observe a silhueta do prédio do Museu do Amanhã na Praça Mauá, no Rio de Janeiro. Essas formas lembram alguma forma geométrica que você conhece do estudo da Geometria?

Capítulo 4

Geometria espacial

A Geometria estuda o espaço e as formas, as posições e as medidas dos corpos. É, sem dúvida, o mais antigo ramo da Matemática, pois o estímulo para seu desenvolvimento vem das relações mais diretas que os homens têm com o meio que o cerca, como, por exemplo, o domínio de dimensões físicas, como distâncias, áreas e volumes, o desenvolvimento de instrumentos e objetos úteis no dia a dia, as edificações em geral, a representação da natureza e a expressão artística.

Vamos estudar a Geometria Espacial em duas etapas: **Geometria de Posição** e **Geometria Métrica**. Na primeira, estudaremos as relações entre os elementos no espaço, e na segunda, os sólidos geométricos e suas medidas.

Professor

Este capítulo sobre Geometria Espacial aborda os principais tópicos de Geometria de Posição e Geometria Métrica, destacando uma variedade de conceitos fundamentais e aplicados na Geometria Tridimensional. Ele começa explorando conceitos primitivos e estabelecendo postulados e teoremas que formam a base do estudo. A análise das posições relativas de retas e planos, incluindo teoremas de paralelismo, é seguida pela determinação de planos no espaço tridimensional. O capítulo discute também posições relativas de retas e planos, teoremas de paralelismo entre reta e plano, posições relativas de dois planos e teoremas de paralelismo entre dois planos. A relação de perpendicularismo é explorada, incluindo o teorema de perpendicularismo entre reta e plano. A segunda metade do capítulo concentra-se na Geometria Métrica, abordando prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. São apresentados os cálculos de áreas e volumes para cada um desses sólidos geométricos. O capítulo conclui com uma análise de poliedros, incluindo a relação de Euler e a exploração dos poliedros regulares, fornecendo uma compreensão abrangente da Geometria Espacial.

Geometria de posição

(EM13MAT307)

Professor

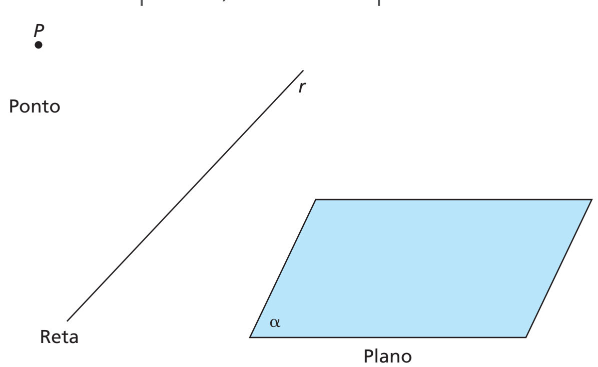
Neste tópico, os alunos serão introduzidos aos fundamentos da Geometria Tridimensional. Comece destacando os conceitos primitivos, como ponto, reta e plano, que servem como blocos de construção para a análise espacial. Em seguida, apresente os postulados, que são declarações consideradas verdadeiras sem necessidade de prova, e demonstre como eles sustentam a estrutura da Geometria.

Conceitos primitivos, postulados e teoremas

A Geometria Espacial baseia-se em três conceitos primitivos com os quais certamente você já teve contato: o ponto, a reta e o plano.

Professor

Ao explorar teoremas, os alunos compreenderão como argumentos lógicos podem ser usados para justificar afirmações matemáticas, levando a um entendimento mais profundo das relações e propriedades dos objetos geométricos. Fornecer exemplos ilustrativos e estimular discussões sobre como os postulados e teoremas se aplicam a situações do mundo real pode enriquecer a compreensão dos alunos sobre esse alicerce matemático crucial.



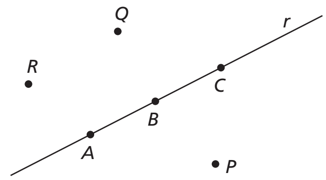
Observe que os desenhos de retas e planos representam apenas uma parte desses objetos. Os pontos são usualmente representados por letras maiúsculas: *A*, *B*, *C*, ..., *P*, *Q*, ..., as retas, por letras minúsculas: *a*, *b*, *c*, ..., *r*, *s*, ..., e os planos, por letras minúsculas do alfabeto grego: α, β, γ, ...

A partir dos **conceitos primitivos** e **postulados** são formuladas as **definições**, que caracterizam situações ou objetos específicos. Com base nos conceitos primitivos, postulados e definições, que são proposições admitidas sem demonstração, constroem-se proposições elaboradas, que podem ser demonstradas. Essas proposições são chamadas **teoremas**.

Postulados de existência

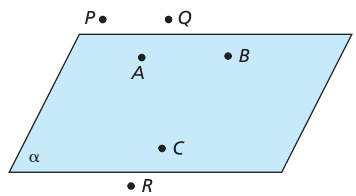
Postulado 1. Existem ponto, reta e plano.

Postulado 2. Em uma reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.



$$\left.\begin{array}{l} A \in r \\ B \in r \\ C \in r \end{array}\right\} \Rightarrow A, B \text{ e } C \text{ são pontos colineares}$$

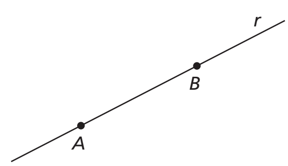
Postulado 3. Em um plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos.



$$\left.\begin{array}{l} A \in r \\ B \in r \\ C \in r \end{array}\right\} \Rightarrow A, B \text{ e } C \text{ são pontos coplanares}$$

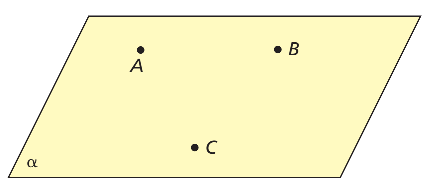
Postulados de determinação

Postulado 4. Dois pontos distintos determinam uma única reta.



$$r = \overleftrightarrow{AB}$$

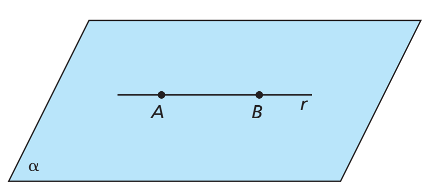
Postulado 5. Três pontos não colineares determinam um único plano.



$$\alpha = (A, B, C)$$

Postulado de inclusão

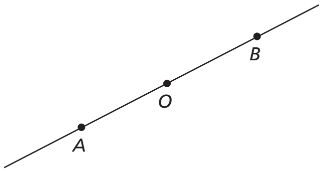
Postulado 6. Uma reta que possui dois pontos distintos em um plano está contida nesse plano.



$$\left.\begin{array}{l} A \in r \\ B \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r = \overleftrightarrow{AB} \subset \alpha$$

Postulado de divisão

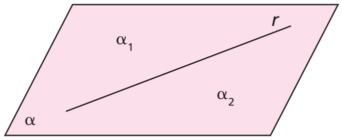
Postulado 7. Um ponto qualquer de uma reta divide-a em duas partes:



$\overrightarrow{OA}$: semi-reta de origem O na direção de A.

$\overrightarrow{OB}$: semi-reta de origem O na direção de B.

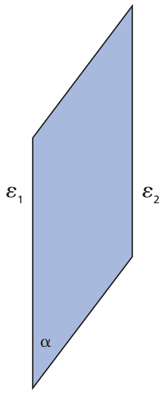
Postulado 8. Uma reta qualquer de um plano divide-o em duas partes:



$r\alpha_1$: semiplano de origem r

$r\alpha_2$: semiplano de origem r

Postulado 9. Um plano qualquer divide o espaço em duas partes:

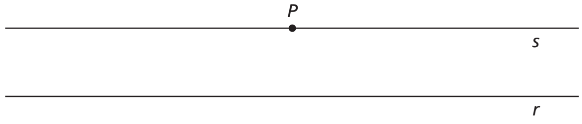


$\alpha\varepsilon_1$: semiespaço de origem α

$\alpha\varepsilon_2$: semiespaço de origem α

Postulado de Euclides

Postulado 10. Por um ponto fora de uma reta existe uma única reta paralela à reta dada.



$s \,//\, r$ (leia: s é paralela a r)

Atividades resolvidas

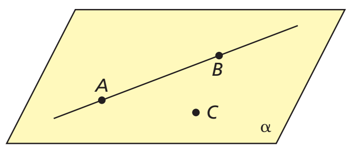
R1. Classifique como verdadeira ou falsa a afirmação: três pontos não colineares sempre determinam um plano.

Professor

Dentro da metodologia deste material, as atividades resolvidas desempenham um papel fundamental como ferramentas auxiliares no processo de ensino e aprendizagem. Sugerimos que você estimule os alunos a acompanharem atentamente o detalhado passo a passo de cada resolução, e, se possível, os encoraje a replicar as resoluções em seus próprios cadernos. Além disso, eles podem explorar a criação de pequenas variações das atividades já solucionadas, o que proporcionará um maior engajamento e compreensão dos conceitos abordados. Isso permitirá que os alunos apliquem os princípios aprendidos de forma prática e reforcem sua compreensão do conteúdo estudado.

Resolução

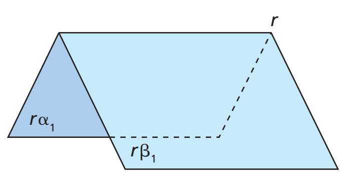
A afirmação é verdadeira. Enquanto por dois pontos passa uma única reta, três determinarão um único plano. Basta que você lembre-se de que precisamos, no mínimo, de três apoios para sustentar um objeto equilibrado.



R2. Classifique em verdadeira ou falsa a afirmação: dois semiplanos de mesma origem são sempre coplanares.

Resolução

A afirmação é falsa. Nem sempre dois semiplanos são coplanares. Observe a figura:



Atividades

1. Classifique cada afirmação a seguir como verdadeira ou falsa:

a) Uma reta tem dois pontos distintos.

verdadeira

b) Fora de uma reta, existem infinitos pontos.

verdadeira

c) Três pontos quaisquer são sempre colineares.

falsa

d) Dois pontos quaisquer são sempre colineares.

verdadeira

e) Fora de uma reta, existem pontos que são colineares.

verdadeira

f) Três pontos quaisquer sempre determinam um plano.

falsa

g) Por um ponto passam infinitas retas.

verdadeira

h) Por três pontos não alinhados passam três planos diferentes.

falsa

i) Uma reta que tem um ponto comum com um plano está contida nele.

falsa

j) Um ponto qualquer divide uma reta em duas semi-retas.

falsa

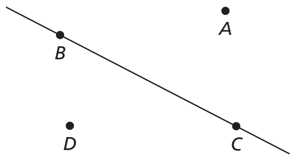
l) Uma reta qualquer de um plano divide-o em dois semiplanos.

verdadeira

m) No espaço, existem infinitas retas.

verdadeira

2. Classifique, de acordo com a figura, cada sentença como verdadeira ou falsa:



$B \neq C \qquad A \notin \overleftrightarrow{BC}$

a) Os pontos A, B, C determinam um plano α.

verdadeira

b) A reta $\overleftrightarrow{AB}$ está contida no plano determinado por B, C e D.

verdadeira, se os quatro pontos forem coplanares; falsa, se o ponto A não pertencer ao plano α formado pelos pontos B, C e D.

c) A reta $\overleftrightarrow{BC}$ não está contida no plano determinado por *A*, *D* e *C*.

falsa, se os quatro pontos forem coplanares; verdadeira, se o ponto B não pertencer ao plano formado pelos pontos A, D e C.

d) Qualquer reta que passe pelo ponto *B* está contida no plano determinado por *A*, *C* e *D*.

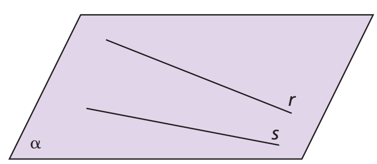
falsa

Posições relativas de duas retas

Duas retas no espaço podem pertencer a um mesmo plano. Nesse caso, são chamadas **retas coplanares**. Podem também não estar no mesmo plano. Nessas condições, são denominadas **retas reversas**. As retas coplanares podem ser concorrentes ou paralelas, enquanto as retas reversas podem ser ortogonais ou não ortogonais. Vamos examinar cada uma dessas situações.

Retas coplanares

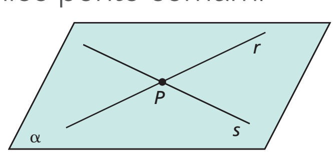
São aquelas que estão contidas em um mesmo plano.



$$\left.\begin{array}{l} r \subset \alpha \\ s \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow r, s \text{ coplanares}$$

Duas retas coplanares *r* e *s* podem ser:

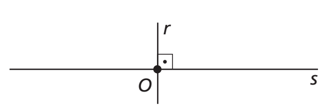
a) **concorrentes**: *r* e *s* têm um único ponto comum.



$r \cap s = \{P\}$

De acordo com o ângulo que formam entre si, duas retas concorrentes podem ser:

– **perpendiculares**: *r* e *s* formam ângulo reto.

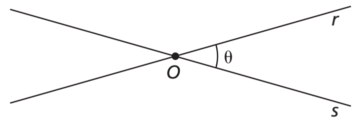


$r \perp s$ (leia: *r* é perpendicular a *s*)

Professor

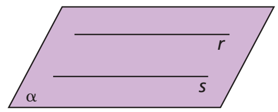
Neste tópico, inicie explicando as categorias fundamentais, como retas paralelas, concorrentes (ou intersecantes) e coincidentes, destacando suas características distintivas. Utilize exemplos visuais e práticos para ilustrar cada posição relativa e discutiremos como determinar ângulos entre retas. Explore casos mais complexos, como retas oblíquas e perpendiculares, incentivando a aplicação desses conceitos em situações do cotidiano e promovendo discussões em grupo para reforçar a compreensão. Essa abordagem proporcionará aos alunos uma compreensão sólida das posições relativas de retas e sua aplicabilidade na Geometria Espacial.

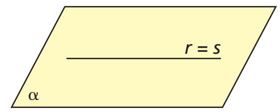
– **oblíquas**: *r* e *s* não são perpendiculares.



$$\theta \neq 0^\circ \text{ e } \theta \neq 90^\circ$$

b) **paralelas**: *r* e *s* não têm ponto comum, ou *r* e *s* são coincidentes.





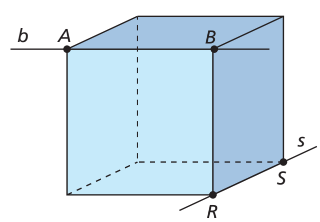
$$\left.\begin{array}{l} r \subset \alpha \\ s \subset \alpha \\ r \cap s = \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow \text{paralelas distintas}$$

$$\left.\begin{array}{l} r \subset \alpha \\ s \subset \alpha \\ r \cap s = r = s \end{array}\right\} \Rightarrow \text{paralelas coincidentes}$$

Convenciona-se que o ângulo entre duas retas paralelas é de 0°.

Retas reversas

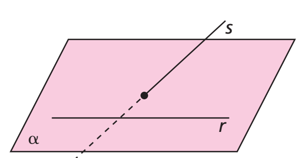
Quaisquer duas retas que não estão contidas em um mesmo plano são denominadas retas reversas.



$$b = \overleftrightarrow{AB} \qquad s = \overleftrightarrow{RS}$$

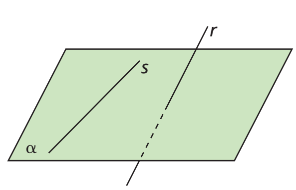
Observe na figura que não existe plano que contenha simultaneamente as retas *b* e *s*.

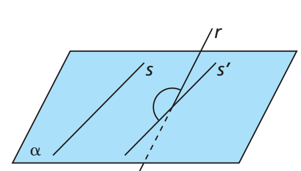
Duas retas reversas não têm ponto comum.



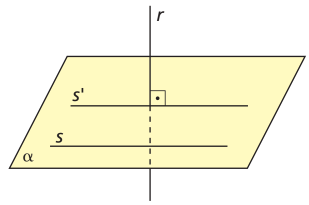
$$r \cap s = \varnothing$$

Chamamos ângulo entre duas retas reversas o ângulo formado por duas outras retas, respectivamente paralelas a cada uma das retas reversas, traçadas por um ponto qualquer.





Quando esse ângulo é 90º, as retas recebem o nome de ortogonais.



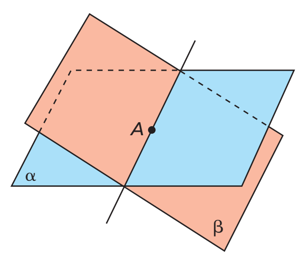
$$\left.\begin{array}{l} r, s \text{ reversas} \\ s \,//\, s' \\ r \perp s' \end{array}\right\} \Rightarrow r \text{ é ortogonal a } s \; (r \perp s)$$

Atividades resolvidas

R3. Se dois planos distintos têm um ponto comum, então eles têm uma reta comum que passa pelo ponto. Classifique em verdadeira ou falsa essa afirmação.

Resolução

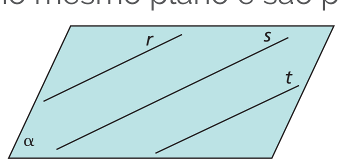
A afirmação é verdadeira. Os planos α e β têm em comum a reta que passa por *A*.



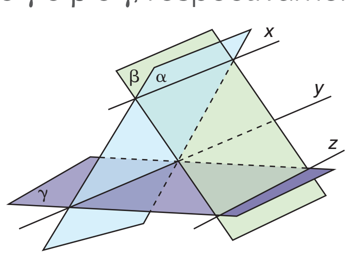
R4. Verifique, por meio de figuras, que três retas paralelas, duas a duas, ou estão no mesmo plano ou determinam três planos, dois a dois concorrentes.

Resolução

Na primeira figura, *r*, *s* e *t* estão no mesmo plano e são paralelas duas a duas.



Na segunda, cada par de paralelas está num plano diferente e as retas *x*, *y* e *z* são interseções dos planos α e β, α e γ e β e γ, respectivamente.



Atividades

3. Classifique cada afirmação a seguir como verdadeira ou falsa:

a) Duas retas reversas são sempre distintas.

verdadeira

b) Duas retas que não têm ponto comum são paralelas.

falsa

c) Duas retas que não têm ponto comum são reversas.

falsa

d) Duas retas distintas ou são reversas, ou são paralelas, ou são concorrentes.

verdadeira

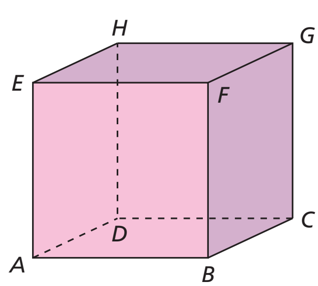
e) Duas retas de um mesmo plano são paralelas ou concorrentes.

verdadeira

f) Duas retas que têm um ponto comum são concorrentes.

verdadeira

4. Neste cubo, localize três pares de retas:



a) concorrentes;

concorrentes: $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{DC}$; $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{FB}$

b) paralelas;

paralelas: $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{EF}$; $\overleftrightarrow{AD}$ e $\overleftrightarrow{BC}$; $\overleftrightarrow{FG}$ e $\overleftrightarrow{EH}$

c) reversas.

reversas: $\overleftrightarrow{AE}$ e $\overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{BF}$ e $\overleftrightarrow{CD}$; $\overleftrightarrow{EH}$ e $\overleftrightarrow{CG}$

5. Classifique como verdadeira ou falsa cada afirmação a seguir:

a) Se dois planos têm uma reta comum, eles têm um ponto comum.

verdadeira

b) Dois planos distintos podem ter em comum apenas três pontos não colineares.

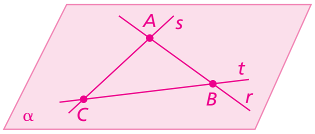
falsa

c) Dois planos podem ter um único ponto comum.

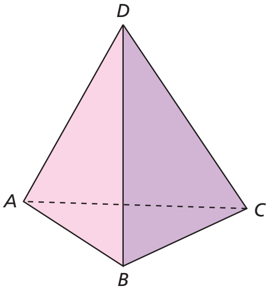
falsa

6. Verifique, por meio de uma figura, que três retas concorrentes duas a duas e que não passam por um mesmo ponto estão em um mesmo plano.

Conforme a descrição, temos:



7. Na pirâmide a seguir, considere as retas que ficam determinadas por dois de seus vértices, *A, B, C, D.* Determine quantos e quais são os pares de retas reversas.



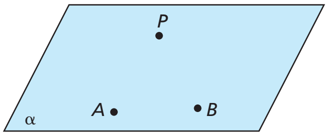
São reversos os pares de retas formados $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ e $\overleftrightarrow{AD}$.

Determinação de planos

Existem quatro maneiras para se determinar um plano:

A primeira é o postulado que já enunciamos.

– Três pontos não colineares:

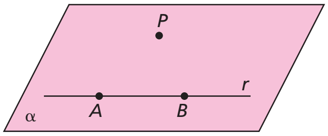


$\alpha = (A, B, P)$

A segunda maneira é um teorema que pode ser demonstrado.

– Uma reta r e um ponto P fora dela:

$$\left.\begin{matrix} A \in r \\ B \in r \\ P \notin r \end{matrix}\right\} \Rightarrow A,\ B \text{ e } P \text{ não colineares.}$$

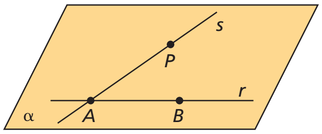


$\alpha = (r, P)$

A terceira maneira também é um teorema que pode ser demonstrado.

– Duas retas r e s concorrentes:

$$\left.\begin{matrix} A = r \cap s \\ B \in r, B \notin s \\ P \in s, P \notin r \end{matrix}\right\} \Rightarrow A,\ B \text{ e } P \text{ não colineares}$$

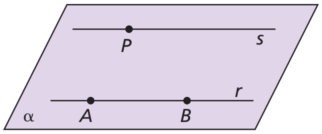


$\alpha = (r, s)$

A quarta maneira também é um teorema que pode ser demonstrado.

– Duas retas r e s paralelas distintas:

$$\left.\begin{matrix} P \in s, P \notin r \\ A \in r, A \notin s \\ B \in r, B \notin s \end{matrix}\right\} \Rightarrow A,\ B \text{ e } P \text{ não colineares}$$



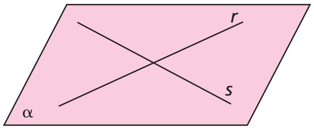
$\alpha = (r, s)$

Atividades resolvidas

R5. Podemos dizer que duas retas concorrentes determinam quatro planos?

Resolução

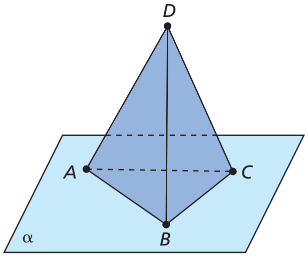
Não, duas retas concorrentes determinam um único plano.



R6. Quantos planos ficam determinados por quatro pontos não coplanares?

Resolução

Observe na figura que os quatro pontos não coplanares determinam quatro planos.



$\alpha = (A, B, C)$ $\beta = (B, C, D)$ $\gamma = (A, C, D)$ $\theta = (A, B, D)$

Atividades

8. Classifique cada sentença a seguir como verdadeira ou falsa:

a) Duas retas quaisquer determinam um plano.

falsa

b) Uma reta e um ponto sempre determinam um plano.

falsa

c) Três pontos distintos determinam um plano.

falsa

d) Duas retas distintas e coplanares determinam um plano.

verdadeira

e) Três retas paralelas quaisquer são sempre coplanares.

falsa

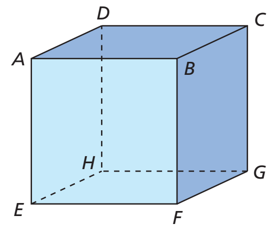
f) Três retas concorrentes quaisquer são sempre coplanares.

falsa

g) Duas retas reversas determinam um plano.

falsa

9. Quantos planos ficam determinados pelos vértices de um cubo?



Os vértices de um cubo determinam 20 planos.

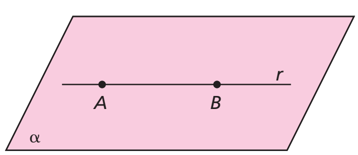
Posições relativas de reta e plano

A posição relativa entre uma reta e um plano determina três situações possíveis, dependendo do número de pontos em comum: ou a reta está contida no plano, ou é concorrente ao plano, ou é paralela a ele. Vamos estudar cada caso.

Reta contida no plano

Uma reta está contida em um plano se tiver dois pontos comuns com o plano:

$$\left.\begin{matrix} A \neq B \\ A \in r, A \in \alpha \\ B \in r, B \in \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow r \subset \alpha \Rightarrow r \cap \alpha = r$$



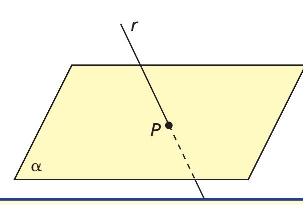
Reta concorrente ao plano

Uma reta e um plano são concorrentes se tiverem um único ponto comum:

$\exists| \ P \mid \{P\} = r \cap \alpha \Leftrightarrow r$ e α concorrentes

($\exists|$: leia existe um único)

O ponto P é o ponto de intersecção entre a reta e o plano.



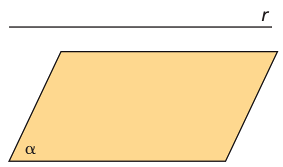
Professor

Neste tópico, inicie explicando as categorias fundamentais, como retas paralelas, concorrentes (ou intersecantes) e coincidentes, destacando suas características distintivas. Utilize exemplos visuais e práticos para ilustrar cada posição relativa e discutiremos como determinar ângulos entre retas. Explore casos mais complexos, como retas oblíquas e perpendiculares, incentivando a aplicação desses conceitos em situações do cotidiano e promovendo discussões em grupo para reforçar a compreensão. Essa abordagem proporcionará aos alunos uma compreensão sólida das posições relativas de retas e sua aplicabilidade na Geometria Espacial.

Reta paralela ao plano

Uma reta e um plano são paralelos quando não têm ponto comum.

Se uma reta r é paralela a um plano α, então ela será paralela ou reversa a qualquer reta do plano, pois, para uma reta s $\Leftrightarrow \alpha$, temos $r \cap s = \varnothing$.



$$r \cap \alpha = \varnothing \Leftrightarrow r\ //\ \alpha$$

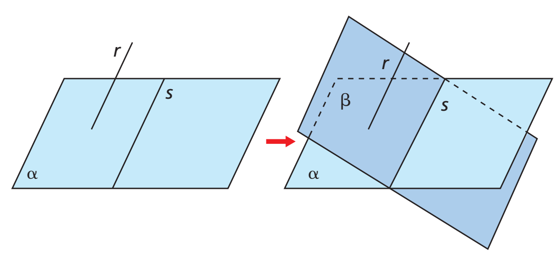
Teorema do paralelismo entre reta e plano

Vamos utilizar o teorema do paralelismo entre uma reta e um plano, que é extremamente importante no estudo da Geometria, para introduzirmos o método de demonstração de um teorema. Inicialmente, lemos a proposição do teorema e dela extraímos a hipótese, conjunto de informações que utilizaremos para a demonstração da tese.

Se uma reta não está contida em um plano e é paralela a uma reta do plano, então ela é paralela ao plano.

Hipótese $\begin{cases} r \not\subset \alpha \\ s \subset \alpha \\ r\ //\ s \end{cases}$ Tese: $r\ //\ \alpha$

Demonstração:



$$r\ //\ s \Rightarrow \exists |\ \beta = (r, s)$$

Sabemos que $r \subset \beta$ e $\alpha \cap \beta = s$.

Se ocorrer que $r \cap \alpha = \{P\}$, teremos $P \in r$ e $P \in s$, que contraria a hipótese $r\ //\ s$.

Logo, $r \cap \alpha = \varnothing$ e $r\ //\ \alpha$.

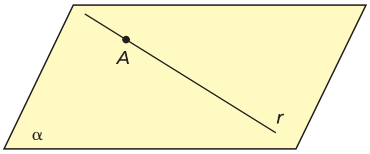
O recíproco desse teorema também pode ser demonstrado: se uma reta está não contida em um plano e é paralela a ele, então essa reta é paralela a uma reta desse plano.

Atividades resolvidas

R7. Uma reta e um plano que têm um ponto comum são concorrentes. Analise essa afirmação e classifique-a em verdadeira ou falsa.

Resolução

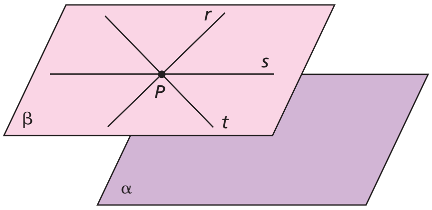
A afirmação é falsa. Se a reta estiver contida no plano, ela também terá um ponto comum com o plano.



R8. Considere um plano α e um ponto P, tal que $P \notin \alpha$. É verdadeiro ou falso afirmarmos que por P passam infinitas retas paralelas a α?

Resolução

A afirmação é verdadeira, pois:



$$\alpha \cap \beta = \varnothing$$

$$r \subset \beta,\ s \subset \beta,\ t \subset \beta,\ ...$$

$$P \in r,\ P \in s,\ P \in t,\ ...$$

Atividades

10. Classifique cada sentença a seguir como verdadeira ou falsa:

a) Uma reta e um plano paralelos não têm ponto comum.

verdadeira

b) Uma reta que tem um ponto comum com um plano está contida nele.

falsa

c) Um plano e uma reta concorrentes têm um ponto comum.

verdadeira

d) Uma reta que está contida em um plano tem um ponto comum com ele.

verdadeira

11. Considere duas retas *r* e *s* paralelas a um plano α e classifique cada sentença abaixo como verdadeira ou falsa:

a) *r* e *s* são paralelas.

falsa

b) *r* e *s* podem ser reversas.

verdadeira

c) *r* e *s* são concorrentes.

falsa

d) Pode existir uma reta contida em α que seja concorrente a *r* ou *s*.

falsa

e) Pode existir uma reta concorrente com α que seja paralela a *r* ou *s*.

falsa

12. Classifique como verdadeira ou falsa cada sentença a seguir:

a) Se *r* é uma reta paralela a um plano α, qualquer plano β por *r* que cruza α o faz segundo uma reta *s* paralela a *r*.

verdadeira

b) Se *r* é uma reta não contida num plano α e *s*, uma reta de α que é paralela a *r*, então *r* e α são paralelos.

verdadeira

c) Se *r* é uma reta paralela a um plano α e $P \in \alpha$, e se *s* é uma reta por *P* e paralela a *r*, então *s* está contida em α.

verdadeira

d) Se *r* e *s* são retas paralelas distintas e *r* cruza o plano α, então *s* também cruza α.

verdadeira

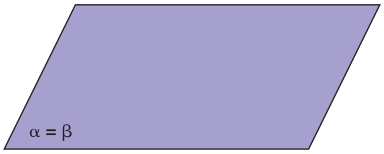
Posições relativas de dois planos

As posições relativas de dois planos definem três categorias: planos coincidentes, planos concorrentes e planos paralelos distintos, como veremos a seguir.

Planos coincidentes

Dois planos são coincidentes se tiverem todos os pontos comuns.

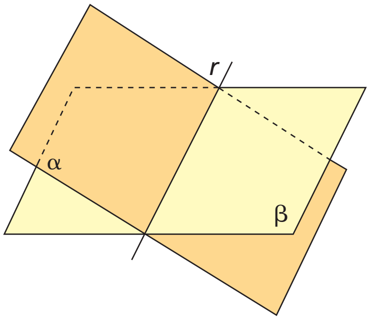
$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \alpha = \beta$$



Planos concorrentes

Dois planos distintos são concorrentes ou secantes se tiverem uma reta comum.

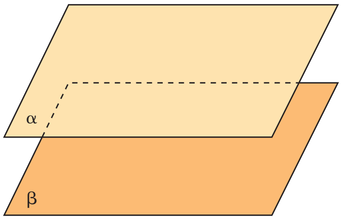
$$\exists |\ r \ / \ \alpha \cap \beta = r \Leftrightarrow \alpha \text{ e } \beta \text{ concorrentes}$$



Planos paralelos distintos

Dois planos distintos são paralelos quando não tiverem ponto comum.

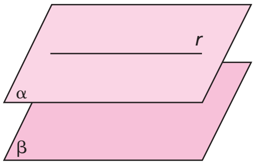
$$\alpha \cap \beta = \varnothing \Rightarrow \alpha \ // \ \beta$$

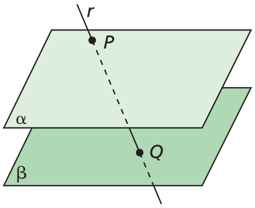


Professor

Inicie o tópico reforçando a definição de planos paralelos e suas propriedades. Explique que o teorema estabelece que, se dois planos são ambos paralelos a um terceiro plano, então esses dois planos também são paralelos entre si. Ilustre essa relação utilizando exemplos geométricos e figuras que evidenciem a disposição dos planos. Em seguida, demonstre a prova do teorema, destacando os conceitos de ângulos entre retas perpendiculares aos planos e o papel do terceiro plano em comum. Incentive os alunos a trabalhar em problemas práticos e explorar situações do cotidiano que envolvam a aplicação do teorema. Ao promover uma compreensão sólida do teorema do paralelismo entre dois planos, você preparará os alunos para aplicar esse conhecimento em contextos matemáticos e práticos mais amplos.

Se dois planos distintos são paralelos, então qualquer reta de um deles é paralela ao outro, e qualquer reta concorrente a um deles também é concorrente ao outro.





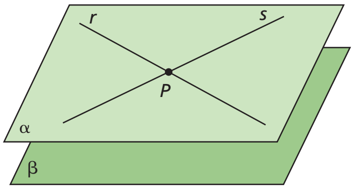
$$\left.\begin{array}{l} r \subset \alpha \\ \alpha \cap \beta = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow r \mathbin{/\!/} \beta \qquad \left.\begin{array}{l} \alpha \cap \beta = \emptyset \\ r \cap \alpha = \{P\} \end{array}\right\} \Rightarrow r \cap \beta \{Q\}$$

Teorema do paralelismo entre dois planos

Se um plano contém duas retas concorrentes, ambas paralelas a um outro plano, então esses planos são paralelos.

Hipótese: $r \subset \alpha$, $s \subset \alpha$, $r \cap s = \{P\}$, $r \mathbin{/\!/} \beta$, $s \mathbin{/\!/} \beta$

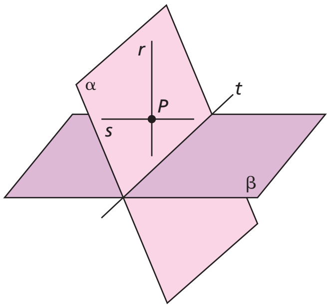
Tese: $\alpha \mathbin{/\!/} \beta$



Demonstração:

Se α e β não forem paralelos, então:

$$\exists\, t \mid t = \alpha \cap \beta$$



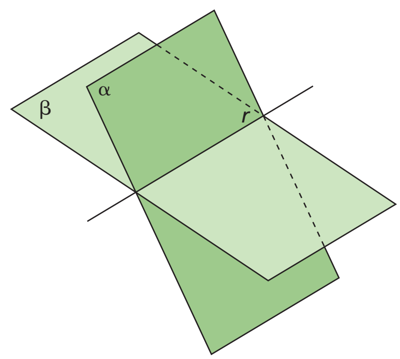
Como $r \mathbin{/\!/} \beta$ e $s \mathbin{/\!/} \beta$, teríamos $r \mathbin{/\!/} t$ e $s \mathbin{/\!/} t$, o que é absurdo, pois contraria o postulado de Euclides. Logo, $\alpha \mathbin{/\!/} \beta$.

Atividades resolvidas

R9. É verdadeiro ou falso dizer que dois planos concorrentes têm um único ponto comum? Justifique sua resposta.

Resolução

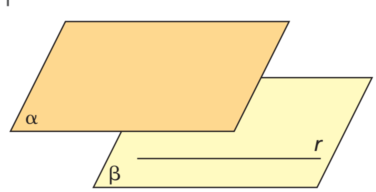
A afirmativa é falsa, pois os planos concorrentes possuem uma reta comum e esta possui infinitos pontos.



R10. Se dois planos distintos são paralelos, então toda reta paralela a um deles é paralela ao outro. Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique.

Resolução

A afirmação é falsa, pois a reta pode estar contida no outro plano.



$$\left.\begin{array}{l}\alpha \neq \beta \\ \alpha \,//\, \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing$$

Se $r \Leftrightarrow \beta$, então $r \cap \alpha = \varnothing$.

Logo, $r \,//\, \alpha$ e r não é paralela a β.

Atividades

13. Classifique cada sentença a seguir como verdadeira ou falsa:

a) Dois planos distintos que têm um ponto comum são concorrentes.

verdadeira

b) Dois planos que têm uma reta comum são concorrentes.

falsa

c) Dois planos distintos que têm uma reta comum são concorrentes.

verdadeira

d) Dois planos que têm intersecção vazia são paralelos.

verdadeira

e) Dois planos que têm um ponto comum são concorrentes.

falsa

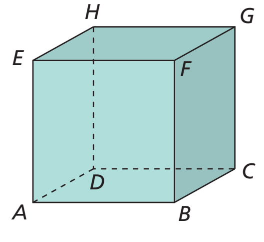
f) Dois planos coincidentes têm todos os pontos em comum.

f) verdadeira

g) Dois planos distintos que não têm uma reta comum são paralelos.

f) verdadeira

14. Classifique os pares de planos como paralelos distintos, coincidentes ou concorrentes, de acordo com a figura:



a) $\alpha = (A, B, C)$ e $\beta = (E, F, H)$

paralelos distintos

b) $\alpha = (A, B, C)$ e $\beta = (A, C, D)$

coincidentes

c) $\alpha = (A, D, H)$ e $\beta = (F, G, H)$

concorrentes

d) $\alpha = (D, H, G)$ e $\beta = (F, C, B)$

concorrentes

e) $\alpha = (F, A, E)$ e $\beta = (A, B, F)$

coincidentes

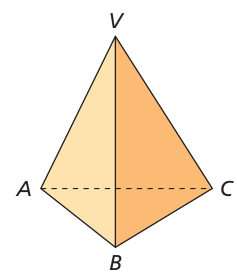
f) $\alpha = (H, A, E)$ e $\beta = (A, B, C)$

f) concorrentes

Professor

Inicie com uma introdução clara sobre o conceito de retas perpendiculares e sua importância na Geometria. Destaque a característica fundamental de ângulos retos entre as retas e como isso influencia as propriedades geométricas e as relações espaciais. Utilize exemplos visuais e práticos para ilustrar a natureza perpendicular das retas em diversos contextos, enfatizando sua aplicabilidade em situações reais. Introduza as técnicas para identificar retas perpendiculares, como a análise de inclinações e a verificação de ângulos adjacentes. Incentive os alunos a resolverem problemas que envolvam o conceito de perpendicularismo, promovendo a conexão entre a teoria e a prática. Além disso, explore casos de planos perpendiculares e a aplicação do conceito em situações tridimensionais. Ao proporcionar uma abordagem abrangente e contextualizada, você ajudará os alunos a compreenderem plenamente o perpendicularismo e a aplicá-lo com confiança em diversos cenários geométricos.

15. Considere os planos $\alpha = (A, B, C)$, $\beta = (V, A, B)$, $\gamma = (V, B, C)$ e $\theta = (V, A, C)$ de acordo com a figura. Determine:



a) $\alpha \cap \beta$

$\overleftrightarrow{AB}$

b) $\alpha \cap \gamma$

$\overleftrightarrow{BC}$

c) $\beta \cap \gamma$

$\overleftrightarrow{VB}$

d) $\gamma \cap \theta$

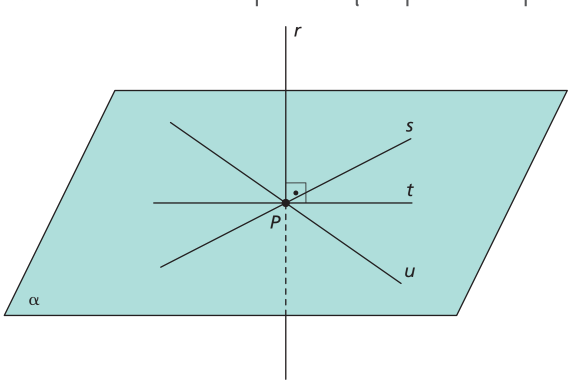
$\overleftrightarrow{VC}$

Perpendicularismo

Vamos estabelecer as condições de perpendicularismo entre reta e plano e entre dois planos.

Reta e plano perpendiculares

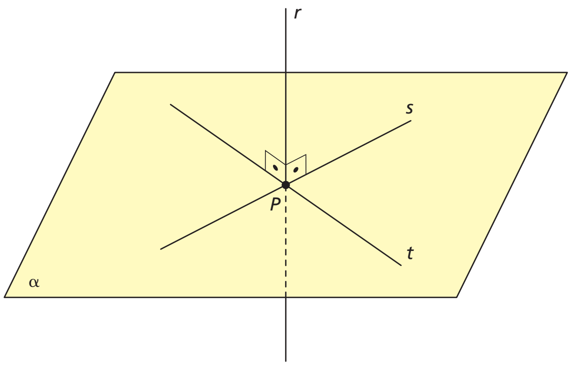
Uma reta é perpendicular a um plano se for concorrente ao plano e perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto de concorrência:



$$\left.\begin{array}{l} r \cap \alpha = \{P\} \\ s \neq t \neq \ldots \neq u \neq \ldots \\ s \subset \alpha, t \subset \alpha, \ldots, u \subset \alpha, .. \\ r \perp s, r \perp t, \ldots, r \perp u, \ldots \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp \alpha$$

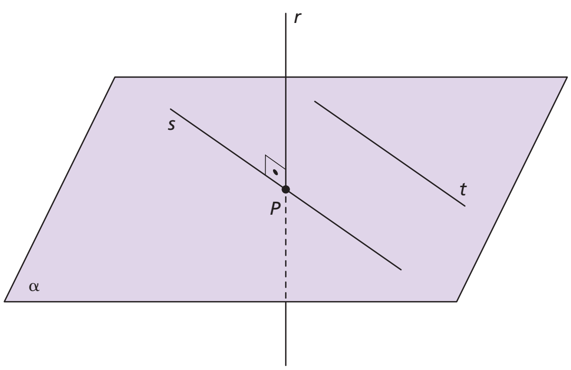
Teorema do perpendicularismo entre reta e plano

Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.



$$\left.\begin{array}{l} s \subset \alpha, t \subset \alpha \\ r \perp s \\ r \perp t \\ r \cap \alpha = \{P\} \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp \alpha$$

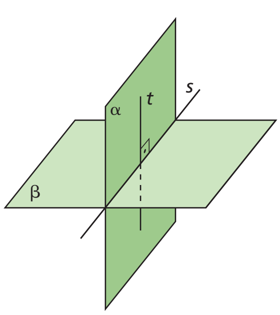
Como consequência desse teorema, podemos concluir que, se uma reta é perpendicular a um plano, ela será perpendicular ou ortogonal a qualquer reta desse plano.



$$\left.\begin{array}{l} r \perp \alpha \\ s \subset \alpha, t \subset \alpha \\ r \cap s = \{P\} \\ r \cap t = \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp s \text{ e } r \perp t$$

Perpendicularismo entre dois planos

Dois planos são perpendiculares se um deles contiver uma reta perpendicular ao outro.



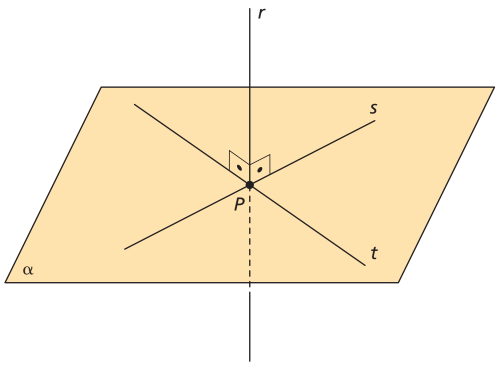
$$\left.\begin{array}{l} t \subset \alpha \\ \perp \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

Atividades resolvidas

R11. Uma reta perpendicular a um plano é reversa a todas as retas desse plano. Essa afirmação é verdadeira ou falsa? Justifique.

Resolução

A afirmação é falsa, pois a reta será perpendicular a todas as retas do plano que passam pelo ponto comum com o plano.

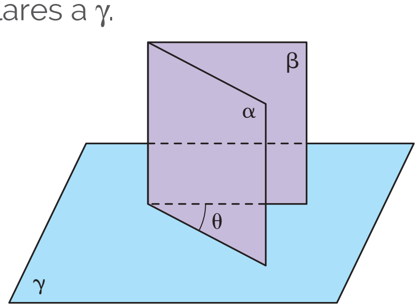


$$\left.\begin{array}{l} r \cap \alpha = \{P\} \\ r \perp \alpha \\ s \subset \alpha, P \in s \\ t \subset \alpha, P \in t \end{array}\right\} \Rightarrow r \perp s \text{ e } r \perp t$$

R12. Se dois planos são perpendiculares a um terceiro, então são perpendiculares entre si. Classifique em verdadeira ou falsa essa afirmação.

Resolução

A afirmação é falsa, pois existe o caso em que os planos α e β não são perpendiculares entre si, mas são perpendiculares a γ.



Atividades

16. Classifique cada sentença a seguir como verdadeira ou falsa:

a) Dois planos perpendiculares são secantes.

verdadeira

b) Uma reta perpendicular a um plano é ortogonal a todas as retas desse plano.

falsa

c) Dois planos secantes são perpendiculares.

falsa

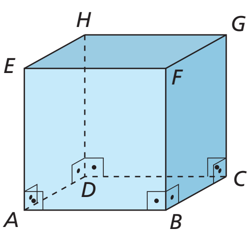
d) Uma reta perpendicular a um plano é perpendicular a todas as retas do plano.

falsa

e) Uma reta perpendicular a um plano é perpendicular a qualquer reta desse plano.

falsa

17. Classifique cada sentença a seguir como verdadeira ou falsa, de acordo com a figura abaixo:



a) $\overleftrightarrow{FB} \perp \alpha = (A, B, C)$ verdadeira

b) $\alpha = (A, B, C) \perp \beta = (F, G, B)$ verdadeira

c) $\overleftrightarrow{HB} \perp \alpha = (A, B, C)$ falsa

d) $\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{GC}$ verdadeira

e) $\theta = (H, E, A) \perp \beta = (F, G, B)$ falsa

18. Classifique como verdadeira ou falsa cada sentença abaixo:

a) Se uma reta forma um ângulo reto com duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular a este.

verdadeira

b) Se duas retas são paralelas e uma delas é perpendicular a um plano, então a outra também é perpendicular a ele.

verdadeira

c) Se duas retas são perpendiculares a um plano, então elas são paralelas.

verdadeira

d) Se dois planos concorrentes são perpendiculares a um terceiro, então sua intersecção é perpendicular a este último.

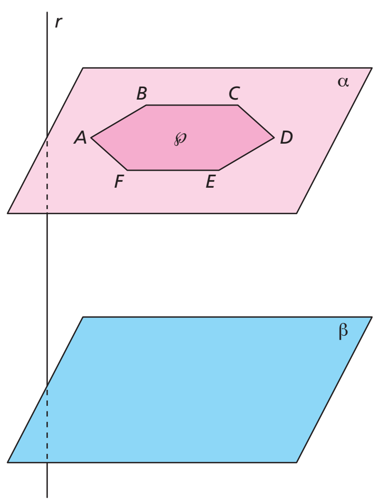
verdadeira

Geometria métrica

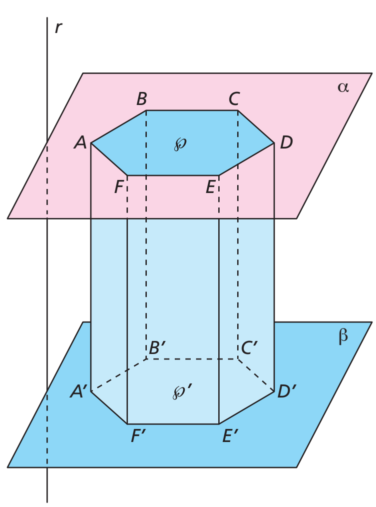
(EM13MAT309) (EM13MAT504) (EM13MAT506)

Prismas

Considere dois planos α e β paralelos, um polígono $\wp$ contido em α e uma reta r concorrente aos dois.



Chamamos de prisma o sólido determinado pela reunião de todos os segmentos paralelos a r, com extremidades no polígono $\wp$ e no plano β.

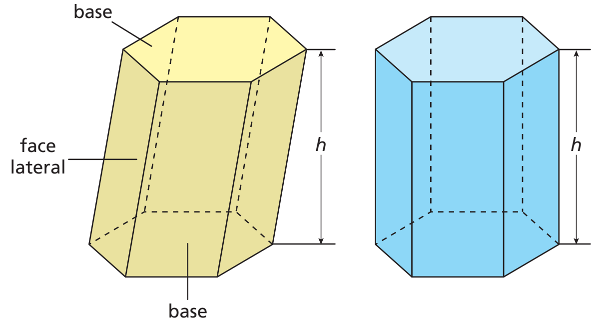


Professor

Ao abordar a Geometria Métrica, é fundamental adotar uma abordagem que una conceitos teóricos a aplicações práticas, tornando a matéria significativa e envolvente para os alunos, conforme apresentado no livro. Utilize as figuras e exemplos visuais presentes nos tópicos para ilustrar esses conceitos de forma concreta. Aborde posições relativas de retas, planos e sólidos tridimensionais, mostrando como identificar paralelismo, concorrência e perpendicularismo. Incentive os alunos a resolverem problemas de congruência e semelhança de figuras, utilizando técnicas como razão e proporção. Integre atividades práticas que explorem a medição de áreas, volumes e ângulos, relacionando-os ao mundo real. Contextualize a Geometria Métrica em áreas como Arquitetura, Engenharia e Design, demonstrando sua relevância no dia a dia. Encoraje discussões em grupo, análise de problemas desafiadores e até a criação de construções geométricas tradicionais e digitais. Ao adotar essa abordagem abrangente e prática, você capacitará os alunos a apreciar a Geometria Métrica como uma disciplina que não apenas fortalece habilidades matemáticas, mas também oferece insights tangíveis sobre o mundo geométrico ao nosso redor.

Em β fica determinado um polígono $\wp'$, congruente a $\wp$. Os dois polígonos são denominados bases e seus lados, arestas das bases.

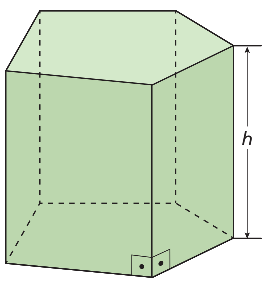
A distância entre as bases recebe o nome de altura do prisma e será igual a uma aresta lateral quando esta for perpendicular à base.



Classificação

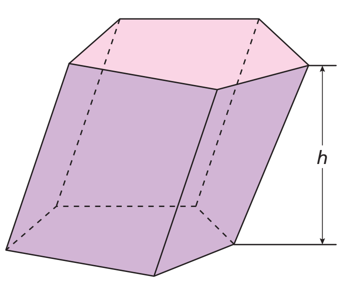
Além de ser especificado pelo polígono da base, um prisma pode ser classificado como:

– **reto:** quando as arestas laterais são perpendiculares às bases;



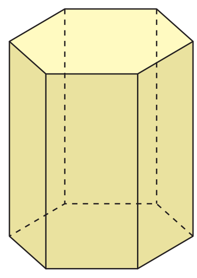
prisma reto pentagonal

– **oblíquo**: quando não é reto;



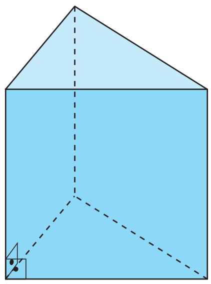
prisma oblíquo pentagonal

Um prisma é regular quando sua base é um polígono regular.

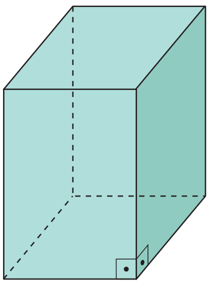


prisma reto hexagonal regular

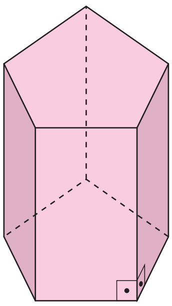
Nos prismas retos, as faces sempre são retângulos.



prisma reto triangular



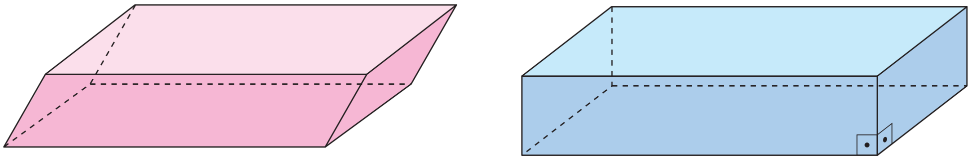
prisma reto quadrangular



prisma reto pentagonal

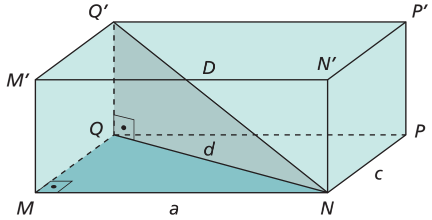
Paralelepípedos

Os prismas, cujas bases são paralelogramos, denominam-se **paralelepípedos**.



Todo paralelepípedo reto cuja base é um retângulo chama-se **paralelepípedo retângulo** ou **reto-retângulo.**

Podemos obter a diagonal D do paralelepípedo retângulo utilizando o teorema de Pitágoras.



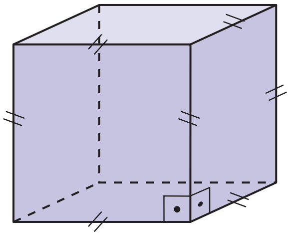
ΔMNQ retângulo $\Rightarrow d^2 = a^2 + c^2$

$\Delta Q'QN$ retângulo $\Rightarrow D^2 = d^2 + b^2 = (a^2 + c^2) + b^2$

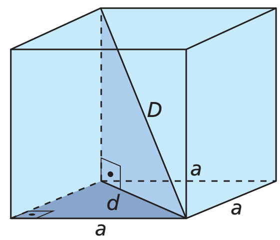
$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Cubo

Cubo é todo paralelepípedo retângulo com seis faces quadradas. Portanto, todas as arestas do cubo são congruentes.



Vamos determinar as diagonais do cubo de aresta a:



$$d^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow d^2 = 2a^2$$

$$D^2 = a^2 + d^2 \Rightarrow D^2 = 3a^2$$

– diagonal da face: $d = a\sqrt{2}$

– diagonal do cubo: $D = a\sqrt{3}$

Professor

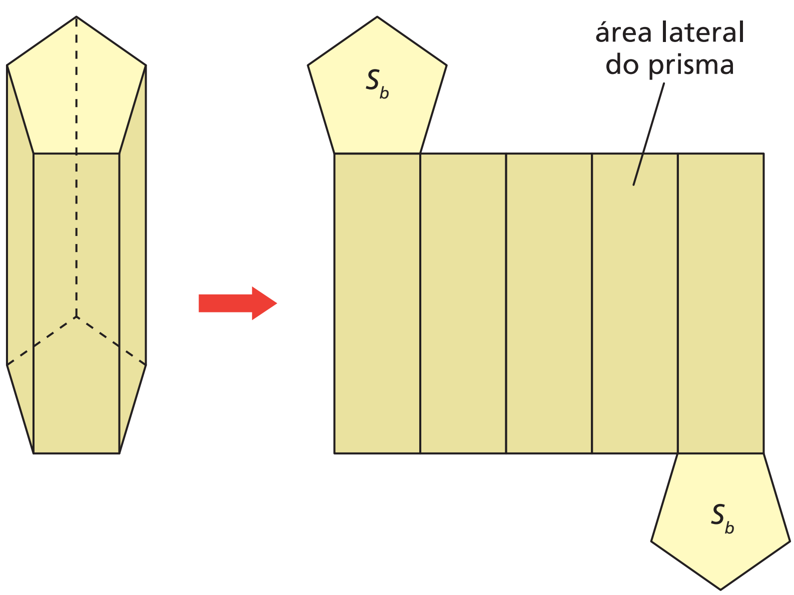
Ao desenvolver o tópico sobre áreas e volumes de prismas, é possível conectar os conceitos teóricos com aplicações práticas tangíveis. Comece destacando as partes essenciais dos prismas e sua presença em objetos comuns, como embalagens. Explique as fórmulas de área lateral, área total e volume, relacionando-as com cenários reais, como cálculos de material para embalagens ou construção. Mostre como os prismas são usados para calcular capacidades e espaços internos, relacionando esses cálculos a situações de armazenamento e preenchimento. Encoraje atividades práticas, como modelagem e otimização de embalagens, permitindo que os alunos explorem e apliquem os conceitos em contextos do mundo real, fortalecendo a compreensão da relevância desses cálculos geométricos.

Áreas e volume do prisma

Calcula-se a área lateral de um prisma somando as áreas das faces laterais. No caso de um prisma regular, a área lateral (S_ℓ) é dada por:

$S_\ell = n \cdot$ (área de um retângulo), em que n é o número de arestas da base.

Observe, por exemplo, a área lateral de um prisma pentagonal regular:

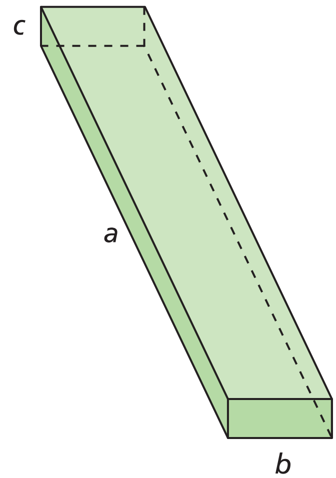


$S_\ell = 5 \cdot$ (área de um retângulo)

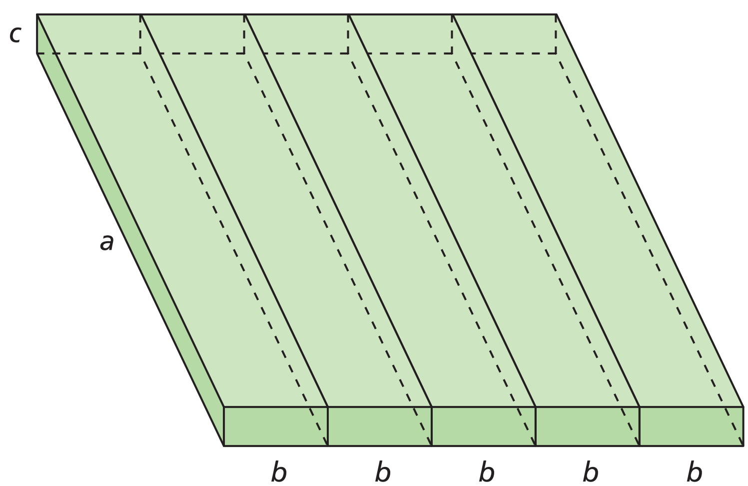
Calcula-se a área total de um prisma somando a área lateral (S_ℓ) com as áreas das bases (S_b).

$S_t = 2 \cdot S_b + S_\ell$

Antes de estabelecermos a fórmula para o cálculo do volume de um prisma, vamos determinar o volume de um paralelepípedo retângulo.



Para obter seu volume, devemos observar que ele é proporcional a cada uma de suas dimensões. Isso quer dizer que se mantivermos, por exemplo, constantes o comprimento *a* e a altura *c*, e se multiplicarmos a largura *b* por um número natural *n*, o volume ficará também multiplicado por *n*.



O volume total é 5 vezes maior que qualquer um dos paralelepípedos.

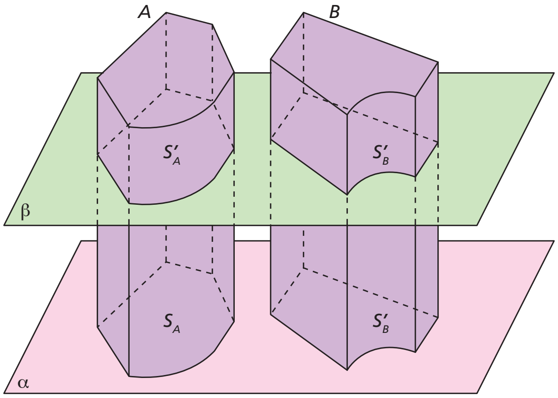
Esse fato pode ser generalizado para qualquer número real e isso quer dizer que, mantidas constantes duas dimensões de um paralelepípedo retângulo, seu volume é proporcional à terceira dimensão. Logo, sendo *a*, *b* e *c* as dimensões de um paralelepípedo retângulo, temos:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Como o produto *ab* é a área da base, é costume dizer que o volume de um paralelepípedo retângulo é o produto da área base pela altura.

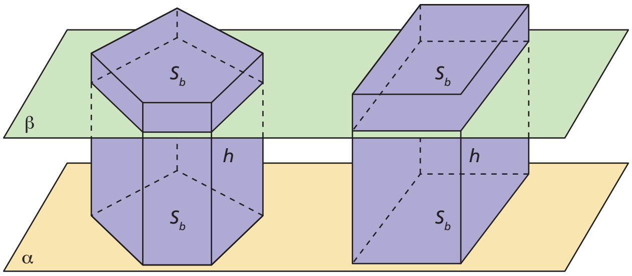
$$V = S_b \cdot h$$

Agora vamos enunciar um axioma que fundamenta o cálculo do volume de sólidos em geral. Trata-se do **Princípio de Cavalieri**: são dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm mesmo volume.



Para o cálculo do volume de um prisma qualquer, aplicamos o princípio de Cavalieri.

Dado um prisma qualquer, de área da base S_b e altura h, sempre é possível encontrar um paralelepípedo retângulo de área da base S_b e altura h.

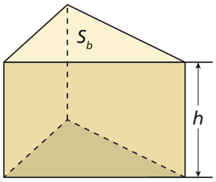


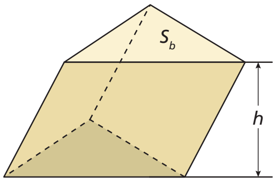
α // β e volume do paralelepípedo $= S_b \cdot h$

Como as secções determinadas no prisma e no paralelepípedo por um plano $\beta // \alpha$ têm a mesma área, os sólidos têm o mesmo volume. Logo, o volume do prisma é igual ao volume do paralelepípedo retângulo de mesma área da base S_b e mesma altura h.

$$V = S_b \cdot h$$

É importante salientar que o volume do prisma depende exclusivamente da área da base e da altura. Isso significa que um prisma reto e um oblíquo que tenham mesma base e mesma altura têm o mesmo volume.

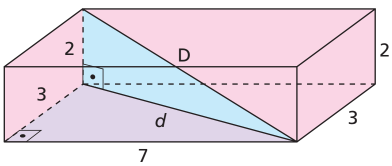




Atividades resolvidas

R13. Calcule a diagonal de um paralelepípedo retângulo de dimensões 2 cm, 3 cm e 7 cm.

Resolução



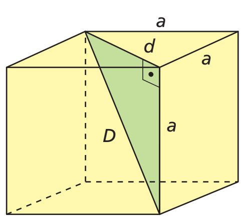
$D^2 = 2^2 + d^2$

Como $d^2 = 3^2 + 7^2$, temos:

$D^2 = 2^2 + 3^2 + 7^2 \Rightarrow D = \sqrt{62}$ cm

R14. Determine as diagonais de um cubo de aresta $a = 2$ m.

Resolução



$d^2 = 2a^2 \Rightarrow d^2 = 8$

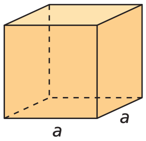
$d = 2\sqrt{2}$ m

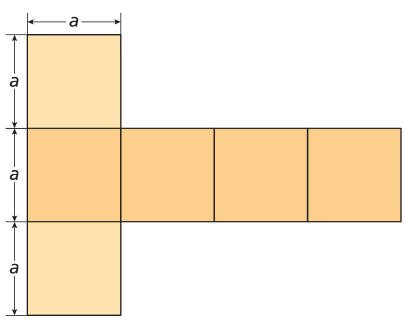
$D^2 = 3a^2 \Rightarrow D^2 = 12$

$D = 2\sqrt{3}$ m

R15. Determine a área lateral, a área da base, a área total e o volume de um cubo de aresta a.

Resolução





$$\left.\begin{aligned} S_\ell &= 4 \cdot a^2 \\ S_b &= a^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow S_t = 6a^2$$

$V = S_b \cdot h$

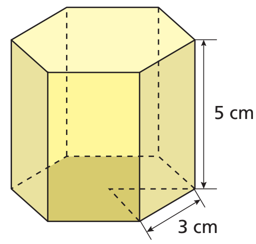
$V = a^2 \cdot a \Rightarrow V = a^3$

R16. Um prisma reto hexagonal regular tem 5 cm de altura e a aresta da base mede 3 cm. Determine:

a) a área da base;

b) o volume;

c) a área lateral.



Resolução

a) Área da base (hexágono regular):

$S_b = 6 \cdot$ (área do triângulo equilátero)

Área do triângulo equilátero $= \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$S_b = 6 \cdot \dfrac{3^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S_b = \dfrac{27\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^2$

b) Volume:

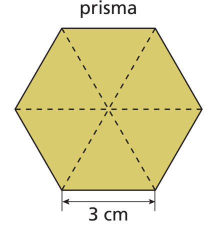
$V = S_b \cdot h \Rightarrow V = \dfrac{27\sqrt{3}}{2} \cdot 5$

$V = \dfrac{135\sqrt{3}}{2}\text{ cm}^3$

c) Área lateral:

$S_\ell = 6 \cdot$ (área de um retângulo)

$S_\ell = 6 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow S_\ell = 90\text{ cm}^2$



Atividades

19. Em um prisma triangular regular, a aresta da base e a altura medem 3 cm. Determine o volume e a área lateral desse prisma.

$S_\ell = 27 cm^2; V = \dfrac{27\sqrt{3}}{4} cm^3$

20. Calcule a diagonal de um paralelepípedo de dimensões 4 m, 6 m e 8 m.

$D = 2\sqrt{29}\, m$

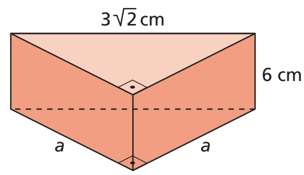
21. Qual o volume de ar contido em uma sala de 5 m de largura, 4 m de profundidade e pé-direito (altura) de 2,5 m?

$V = 50\text{ m}^3$

22. Quanto mede a aresta de um cubo de 27 m³?

a = 3 m

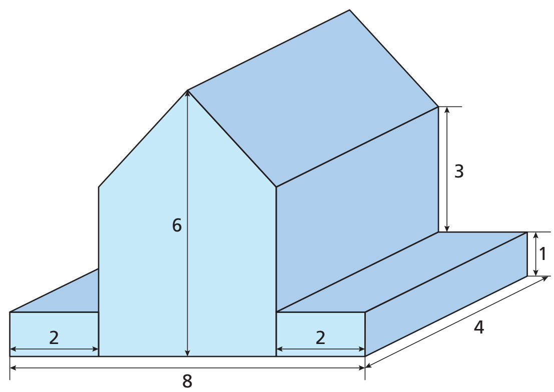
23. Em um prisma triangular reto, a base é um triângulo retângulo isósceles de hipotenusa igual a $3\sqrt{2}$ cm. Determine a área lateral, a área da base, a área total e o volume do prisma, sabendo que sua altura é 6 cm.



$S_\ell = \left(36 + 18\sqrt{2}\right)cm^2; S_b = \dfrac{9}{2}cm^2;$

$S_t = \left(45 + 18\sqrt{2}\right)cm^2; V = 27\,cm^3;$

24. Calcule o volume desse sólido. As medidas estão indicadas em metros.



$V_t = 96$ m³

25. Um prisma hexagonal regular tem 6 cm de altura e a aresta da base mede 4 cm. Determine:

a) a área da base;

$S_b = \sqrt{3}\,cm^2$

b) o volume;

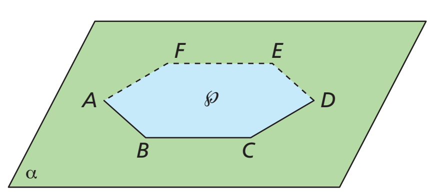
$V = \sqrt{3}\,cm^3$

c) a área lateral.

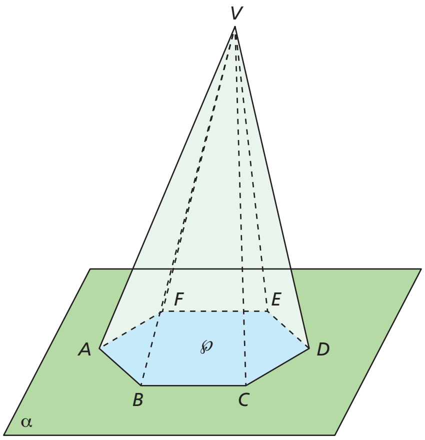
$S_\ell = 144$ cm²

Pirâmides

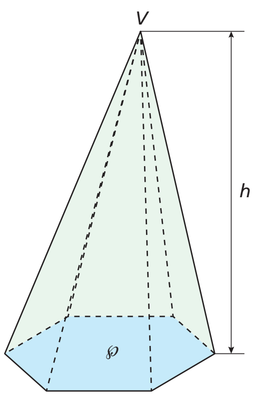
Considere um polígono $\wp$ contido em um plano α e um ponto V fora de α.



Chamamos de pirâmide o sólido determinado pela reunião de todos os segmentos com uma extremidade em V e outra no polígono $\wp$.



O polígono $\wp$ é a base da pirâmide. Note que as faces de uma pirâmide são triângulos e que a distância de V a $\wp$ é a altura h da pirâmide.

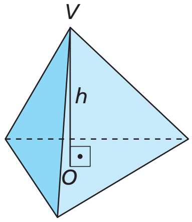


Professor

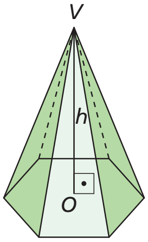
Ao abordar o tópico, recomendamos começar com uma introdução clara sobre a definição de pirâmides e suas características fundamentais, como base, altura e vértice. Utilize exemplos concretos para ilustrar a presença de pirâmides em nossa vida cotidiana, como pirâmides alimentares ou estruturas arquitetônicas. Explore a fórmula para calcular a área da base e a área lateral de uma pirâmide, relacionando-as a situações práticas, como calcular a quantidade de revestimento necessário para cobrir uma estrutura em formato de pirâmide. Introduza o cálculo do volume da pirâmide, demonstrando como essa fórmula é derivada a partir da base e da altura. Incentive os alunos a resolverem problemas do mundo real, como determinar a capacidade de armazenamento de um reservatório com formato de pirâmide. Aplique atividades práticas, como a construção de modelos físicos de pirâmides e a manipulação de suas dimensões para observar as mudanças nas áreas e volumes. Essa abordagem permitirá que os alunos compreendam e apliquem de maneira significativa os cálculos geométricos relacionados às áreas e volumes de pirâmides.

Classificação

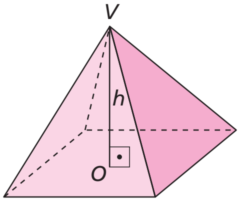
As pirâmides são também classificadas quanto ao número de lados da base. Uma pirâmide é reta quando as arestas laterais forem congruentes e é regular quando sua base é um polígono regular, e a projeção do vértice V sobre o plano da base coincide com o centro da base.



pirâmide regular triangular



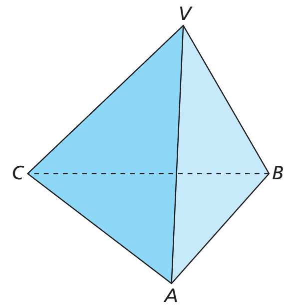
pirâmide regular hexagonal



pirâmide regular quadrangular

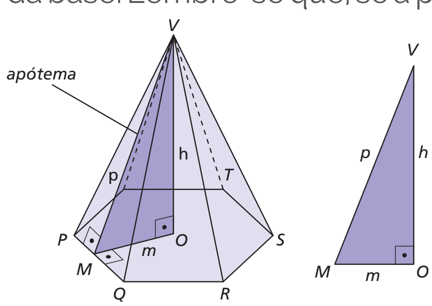
Tetraedro

Tetraedro é toda pirâmide de base triangular. Se as quatro faces forem congruentes, teremos um tetraedro regular. No tetraedro regular, cada face é um triângulo equilátero.



Apótema da pirâmide regular

Apótema de uma pirâmide regular é a altura de uma face lateral em relação à aresta da base. Lembre-se que, se a pirâmide é regular, cada face lateral é um triângulo isósceles.



p: apótema da pirâmide

m: apótema da base

h: altura

M: ponto médio de $\overline{PQ}$

O: centro da base

A partir do triângulo retângulo MOV, podemos obter uma importante relação entre o apótema da pirâmide, o apótema da base e a altura da pirâmide.

$p^2 = m^2 + h^2$

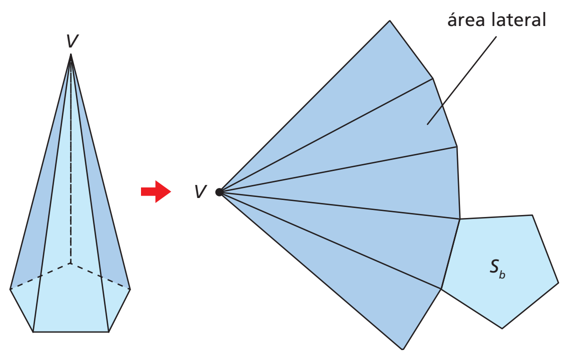
Áreas e volume da pirâmide

A área lateral de uma pirâmide é a soma das áreas das faces laterais. Se a pirâmide for reta e regular e sua base um polígono de n lados, a área lateral será dada por:

$S_\ell = n \cdot$ (área de um triângulo)

Observe, por exemplo, a área lateral de uma pirâmide pentagonal:

$S_\ell = 5 \cdot$ (área de um triângulo)



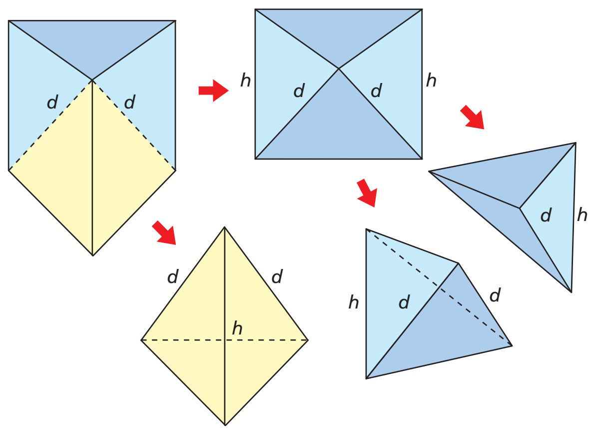
A área total será dada por:

$$S_t = S_b + S_\ell$$

O volume de uma pirâmide é a terça parte do volume de um prisma regular de mesma base e mesma altura:

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h$$

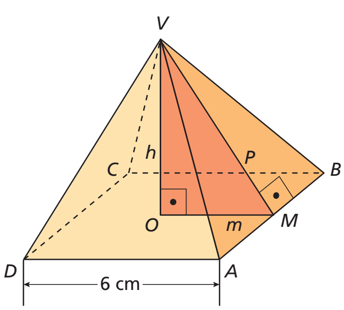
Observe na figura como o prisma triangular pode ser decomposto em três pirâmides de mesma base. Tome como referência os segmentos de comprimento *d* traçados em duas faces do prisma.



Atividades resolvidas

R17. Uma pirâmide quadrangular regular tem 4 m de altura e a aresta da base mede 6 m. Calcule seu volume e as áreas.

Resolução



$m = \frac{AD}{2} \Rightarrow m = 3\text{ m}$

ΔVOM é retângulo $\Rightarrow$

$\Rightarrow p^2 = h^2 + m^2 \Rightarrow p^2 = 4^2 + 3^2$

$p = 5\text{ m}$

Volume da pirâmide:

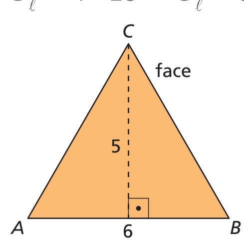
$V = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 4 \Rightarrow V = 48\text{ m}^3$

Área de cada face:

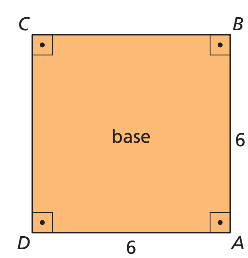
$S_f = \frac{6 \cdot 5}{2} \Rightarrow S_f = 15\text{ m}^2$

Área lateral:

$S_\ell = 4 \cdot 15 \Rightarrow S_\ell = 60\text{ m}^2$



Área da base:



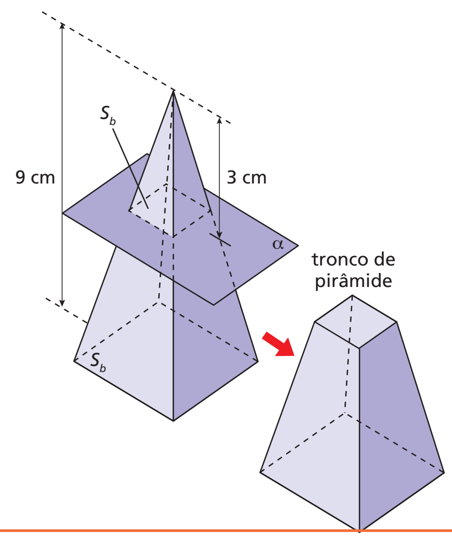
$S_b = 36\text{ m}^2$

Área total:

$S_t = S_\ell + S_b$

$S_t = 96\text{ m}^2$

R18. Uma pirâmide quadrangular tem 9 cm de altura, e a área da base é igual a 180 cm². Um plano α, paralelo à base, secciona a pirâmide a 3 cm do vértice, originando uma nova pirâmide cuja base tem 20 cm². Qual o volume do tronco de pirâmide obtido?



Resolução

$V_T = V_p - V'_p$

$V_T = \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h - \frac{1}{3} \cdot S_b \cdot h'$

$V_T = \frac{180 \cdot 9}{3} - \frac{20 \cdot 3}{3}$

$V_T = 520 \text{ cm}^3$

Atividades

26. Determine a área total e o volume de um tetraedro regular cuja aresta mede 2 m.

$S_t = \sqrt{3}\ \text{m}^2; V = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{m}^3$

27. Uma pirâmide regular triangular tem 5 cm de altura e o apótema da base mede 4 cm. Calcule o volume da pirâmide.

$V = 80\sqrt{3}\,\text{cm}^3$

28. Uma pirâmide regular hexagonal tem 4 cm de altura e a aresta da base mede 2 cm. Determine:

a) a área da base;

$S_b = 6 \cdot 6\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

b) a área lateral;

$S_\ell = 6\sqrt{19}\,cm^2$

c) o volume.

$V = 8\sqrt{3}\,cm^3$

29. Considere uma pirâmide quadrangular regular inscrita em um cubo de 2 cm de aresta. Pede-se:

a) a área lateral da pirâmide;

$S_\ell = 4\sqrt{5}\,cm^2$

b) a área total da pirâmide;

$S_t = (4\sqrt{5} + 4)cm^2$

c) o volume da pirâmide;

$V = \frac{8}{3}cm^3$

d) a razão entre os volumes da pirâmide e do cubo;

$\frac{V}{V_c} = \frac{1}{3}$

e) a razão entre as áreas totais da pirâmide e do cubo.

$\frac{\sqrt{5} + 1}{6}$

30. Um prisma de base pentagonal tem 360 m³ de volume. Qual o volume de uma pirâmide com mesma base e mesma altura?

$V = 120\ m^3$

31. Um prisma de base hexagonal tem 420 m³ de volume. Qual o volume de uma pirâmide de mesma base e de altura igual à metade da altura do prisma?

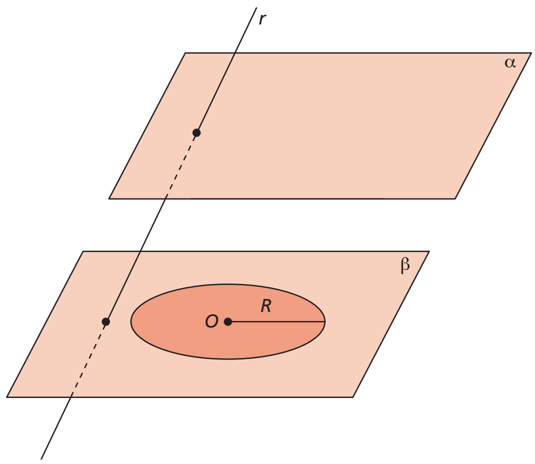
$V = 70\ m^3$

32. Uma pirâmide hexagonal tem $9\sqrt{3}$ cm de altura, e a área da base é igual a 120 cm². Um plano α, paralelo à base, secciona a pirâmide a $2\sqrt{3}$ cm do vértice, originando uma nova pirâmide cuja base tem 18 cm². Qual o volume do tronco de pirâmide obtido?

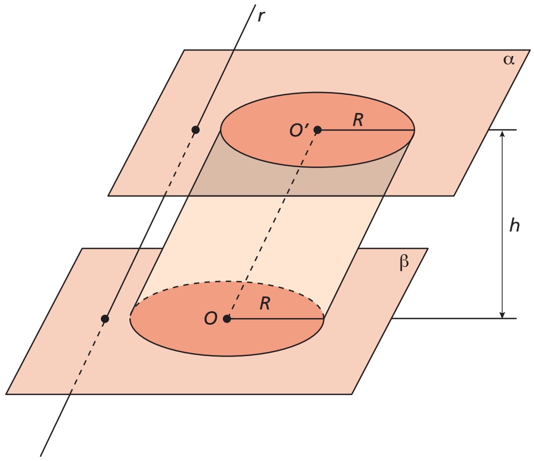
$V_T = \sqrt{3}\ cm^3$

Cilindros

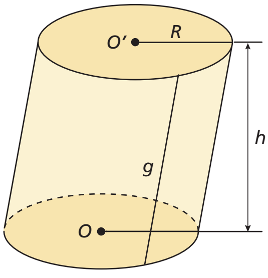
Considere dois planos, α e β, paralelos, um círculo de centro O e raio R contido em um deles, e uma reta r concorrente com os dois.



Chamamos de cilindro o sólido determinado pela reunião de todos os segmentos paralelos a r, com extremidades no círculo e no outro plano.



Qualquer segmento paralelo a r, com extremidades nas duas circunferências, é chamado geratriz do cilindro, e o segmento com extremidades nos centros O e O' dos círculos é denominado eixo do cilindro. A distância entre os planos α e β é a altura h do cilindro.



Professor

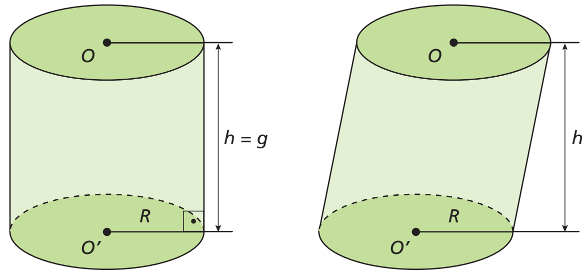
Ao abordar o tópico de cilindros, é benéfico enfatizar sua definição e características, como bases circulares e altura, utilizando exemplos concretos, como latas e rolos de papel. Relacione as fórmulas de área lateral, área total e volume com aplicações práticas, como cálculos de materiais para fabricação de objetos cilíndricos e capacidade de armazenamento.

Professor

Destaque também o uso de cilindros em áreas como Engenharia e Arquitetura, explicando como são aplicados em estruturas como tubulações e reservatórios. Incorporar atividades práticas, desafios de otimização e modelos físicos enriquecerá a compreensão dos alunos sobre cilindros e sua relevância no mundo real.

Classificação

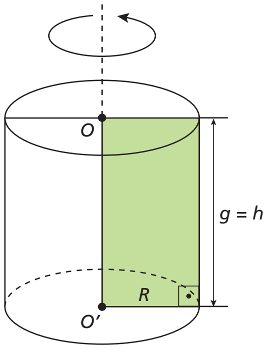
Um cilindro é classificado segundo o ângulo formado pela geratriz com os planos das bases:



– reto: geratriz perpendicular às bases e igual à altura;

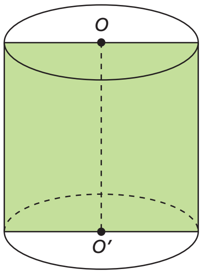
– oblíquo: todo cilindro que não é reto.

O cilindro reto é também chamado de **cilindro de revolução**, pois pode ser obtido pela rotação de um retângulo em torno de um de seus lados.

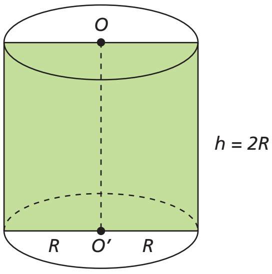


Secção meridiana do cilindro

Chamamos de secção meridiana do cilindro à intersecção do cilindro com um plano que contém seu eixo:



Quando a altura de um cilindro reto é igual a $2R$, a secção meridiana é um quadrado de lado $2R$, e este cilindro é denominado **cilindro equilátero.**

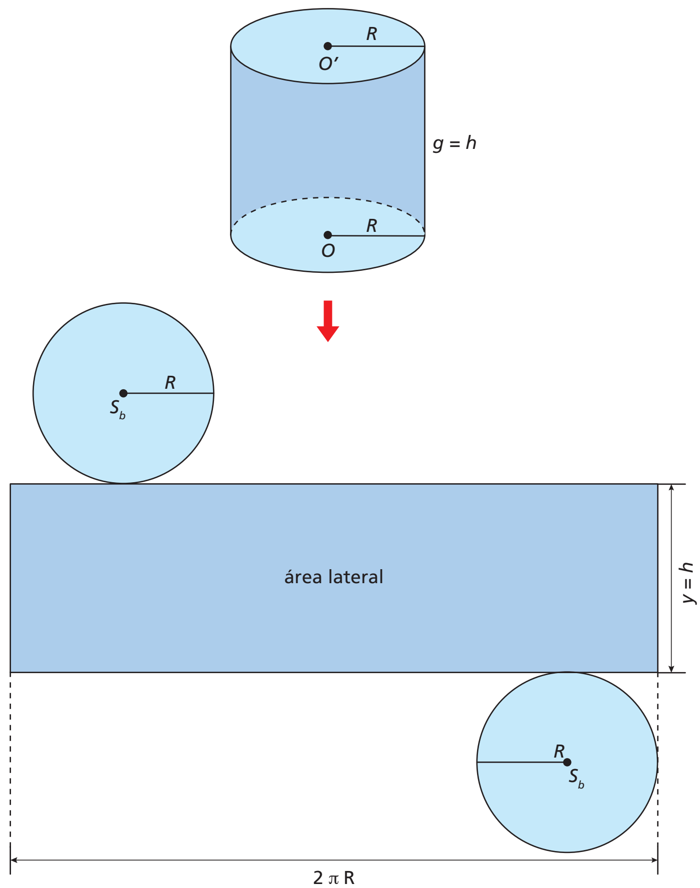


Áreas e volume do cilindro reto

A área de cada base do cilindro reto depende do raio R e é dada por:

$S_b = \pi R^2$

Vamos calcular a área lateral:



$S_\ell = 2\pi Rh$ ou $S_\ell = 2\pi Rg$

A área total será:

$S_t = S_\ell + 2S_b$

Como $S_b = \pi R^2$ e $S_\ell = 2\pi Rg$,

$S_t = 2\pi Rg + 2\pi R^2$

O princípio de Cavalieri também nos permite concluir que o volume do cilindro reto é dado pelo produto da área da base pela altura ou pela geratriz:

$V = \pi R^2 \cdot h$ ou $V = \pi R^2 \cdot g$

Atividades resolvidas

R19. Em um cilindro reto de 6 m de altura, o raio da base mede 3 m. Determine sua área lateral e seu volume.

Professor
Comentário na página 178.

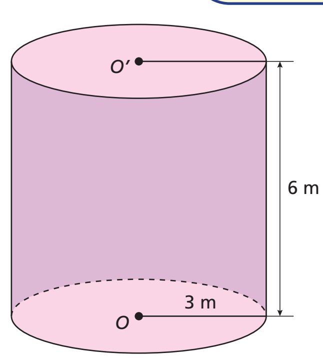
Resolução

$S_\ell = 2\pi\, R \cdot h \Rightarrow S_\ell = 2\pi \cdot 3 \cdot 6 \Rightarrow S_\ell = 36\pi$ m²

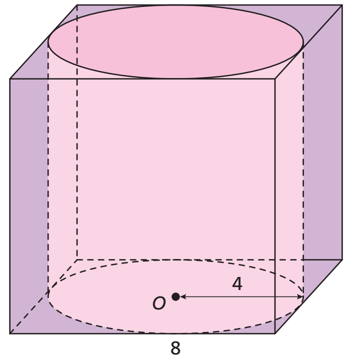
$S_b = \pi R^2 \Rightarrow S_b = \pi \cdot 3^2 \Rightarrow S_b = 9\pi$ m²

Logo, o volume será:

$V = S_b \cdot h \Rightarrow V = 9\pi \cdot 6 \Rightarrow V = 54\pi$ m³



R20. Qual o volume de um cilindro reto inscrito em um cubo de 8 cm de aresta?



Resolução

$V = \pi R^2 \cdot h$

$V = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 \Rightarrow V = 128\pi \text{ cm}^3$

Atividades

33. Calcule o volume e a área lateral de um cilindro equilátero, sabendo que o raio da base mede 2 m.

$S_\ell = 16\pi \text{ m}^2$; $V = 16\pi \text{ m}^3$

34. Em um cilindro reto, o raio da base mede 5 m e a geratriz, 2 m. Determine:

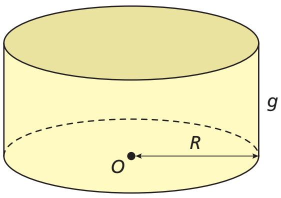
a) sua área lateral.

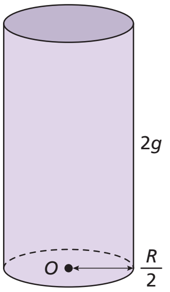
$S_\ell = 20\pi \text{ m}^2$

b) seu volume.

$V = 50\pi \text{ m}^3$

35. Encontre a relação entre os volumes destes dois cilindros:





$V_1 = 2V_2$

Professor

Comente que as aplicações das fórmulas de áreas e volume do cilindro reto são variadas e encontram relevância em diversos campos. Em Engenharia, essas fórmulas são usadas para projetar e dimensionar objetos cilíndricos, como tubulações, tanques de armazenamento e colunas de suporte. Na Arquitetura, a compreensão das áreas e volume do cilindro é essencial ao projetar estruturas cilíndricas, como pilares ou torres. Além disso, nas indústrias de embalagens e fabricação, o cálculo das áreas de superfície é crucial para determinar a quantidade de material necessário para revestir ou fabricar objetos cilíndricos, enquanto o volume é essencial para calcular capacidades de armazenamento. Em campos como Física e Engenharia de Fluidos, esses cálculos são usados em contextos como a determinação de vazão em tubulações cilíndricas. Portanto, as fórmulas de áreas e volume do cilindro reto têm uma ampla gama de aplicações práticas que abrangem desde a construção e arquitetura até as indústrias e a ciência.

36. Um cilindro reto tem volume V. Dobrando o raio da base e dividindo a geratriz por 2, obteremos um novo cilindro reto. Qual é o volume desse novo cilindro?

$V = 2\pi R^2 g$

37. Um cilindro reto de 7 cm de altura tem 63π cm³ de volume. Calcule o raio da base.

$R = 3$ cm

38. Qual o volume de um cilindro reto inscrito em um cubo de 12 cm de aresta?

$V = 432\pi\ cm^3$

39. Determine o volume de um cilindro reto inscrito em um cubo de 96 m³ de volume.

$V = 24\pi\ m^3$

40. Qual o volume de um cilindro reto cuja geratriz é igual ao raio da base?

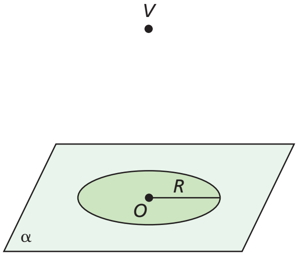
$V = \pi R^3$

41. Determine o volume de um cilindro inscrito em um cubo cuja área total é 150 cm².

$V = \dfrac{125\pi}{4} cm^3$

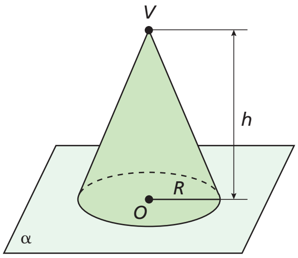
Cones

Considere um plano α, um círculo de centro O e raio R contido em α, e um ponto V fora dele.



Chamamos de cone circular o sólido determinado pela reunião de todos os segmentos com uma extremidade em V e outra no círculo.

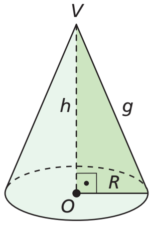
Todo segmento que passa por V e tem extremidade na circunferência da base é denominado geratriz do cone, e o segmento que une o vértice V ao centro O da base é chamado eixo do cone. A distância de V ao plano α é a altura h do cone.



Classificação

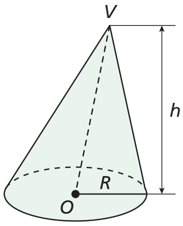
Um cone é classificado segundo a inclinação do eixo VO:

– **reto:** quando o eixo VO é perpendicular à base;

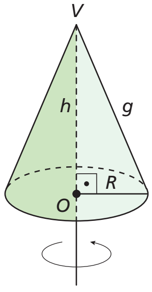


$$g^2 = h^2 + R^2$$

– **oblíquo:** quando não é reto.

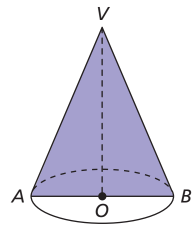


Todo cone reto pode ser obtido pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos. Por isso o cone reto também é chamado de **cone de revolução**.

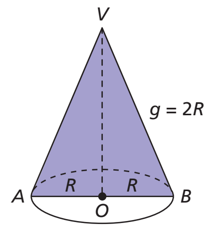


Secção meridiana do cone

Chamamos de secção meridiana do cone à intersecção do cone com um plano que contém seu eixo:

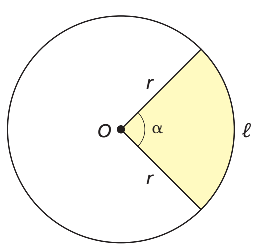


Quando a geratriz de um cone reto é igual a $2R$, a secção meridiana é um triângulo de lado $2R$, e esse cone é denominado **cone equilátero.**



Áreas e volume do cone reto

A área lateral de um cone reto é calculada a partir da área de um setor circular. Vamos, portanto, determinar inicialmente a área S_{se} de um setor circular determinado por um ângulo central α num círculo de raio r.



Para isso, estabelecemos uma regra de três simples, em que r é o raio da circunferência e ℓ o comprimento do arco correspondente ao ângulo α:

comprimento área

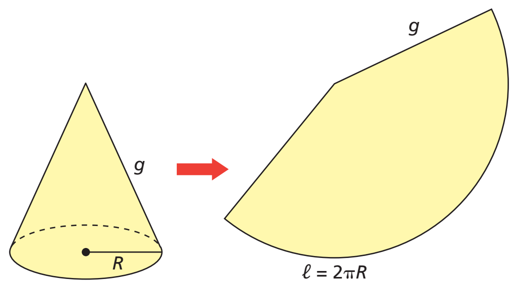
$2\pi r$ ———————— πr^2

ℓ ———————— S_{se}

A partir dessa proporcionalidade, temos:

$$S_{se} = \frac{\ell r}{2}$$

Quando planificamos a superfície lateral de um cone, obtemos um setor circular:



Chamando de R o raio da base e de g a geratriz do cone, temos:

$$S_\ell = \frac{\ell \cdot r}{2} \Rightarrow S_\ell = \frac{2 \cdot R \cdot g}{2}$$

$$S_\ell = \pi R g$$

Como a área da base é $S_b = \pi R^2$, a área total será:

$$S_T = \pi R^2 + \pi R g$$

O princípio de Cavalieri garante que o volume do cone corresponde à terça parte do volume de um cilindro com a mesma altura e com o mesmo raio da base:

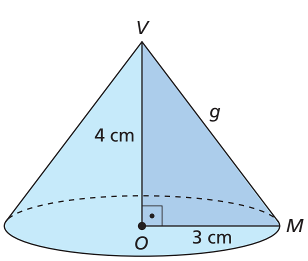
$$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h \text{ ou } V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h$$

Note que a relação entre o volume do cone e o do cilindro é a mesma estabelecida para a pirâmide e o prisma.

Atividades resolvidas

R21. Um cone reto tem 4 cm de altura e o raio da base mede 3 cm. Determine a área lateral e o volume.

Resolução



ΔVOM retângulo

$g^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow g^2 = 25 \Rightarrow g = 5$ cm

Área lateral:

$S_\ell = \pi R \cdot g \Rightarrow S_\ell = \pi \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow S_\ell = 15\pi$ cm^2

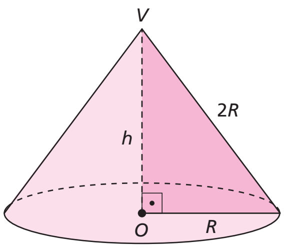
Volume:

$S_b = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$

$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 9\pi \cdot 4 \Rightarrow V = 12\pi$ cm^3

R22. Determine o volume e a área lateral de um cone equilátero.

Resolução



O cone equilátero tem como geratriz o diâmetro da base. Logo:

$4R^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow h^2 = 3R^2 \Rightarrow h = R\sqrt{3}$

$$\left.\begin{array}{l} S_b = \pi R^2 \\ h = R\sqrt{3} \end{array}\right\} \Rightarrow V = \frac{\pi R^2 \cdot R \cdot \sqrt{3}}{3} \Rightarrow V = \frac{\pi\sqrt{3}R^3}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_\ell = \pi R \cdot g \\ g = 2R \end{array}\right\} \Rightarrow S_\ell = 2\pi R^2$$

Atividades

42. Calcule a área lateral e o volume de um cone equilátero, sabendo que o raio da base mede 5 m.

$S_\ell = 50\pi\,\text{m}^2; V = \frac{125\sqrt{3}\pi}{3}\text{m}^3$

43. Em um cone reto, o raio da base e a altura medem, respectivamente, 5 cm e 12 cm. Determine:

a) sua área lateral.

$S_\ell = 65\pi$ cm^2

b) sua área total.

$S_t = 90\pi$ cm^2

c) seu volume.

$V = 100\pi$ cm^3

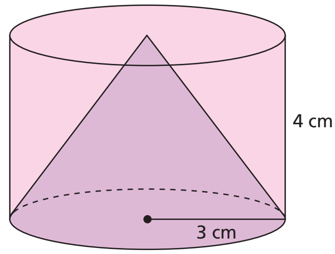
44. A base de um cone reto está inscrita em um quadrado de 6 m de lado. Sabendo que a geratriz do cone mede 5 m, calcule o volume e a área lateral do cone.

$V = 12\pi$ m^3; $S_\ell = 15\pi$ m^2

45. Qual a geratriz de um cone equilátero cujo volume é igual a $\pi\sqrt{3}$ cm³?

$g = 2\sqrt[3]{3}$ cm

46. Qual o volume de um cone circular reto inscrito em um cilindro de 4 m de altura e raio da base igual a 3 m?



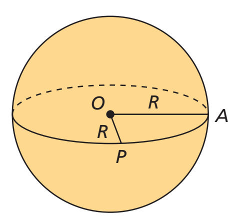
$V = 12\pi$ m³

47. Um plano α seciona um cone reto a 4 cm do vértice. Sabendo que a altura do cone é de 16 cm e que o raio da base mede 4 cm, calcule o volume do tronco de cone assim gerado.

$V_T = 84\pi$ cm³

Esfera

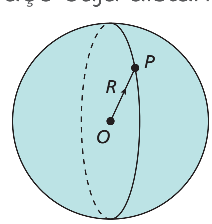
Superfície esférica de centro *O* é o conjunto de pontos do espaço cuja distância a *O* é igual a *R*.



superfície esférica

$$d_{O,\,P} = R$$

Esfera é o conjunto de pontos do espaço cuja distância a *O* é igual ou menor que o raio *R*.



esfera

$$d_{O,\,P} \leq R$$

Área da superfície esférica e volume da esfera

Professor
Comentário na página 186.

A área da superfície esférica de raio R é dada por:

$$S_e = 4\pi R^2$$

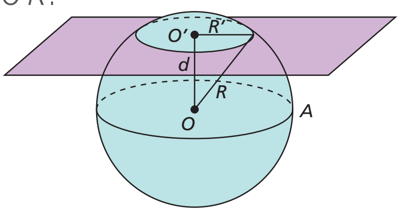
O volume da esfera de raio R também é obtido como aplicação do princípio de Cavalieri e é dado por:

$$V_e = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3$$

Secção de uma esfera

OO' é a distância do plano α ao centro da esfera.

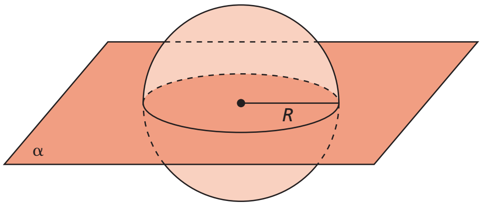
Qualquer plano α que secciona uma esfera de raio R determina como secção plana um círculo de raio R'.



Sendo $OO' = d$, temos:

$R^2 = d^2 + (R')^2$

Quando o plano que secciona a esfera contiver um diâmetro, teremos $d = 0$. Nesse caso, o círculo determinado terá raio R e será denominado círculo máximo.

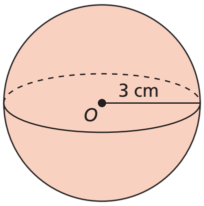


círculo máximo

Atividades resolvidas

R23. Calcule a área da superfície esférica e o volume de uma esfera de 3 cm de raio.

Resolução

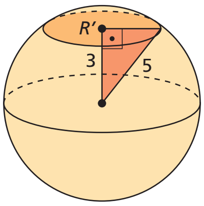


$S_e = 4\pi R^2 \Rightarrow S_e = 36\pi \text{ cm}^2$

$V_e = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V_e = 36\pi \text{ cm}^3$

R24. Uma esfera de 5 cm de raio é seccionada a 3 cm do centro. Determine a área da secção plana obtida.

Resolução



$R^2 = d^2 + (R')^2$

$5^2 = 3^2 + (R')^2 \Rightarrow R' = 4$ cm

Logo: $S' = \pi \cdot 4^2 \Rightarrow S' = 16\pi$ cm^2

Atividades

48. Calcule a área da superfície e o volume da esfera de 2 m de raio.

$V_e = \frac{32}{3} m^3, S_\ell = 16\pi\, m^2$

49. Uma esfera de 8 cm de raio é seccionada a 5 cm do centro. Determine a área da secção plana obtida.

$S' = 39\pi$ cm^2

50. Determine a área da superfície e o volume de uma esfera cuja área de secção de círculo máximo é igual a 16π cm².

$S_e = 64\pi\, cm^2; V_e = \frac{256\pi}{3} cm^3$

51. Determine o volume de uma esfera inscrita em um cubo de 6 cm de aresta.

$V_e = 36\pi$ cm^3

52. Calcule o volume de uma esfera circunscrita a um cubo de 4 cm de aresta.

$V_e = 32\sqrt{3}$ cm^3

53. Qual o volume de uma esfera de superfície esférica igual a 144π cm²?

$V_e = 288\pi$ cm^3

Professor

Ao abordar este tópico, enfatize a relevância das esferas em nosso mundo. Explique a fórmula da área da superfície esférica, ressaltando o papel do raio e o conceito de área total. Relacione essa fórmula a situações práticas, como o revestimento de esferas em projetos arquitetônicos. Em seguida, aborde a fórmula do volume da esfera, discutindo como ela é derivada a partir do raio. Relacione o volume da esfera a cenários como esferas de armazenamento ou esferas de contenção em engenharia. Incentive atividades práticas, como calcular áreas e volumes para objetos esféricos do cotidiano. Ao adotar essa abordagem, você permitirá que os alunos compreendam a aplicação desses cálculos em situações reais e percebam a importância da geometria esférica em diversas áreas da vida.

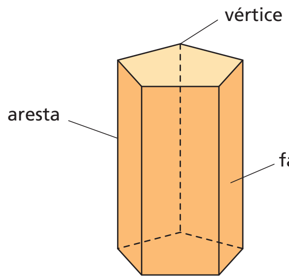
Poliedros

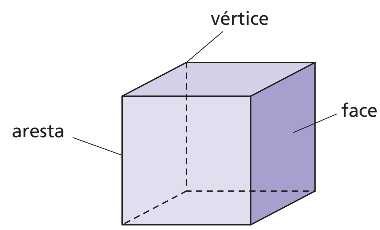
Poliedro é a reunião de um número finito de polígonos planos, chamados faces, em que:

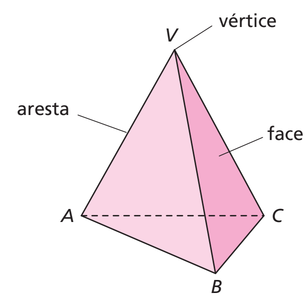
– cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.

– a intersecção de duas faces quaisquer ou é um lado comum, um vértice ou é vazia.

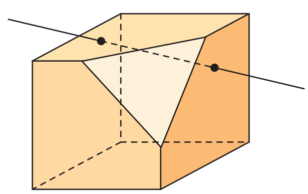
Os elementos principais de um poliedro são:



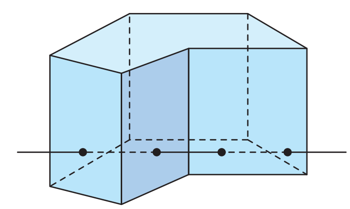




Dizemos que um **poliedro é convexo** se qualquer reta (não paralela a nenhuma de suas faces) o corta em, no máximo, dois pontos. Caso contrário, dizemos que o poliedro é não convexo, mas estes não serão objeto de estudo.

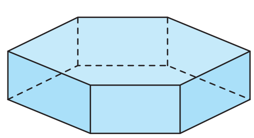


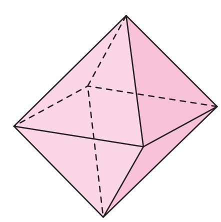
poliedro convexo

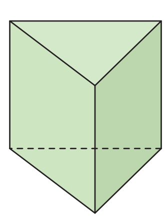


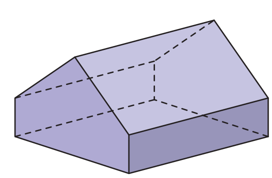
poliedro não convexo

Veja alguns exemplos de poliedros convexos:









Os poliedros convexos recebem denominações de acordo com seu número de faces, como, por exemplo:

– tetraedro tem 4 faces

– hexaedro tem 6 faces

– octaedro tem 8 faces

– dodecaedro tem 12 faces

– icosaedro tem 20 faces

Relação de Euler

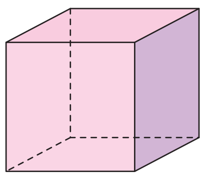
A relação de Euler estabelece que para todo poliedro convexo com A arestas, V vértices e F faces, vale a relação:

$$V - A + F = 2$$

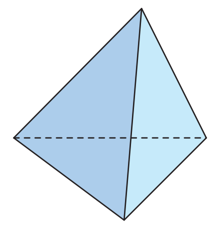
Poliedros regulares

Um poliedro convexo é denominado **poliedro regular** quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

O cubo e o tetraedro a seguir são poliedros regulares, pois atendem a essas características.

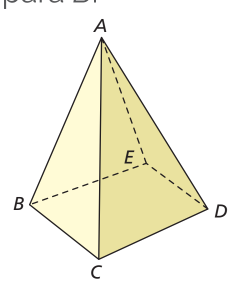


cubo



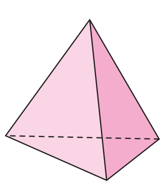
tetraedro

Já a pirâmide quadrangular a seguir não é poliedro regular porque as faces não têm o mesmo número de arestas, e o número de arestas que converge para o vértice A é diferente do número que converge para B.

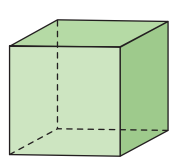


pirâmide quadrangular

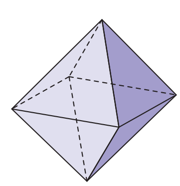
Existem somente cinco classes de poliedros regulares:



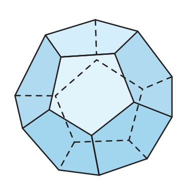
tetraedro



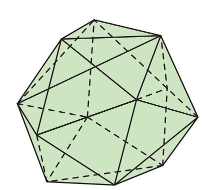
hexaedro



dodecaedro



icosaedro

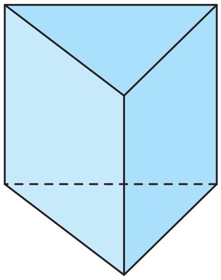


octaedro

Nome	F	V	A
tetraedro	4	4	6
hexaedro	6	8	12
octaedro	8	6	12
dodecaedro	12	20	30
icosaedro	20	12	30

Atividades resolvidas

R25. Verifique a relação de Euler para um prisma triangular.



Resolução

$V = 6$; $A = 9$; $F = 5$

Substituindo na relação de Euler, temos:

$V - A + F = 6 - 9 + 5$

$V - A + F = 2$

R26. Qual o número de arestas e o número de vértices de um poliedro com 6 faces quadrangulares e 4 faces triangulares?

Resolução

Vamos inicialmente determinar o número de arestas:

6 faces quadrangulares têm 24 arestas;

4 faces triangulares têm 12 arestas.

No total, teríamos 24+12 = 36 arestas. No entanto, cada aresta é contada duas vezes pois sempre é comum a duas faces. Logo, o número de arestas será $A = 18$.

Para determinar o número de vértices, utilizamos a relação de Euler:

$A = 18$

$F = 10$ (6 faces quadrangulares + 4 faces triangulares)

$V - A + F = 2 \Rightarrow V = 18 - 10 + 2$

$V = 10$

Atividades

54. Em um poliedro convexo, o número de vértices é 8 e o número de arestas é 12. Determine o número de faces.

6

55. Calcule o número de vértices de um poliedro convexo que tem 8 faces triangulares.

6

56. Um poliedro convexo tem 8 faces quadrangulares e 2 hexagonais. Calcule o número de vértices.

14

57. Calcule a soma dos ângulos das faces de um hexaedro regular. Lembre que a soma dos ângulos internos de um polígono é dada por $S_i = (n - 2)\ 180°$.

2.160°

58. Calcule a soma dos ângulos das faces de um octaedro regular.

1.440°

59. Calcule a soma dos ângulos das faces dos seguintes poliedros regulares:

a) tetraedro.

720°

b) dodecaedro.

6.480°

c) icosaedro.

3.600°

Resumo

Postulados de existência

1. Existem ponto, reta e plano.
2. Em uma reta, bem como fora dela, existem infinitos pontos.
3. Em um plano, bem como fora dele, existem infinitos pontos.

Postulados de determinação

4. Dois pontos distintos determinam uma reta.
5. Três pontos não colineares determinam um único plano.

Postulado de inclusão

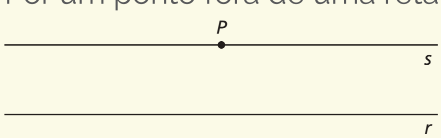
6. Uma reta que possui dois pontos distintos em um plano está contida nesse plano.

Postulados de divisão

7. Um ponto qualquer de uma reta divide-a em duas partes.
8. Uma reta qualquer de um plano divide-o em dois semiplanos.
9. Um plano qualquer divide o espaço em dois semiespaços.

Postulado de Euclides

Por um ponto fora de uma reta existe uma única reta paralela a esta reta.



Posições relativas de duas retas

Retas coplanares

$$\begin{cases}\text{Concorrentes}\begin{cases}\text{perpendiculares}\\ \text{obliquas}\end{cases}\\ \text{Paralelas}\begin{cases}\text{distintas}\\ \text{coincidentes}\end{cases}\end{cases}$$

$$\text{Retas reversas}\begin{cases}\text{ortogonais}\\ \text{não ortogonais}\end{cases}$$

Professor

Encoraje os alunos a revisitarem o resumo sempre que precisarem, incentivando-os a anotar outros conceitos que considerem relevantes para um melhor entendimento. Além disso, sugira que utilizem o resumo como um auxílio durante a resolução da bateria final de atividades que virá a seguir. Isso permitirá que os estudantes apliquem de forma prática o conteúdo revisado e fortaleçam sua compreensão, ao mesmo tempo em que se tornam mais autônomos na gestão do próprio aprendizado. Dessa maneira, você estará proporcionando uma ferramenta valiosa que promove a retenção de conhecimento e a habilidade de aplicação em situações desafiadoras.

Posições relativas de reta e plano

Reta r e plano α

$$\begin{cases} r \text{ contida no plano } \alpha \Leftrightarrow r \cap \alpha = r \\ r \text{ concorrente ao plano } \alpha \Leftrightarrow r \cap \alpha = \{P\} \\ r \text{ paralela ao plano } \alpha \Leftrightarrow r \cap \alpha = \varnothing \end{cases}$$

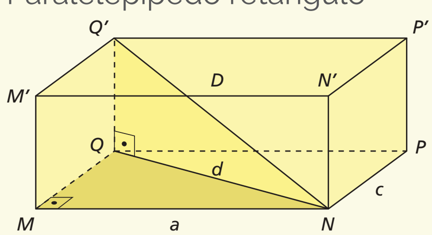
Posições relativas de dois planos

Planos α e β

$$\begin{cases} \alpha \text{ e } \beta \text{ coincidentes} \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \alpha = \beta \\ \alpha \text{ e } \beta \text{ concorrentes} \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = r \\ \alpha \text{ e } \beta \text{ paralelos distintos} \Leftrightarrow \alpha \cap \beta = \varnothing \end{cases}$$

Prismas

Paralelepípedo retângulo



$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

$S_t = 2 \cdot S_b + S_\ell$

$V = a \cdot\cdot\, b \cdot \cdot c$

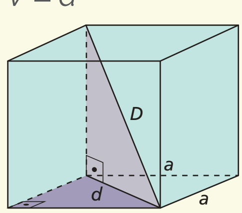
Cubo

$d = a\sqrt{2}$

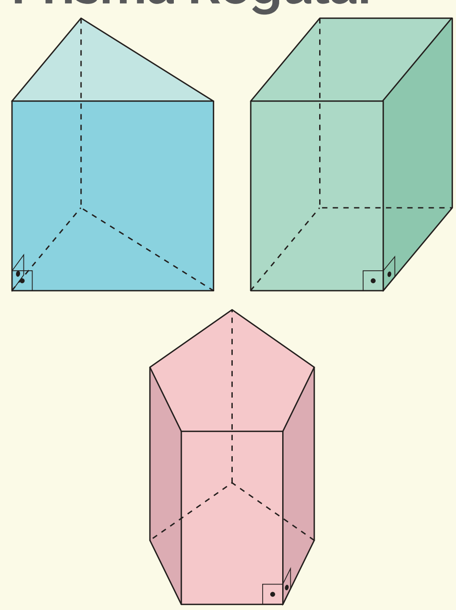
$D = a\sqrt{3}$

$S_t = 6 \cdot a^2$

$V = a^3$



Prisma Regular



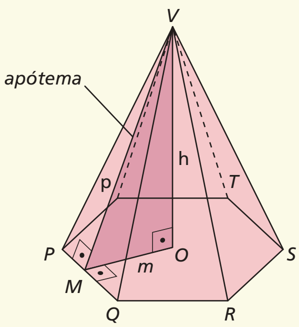
$S_\ell = n \cdot S_{face}$ (n = número de faces retangulares)

$S_t = S_l + 2S_b$

$V = S_b \cdot h$

Pirâmides

Pirâmide regular



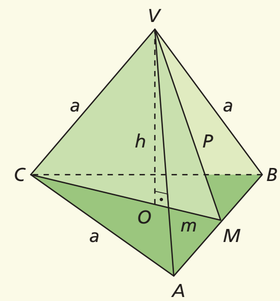
$p^2 = m^2 + h^2$

$S_\ell = n \cdot S_{face}$ (n = número de faces triangulares)

$S_t = S_l + S_b$

$V = \frac{1}{3} S_b \cdot h$

Tetraedro regular



$p = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

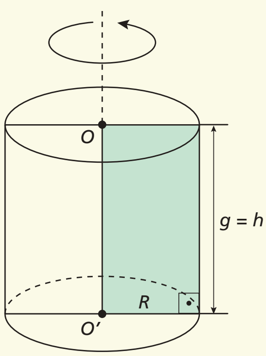
$S_{face} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$S_{total} = a^2\sqrt{3}$

$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Cilindros

Cilindro reto



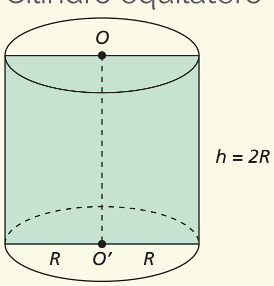
$S_b = \pi R^2$

$S_l = 2\pi Rg$

$S_t = 2\pi R(g+R)$

$V = \pi R^2 h$ ou $V = \pi R^2 g$

Cilindro equilátero



Cones

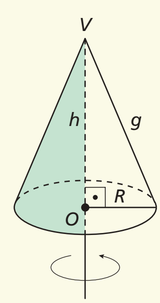
Cone reto

$S_b = \pi R^2$

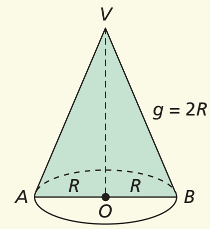
$S_l = \pi Rg$

$S_t = \pi R(g+R)$

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$



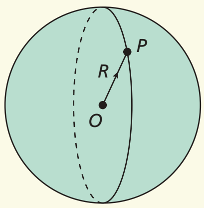
Cone equilátero



Esfera

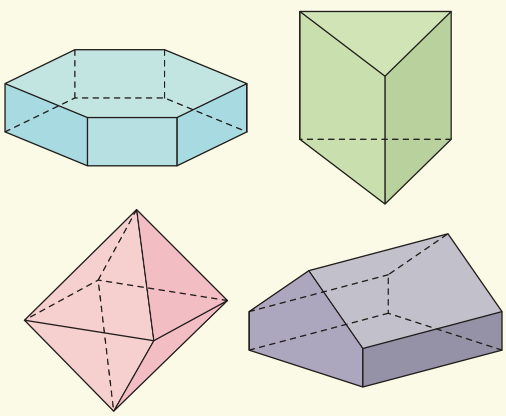
$S_e = 4\pi R^2$

$V_e = \dfrac{4}{3}\pi R^3$



Poliedros

Poliedros convexos



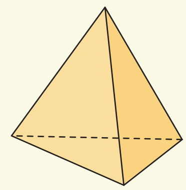
V = número de vértices

A = número de arestas

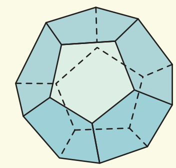
F = número de faces

$V - A + F = 2$ (relação de Euler)

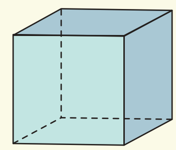
Poliedros regulares



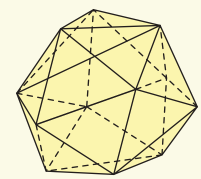
tetraedro



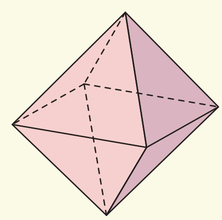
icosaedro



hexaedro



octaedro



dodecaedro

Avalie o que aprendeu

(EM13MAT307)

1. Calcule a medida da diagonal, a área total e o volume de um paralelepípedo retângulo de dimensões 10, 6 e 2 cm.

a) $D = 3\sqrt{65}$ cm; $S_t = \sqrt{184}$ cm²; $V = \sqrt{120}$ cm³

b) $D = 2\sqrt{35}$ cm; $S_t = 184$ cm²; $V = 120$ cm³

c) $D = 35$ cm; $S_t = \sqrt{184}$ cm²; $V = 120$ cm³

d) $D = 3\sqrt{35}$ cm; $S_t = 184$ cm²; $V = \sqrt{120}$ cm³

e) $D = 70$ cm; $S_t = 184$ cm²; $V = 120$ cm³

Professor

A sugestão para a utilização desta série de atividades finais é como uma avaliação somativa. Essa avaliação pode ser adaptada conforme sua preferência, podendo ser realizada individualmente, em duplas ou em pequenos grupos, de acordo com o método que melhor se alinha aos objetivos de ensino e à dinâmica da sua turma. Isso proporcionará aos alunos uma oportunidade de demonstrar suas aprendizagens de maneira colaborativa ou individual, garantindo uma avaliação abrangente.

(EM13MAT309)

2. Em um prisma triangular regular, a aresta da base mede $2\sqrt{2}$ cm. Sabe-se que a medida da aresta lateral é o triplo da medida da aresta da base. Calcule a área lateral e o volume do prisma.

a) $S_\ell = 94 cm^2; V = 12\sqrt{6} cm^3$

b) $S_\ell = 72 cm^2; V = 12\sqrt{6} cm^3$

c) $S_\ell = 36 cm^2; V = 12\sqrt{6} cm^3$

d) $S_\ell = 72 cm^2; V = 6\sqrt{2} cm^3$

e) $S_\ell = 36 cm^2; V = 6\sqrt{2} cm^3$

(EM13MAT309)

3. A altura de um prisma hexagonal regular é $6\sqrt{3}$ m. Calcule o seu volume e a sua área total, sabendo que a aresta da base mede 6 m.

a) $V = 972 m^3; S_t = 676\sqrt{5} m^2$

b) $V = \sqrt{757} m^3; S_t = 567\sqrt{7} m^2$

c) $V = 972 m^3; S_t = 7\sqrt{5} m^2$

d) $V = \sqrt{757} m^3; S_t = 324\sqrt{3} m^2$

e) $V = 972 m^3; S_t = 324\sqrt{3} m^2$

(EM13MAT504)

4. Um prisma regular de base quadrada tem 1.372 m³ de volume. Sabe-se que sua altura é o quádruplo da aresta da base. Calcule as áreas lateral e total.

a) $S_\ell = 784 m^2; S_t = 882 m^2$

b) $S_\ell = 784 m^2; S_t = 900 m^2$

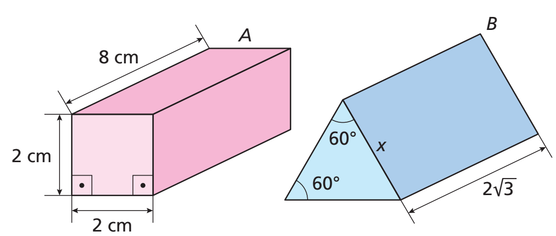
c) $S_\ell = 600 m^2; S_t = 882 m^2$

d) $S_\ell = 600 m^2; S_t = 900 m^2$

e) $S_\ell = 550 m^2; S_t = 670 m^2$

(EM13MAT506)

5. Na figura, tem-se:



V_A: volume do prisma *A*

V_B: volume do prisma *B*

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{1}{3}$$

Nessas condições, calcule a medida *x* indicada na figura.

a) $x = 2\sqrt{2}$ cm

b) $x = 4\sqrt{5}$ cm

c) $x = 8\sqrt{5}$ cm

d) $x = 4\sqrt{3}$ cm

e) $x = 8\sqrt{3}$ cm

(EM13MAT309)

6. Calcule o volume e as áreas lateral e total de um cone circular reto de altura 12 m e área da base igual a 25π m².

a) $V = 100\pi$ m³; $S_L = 65\pi$ m²; $S_t = 90\pi$ m²

b) $V = 100$ m³; $S_L = 65$ m²; $S_t = 90$ m²

c) $V = \pi$ m³; $S_L = \pi$ m²; $S_t = \pi$ m²

d) $V = 50\pi$ m³; $S_L = 32{,}5\pi$ m²; $S_t = 45\pi$ m²

e) $V = 25\pi$ m³; $S_L = 15\pi$ m²; $S_t = 22{,}5\pi$ m²

(EM13MAT307)

7. Obtenha a medida do raio da base de um cone reto cuja geratriz mede 4 cm e a área total é de 12π cm².

a) $R = 32$ cm

b) $R = 16$ cm

c) $R = 8$ cm

d) $R = 4$ cm

e) $R = 2$ cm

(EM13MAT309)

8. Calcule a área e o volume de uma esfera de raio 4 cm.

a) $A = 32\pi\ \text{cm}^2;\ V = \dfrac{13\pi}{3}\text{cm}^3$

b) $A = 124\pi\ \text{cm}^2;\ V = \dfrac{567\pi}{3}\text{cm}^3$

c) $A = 64\pi\ \text{cm}^2;\ V = \dfrac{127\pi}{3}\text{cm}^3$

d) $A = 64\pi\ \text{cm}^2;\ V = \dfrac{256\pi}{3}\text{cm}^3$

(EM13MAT309)

9. Calcule a área da secção plana obtida em uma esfera de 6 cm de raio por um plano distante 4 cm do centro.

a) $S = 5\pi$ cm²

b) $S = 10\pi$ cm²

c) $S = 20\pi$ cm²

d) $S = 25\pi$ cm²

e) $S = 30\pi$ cm²

(EM13MAT309)

10. Uma esfera é seccionada por um plano α a 8 cm de seu centro. Encontre o volume da esfera, sabendo que a secção tem área de 36π cm².

a) $V = \dfrac{4.000\pi}{3}\text{cm}^3$

b) $V = \dfrac{2.000\pi}{3}\text{cm}^3$

c) $V = \dfrac{1.000\pi}{3}\text{cm}^3$

d) $V = \dfrac{4.000\pi}{7}\text{cm}^3$

O estudo de retas pode inspirar artistas a criarem belas artes, como essa composição do artista holandês Piet Mondrian.

Capítulo 5

Geometria analítica

O método da Geometria Analítica consiste, basicamente, em associar números a pontos de um plano e equações a figuras geométricas, criando assim uma poderosa ferramenta matemática, com aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento, como em Economia e Administração, Arquitetura e Engenharia e outras atividades de planejamento.

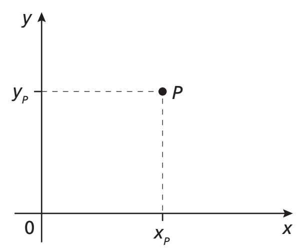
Professor

Neste capítulo, os alunos serão conduzidos através de uma exploração progressiva de conceitos fundamentais no plano cartesiano. O estudo começa com a compreensão das coordenadas cartesianas e a representação de pontos no espaço. Daí, tópicos como a "distância entre dois pontos" e o "ponto médio" serão explorados, fornecendo as bases para compreender as relações espaciais. À medida que avançamos, os alunos se aprofundarão na análise de retas, abrangendo tópicos como o "coeficiente angular da reta", "equação fundamental da reta", "equação geral da reta", "equação reduzida da reta" e "equação segmentária da reta". Esses conceitos permitirão representar, compreender e calcular propriedades geométricas das retas. Em seguida, serão examinadas as "posições relativas de duas retas" e o "ângulo entre duas retas", proporcionando uma visão abrangente das relações angulares entre retas no plano. A "distância de ponto a reta" será abordada, destacando como determinar efetivamente a distância entre pontos e retas. O estudo se estende à análise da circunferência, explorando elementos e derivando a "equação reduzida da circunferência" e a "equação geral da circunferência". Por fim, os alunos serão introduzidos à "posição de uma reta em relação a uma circunferência", consolidando sua compreensão das interações entre retas e circunferências. Ao explorar esses tópicos em sequência, o capítulo visa aprofundar a compreensão dos alunos na Geometria Analítica, equipando-os com ferramentas para analisar e representar relações espaciais de forma precisa e aplicável.

Estudo do ponto

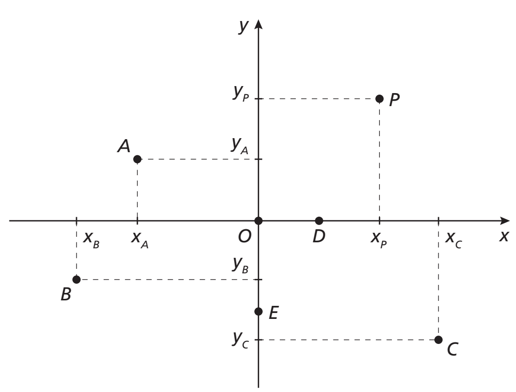
(EM13MAT301) (EM13MAT401) (EM13MAT501)

Podemos localizar um ponto P em um plano α utilizando um sistema de eixos cartesianos.



– Ox é o eixo das abscissas.
– Oy é o eixo das ordenadas.
– xOy é o sistema cartesiano ortogonal.
– O (0, 0) é a origem do sistema.
– x_P é a abscissa do ponto P.
– y_P é a ordenada do ponto P.
– (x_P, y_P) são as coordenadas do ponto P.

A posição do ponto P no plano α é dada a partir de suas coordenadas:



$P \in 1^{\underline{o}}\ \text{Qd} \Leftrightarrow x_P > 0 \text{ e } y_P > 0$

$A \in 2^{\underline{o}}\ \text{Qd} \Leftrightarrow x_A < 0 \text{ e } y_A > 0$

$B \in 3^{\underline{o}}\ \text{Qd} \Leftrightarrow x_B < 0 \text{ e } y_B < 0$

$C \in 4^{\underline{o}}\ \text{Qd} \Leftrightarrow x_C > 0 \text{ e } y_C < 0$

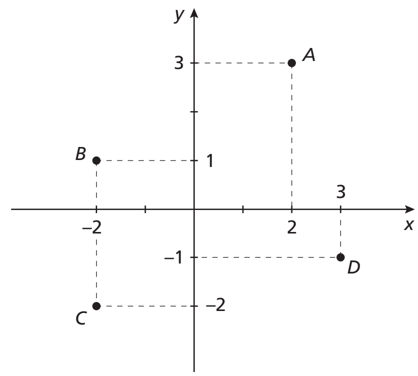
$D \in \overleftrightarrow{Ox} \Leftrightarrow y_D = 0$

$E \in \overleftrightarrow{Oy} \Leftrightarrow x_E = 0$

Professor

É recomendável começar introduzindo os conceitos fundamentais das coordenadas cartesianas e a representação de pontos no plano. Explique como os eixos x e y formam um sistema de referência, onde cada ponto é identificado por um par ordenado *(x, y)*. Ilustre visualmente como os pontos são localizados no plano, destacando a importância da origem (0,0). Utilize exemplos práticos para mostrar como os pontos podem ser interpretados e relacionados às situações do cotidiano. Isso fornecerá uma base sólida para a compreensão dos conceitos subsequentes na Geometria Analítica e permitirá que os alunos visualizem a relação entre pontos e coordenadas no espaço cartesiano.

Observe a seguir que, conhecendo as coordenadas de um ponto, podemos localizá-lo no plano cartesiano:



a) para $A(2, 3)$, temos $x_A > 0$ e $y_A > 0$;

logo, $A \in 1^{\text{o}}$ Qd.

b) para $B(-2, 1)$, temos $x_B < 0$ e $y_B > 0$;

logo, $B \in 2^{\text{o}}$ Qd.

c) para $C(-2, -2)$, temos $x_C < 0$ e $y_C < 0$;

logo, $C \in 3^{\text{o}}$ Qd.

d) para $D(3, -1)$, temos $x_D > 0$ e $y_D < 0$;

logo, $D \in 4^{\text{o}}$ Qd.

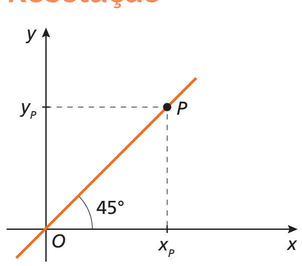
Professor

Dentro da metodologia deste material, as atividades resolvidas desempenham um papel fundamental como ferramentas auxiliares no processo de ensino e aprendizagem. Sugerimos que você estimule os alunos a acompanharem atentamente o detalhado passo a passo de cada resolução, e, se possível, os encoraje a replicar as resoluções em seus próprios cadernos. Além disso, eles podem explorar a criação de pequenas variações das atividades já solucionadas, o que proporcionará um maior engajamento e compreensão dos conceitos abordados. Isso permitirá que os alunos apliquem os princípios aprendidos de forma prática e reforcem sua compreensão do conteúdo estudado.

Atividades resolvidas

R1. Determine o valor de k para que o ponto $P(5, 2k - 3)$ pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares:

Resolução



Um ponto P pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares se e somente se $y_P = x_P$.

Logo, para $P(5, 2k - 3)$, temos:

$2k - 3 = 5 \Rightarrow k = 4$ e então $P(5, 5)$

Atividades

1. Indique o quadrante a que pertence cada ponto:

a) $A(-3, -1)$

$A \in 3^{\underline{o}}$ Qd

b) $B\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

$B \in 2^{\underline{o}}$ Qd

c) $C\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$

$C \in 1^{\underline{o}}$ Qd

d) $D\left(\frac{3}{2}, -1\right)$

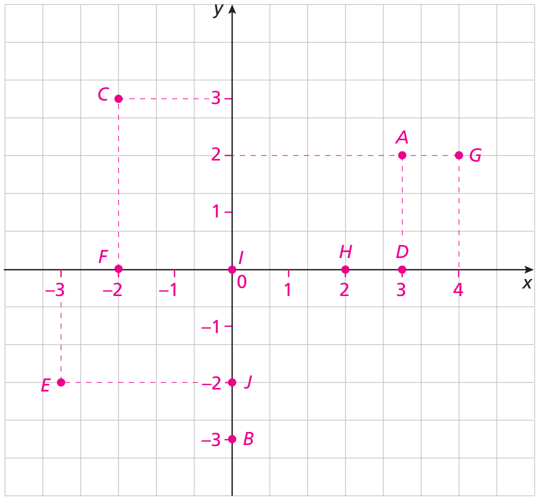
$D \in 4^{\underline{o}}$ Qd

e) $E\left(\sqrt{70}, -\sqrt{2}\right)$

$E \in 4^{\underline{o}}$ Qd

2. Localize, no sistema cartesiano ortogonal, os pontos:

a) $A(3, 2)$
b) $B(0, -3)$
c) $C(-2, 3)$
d) $D(3, 0)$
e) $E(-3, -2)$
f) $F(-2, 0)$
g) $G(4, 2)$
h) $H(2, 0)$
i) $I(0, 0)$
j) $J(0, -2)$



3. Determine o valor de *k* para que os pontos pertençam à bissetriz dos quadrantes ímpares:

a) $P(4k + 2, 6)$

$k = 1$

b) $P(3k + 1, 2k + 6)$

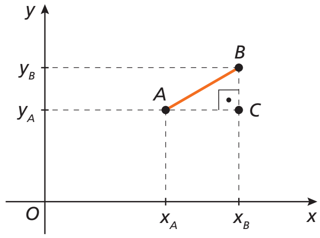
$k = 5$

c) $P(4k - 1, 2k - 3)$

$2k = -2 \Rightarrow k = -1$

Distância entre dois pontos

Dados os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, a distância d_{AB} entre eles é uma função das coordenadas de A e B:



Nessa figura, temos:

– $d_{AC} = |x_B - x_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2}$

– $d_{BC} = |y_B - y_A| = \sqrt{(y_B - y_A)^2}$

Para obter d_{AB}, aplicamos o teorema de Pitágoras ao triângulo ABC:

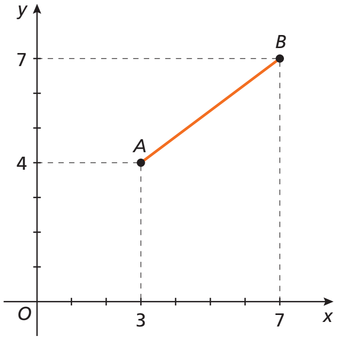
$$d_{AB}^2 = d_{AC}^2 + d_{BC}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Atividades resolvidas

R2. Calcule a distância entre os pontos $A(3, 4)$ e $B(7, 7)$.

Resolução



$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} S$$

$$d_{AB} = \sqrt{(7-3)^2 + (7-4)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} \Rightarrow d_{AB} = 5$$

Professor

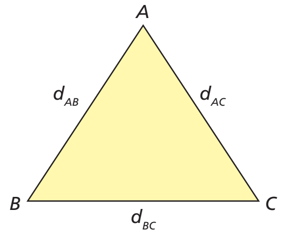
Explique a fórmula da distância euclidiana entre dois pontos em um plano cartesiano. Mostre como essa fórmula é derivada a partir das coordenadas dos pontos e destaque sua importância na medição de distâncias reais. Utilize exemplos concretos para calcular distâncias entre pontos diversos, relacionando-os a situações do dia a dia, como distância entre locais em um mapa. Incentive os alunos a aplicar essa fórmula em problemas de resolução de distância e, se possível, proporcione atividades práticas envolvendo medições. Isso permitirá que os alunos compreendam a utilidade da fórmula de distância e sua aplicação em contextos variados, fortalecendo sua compreensão da Geometria Analítica.

R3. Calcule o perímetro do triângulo de vértices $A(1, 4)$, $B(-1, 1)$ e $C(2, 0)$.

Resolução

Perímetro é a medida do contorno, então:

perímetro do triângulo $ABC = d_{AB} + d_{AC} + d_{BC}$



$d_{AB} = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{13}$

$d_{AC} = \sqrt{(2-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{17}$

$d_{BC} = \sqrt{(2+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10}$

perímetro $= \sqrt{13} + \sqrt{17} + \sqrt{10}$

Atividades

4. Determine a distância entre os pontos a seguir:

a) $A(2, 5)$ e $B(-3, 1)$

$d_{AB} = \sqrt{41}$

b) $P(-4, 0)$ e $Q(1, -5)$

$d_{PQ} = 5\sqrt{2}$

c) $R\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ e $S(5, -1)$

$d_{RS} = \frac{\sqrt{274}}{2}$

d) $T(0, -8)$ e $V(-7, 0)$

$d_{TV} = \sqrt{113}$

5. Calcule o perímetro do triângulo de vértices *A*, *B* e *C* em cada caso:

a) $A(3, 0)$, $B(0, 4)$ e $C(0, 0)$

12

b) $A(-6, -1)$, $B(4, 2)$ e $C(3, -1)$

$\sqrt{109} + \sqrt{10} + 9$

6. Mostre que o triângulo de vértices *A*(3, 1), *B*(8, 1) e *C*(3, 7) é retângulo. (Observação: todo triângulo retângulo verifica o teorema de Pitágoras: a hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos catetos.)

Temos que:

$$d_{AB} = \sqrt{(8-3)^2 + (1-1)^2} = 5$$
$$d_{AC} = \sqrt{(3-3)^2 + (7-1)^2} = 6$$
$$d_{BC} = \sqrt{(3-8)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{61}$$

Portanto, o triângulo é retângulo.

7. Determine *x* para que o triângulo *ABC* seja retângulo em *B*:

a) *A*(7, 8), *B*(4, 4) e *C*(*x*, 7)

$x = 0$

b) *A*(2, 3), *B*(−1, *x*) e *C*(−2, 3)

$x = 3 \pm \sqrt{3}$

c) *A*(1, *x*), *B*(3, 4) e *C*(0, 6)

$x = 1$

d) *A*(*x*, 1), *B*(3, 3) e *C*(5, −1)

$x = -1$

8. Dados *A*(*x*, 3), *B*(1, 5) e *C*(4, 2), obtenha *x* para que *A* esteja à mesma distância de *B* e *C*.

$x = 2$

9. Determine as coordenadas do ponto *P*, pertencente ao eixo das abscissas, sabendo que *P* equidista dos pontos *A*(1,5) e *B*(7, 1).

P(2, 0)

10. Obtenha o ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares que equidista dos pontos *A*(3, 5) e *B*(−2, 8).

$$P = \left(-\frac{17}{2}, -\frac{17}{2}\right)$$

11. Obtenha o ponto da bissetriz dos quadrantes pares que equidista dos pontos *A*(1, 6) e *B*(4, −8).

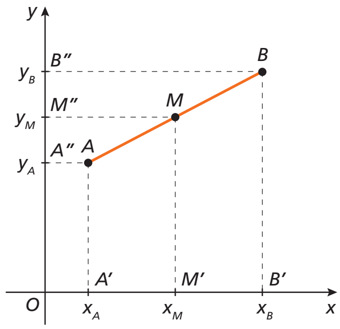
$$P = \left(\frac{43}{34}, \frac{-43}{34}\right)$$

12. Para qual valor de *m* o ponto *P*(5, *m*) dista 4 unidades do ponto *Q*(1, −2)?

$m = -2$

Ponto médio

Dados os pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, as coordenadas do ponto $M(x_M, y_M)$, médio entre A e B, serão dadas pelas semi-somas das coordenadas de A e B.



O ponto M terá as seguintes coordenadas:

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Atividades resolvidas

R4. Determine as coordenadas do ponto médio M de um segmento que tem extremidades $A(3, 5)$ e $B(7, 9)$.

Resolução

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_M = \frac{3 + 7}{2} \Rightarrow x_M = 5$$

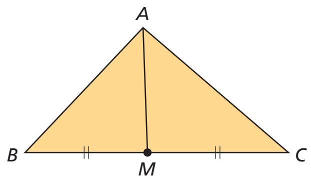
$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_M = \frac{5 + 9}{2} \Rightarrow y_M = 7$$

Logo, o ponto M é $(5, 7)$.

R5. Dados os pontos $A(6, 2)$, $B(3, 5)$ e $C(1, -3)$, calcule a medida da mediana $\overline{AM}$ do triângulo ABC.

Resolução

Mediana é o segmento que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto.



Cálculo do ponto médio de $\overline{BC}$:

$M\left(\frac{3+1}{2}, \frac{5-3}{2}\right) \Rightarrow M(2, 1)$

Cálculo da medida da mediana $\overline{AM}$:

$d_{AM} = \sqrt{(2-6)^2 + (1-2)^2} \Rightarrow d_{AM} = \sqrt{17}$

Atividades

13. Obtenha as coordenadas do ponto médio do segmento $\overline{AB}$ nos seguintes casos:

a) $A(3, 1)$ e $B(-3, 5)$

$M\ (0;\ 3)$

b) $A\left(\frac{5}{3}, 6\right)$ e $B\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$

$M\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$

14. Dados os pontos $A(4, 2)$, $B(6, -5)$ e $C(10, -3)$, calcule a medida da mediana $\overline{AM}$ do triângulo ABC.

$2\sqrt{13}$

15. Dados os pontos A e B, determine as coordenadas dos pontos que dividem o segmento $\overline{AB}$ em quatro partes iguais:

a) $A(8, 0)$ e $B(4, 12)$

$M(6, 6)$; $N(7, 3)$; $P(5, 9)$

b) $A(16, -4)$ e $B(18, 0)$

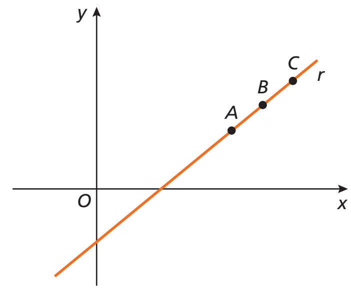
$M\ (17,-2)$; $N\left(\frac{33}{2}, -3\right) P\left(\frac{35}{2}, -1\right)$

16. O baricentro de um triângulo é o par de coordenadas (4, 2), e dois de seus vértices são (1, 5) e (2, 8). Determine o terceiro vértice.

(9, -7)

Alinhamento de três pontos

Três pontos estão alinhados se são colineares, isto é, se pertencem a uma mesma reta.



Considerando os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, dizemos que esses pontos estão alinhados se e somente se:

$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Se $D \neq 0$, os pontos não são colineares e representam os vértices de um triângulo.

Atividades resolvidas

R6. Verifique se os pontos $A(2, 3)$, $B(-1, 0)$ e $C(3, 4)$ são colineares.

Resolução

Basta que verifiquemos o valor do determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{matrix}$$

$$0 \quad -8 \quad 3 \qquad\qquad 0 \quad 9 \quad -4$$

$D = 9 - 4 - 8 + 3 \Rightarrow D = 0$

Como $D = 0$, A, B e C são colineares.

Professor

Explique que três pontos estão alinhados quando pertencem à mesma reta. Mostre como verificar essa colinearidade usando as coordenadas cartesianas dos pontos e a fórmula de determinantes, destacando que a área formada pelo triângulo formado pelos pontos será zero caso eles estejam alinhados. Utilize exemplos ilustrativos para demonstrar a aplicação dessa técnica na análise de pontos alinhados e como isso se relaciona à representação gráfica no plano cartesiano. Proporcione problemas práticos que envolvam o alinhamento de três pontos para consolidar a compreensão dos alunos e demonstrar a utilidade desse conceito na Geometria Analítica.

R7. Mostre que os pontos $A(1, 2)$, $B(-1, 3)$ e $C(0, -2)$ são vértices de um triângulo.

Resolução

Basta que verifiquemos o valor do determinante:

$$D = \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right|$$

$$0 \quad 2 \quad 2 \qquad\qquad\qquad 3 \quad 0 \quad 2$$

$D = 3 + 2 + 2 + 2 \Rightarrow D = 9$

Como $D \neq 0$, os pontos A, B e C não estão alinhados. Logo, são vértices de um triângulo.

Atividades

17. Verifique se estão alinhados os pontos *A*, *B* e *C* nos seguintes casos:

a) $A(3, 4)$, $B(1, 2)$ e $C(0, 3)$

Não estão alinhados.

b) $A(3, -1)$, $B(-2, -6)$ e $C(8, 4)$

Estão alinhados.

c) $A(3, 7)$, $B(1, 2)$ e $C(0, 0)$

Estão alinhados.

d) $A(-1, 0)$, $B(3, 4)$ e $C(0, 1)$

Estão alinhados.

18. Determine o valor de x para que os pontos *A*, *B* e *C* sejam colineares:

a) $A(x, 2)$, $B(3, 1)$ e $C(-4, 2)$

$x = -4$

b) $A(-2, x)$, $B(0, 0)$ e $C(3, 1)$

$x = -\frac{2}{3}$

c) $A(1, -4)$, $B(-3, 5)$ e $C(4x, 3)$

$x = -\frac{19}{36}$

d) $A(1, 2)$, $B(x, 0)$ e $C(3, 4)$

$x = -1$

19. Determine para que valores de *p* existe o triângulo *ABC* em cada caso:

a) $A(p, 2)$, $B(3, 5)$ e $C(1, 0)$

$p \neq \frac{9}{5}$

b) $A(2, 1)$, $B(3p, 4)$ e $C(-1, 3)$

$p \neq -\frac{5}{6}$

c) $A(p - 2, -1)$, $B(p - 1, 4)$ e $C(2, 9)$

$p \neq 2$

d) $A(p, 1)$, $B(p + 1, 2)$ e $C(0, 3)$

$p \neq -2$

20. Calcule a área *S* do triângulo *ABC* de vértices $A(-1, 4)$; $B(0, 5)$ e $C(3, -3)$.

$\frac{11}{2}$

Estudo da reta

O estudo de uma reta do plano cartesiano pode ser realizado a partir do ângulo α que ela forma com o eixo das abscissas. Esse ângulo, denominado inclinação da reta, é medido a partir do eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ no sentido anti-horário.

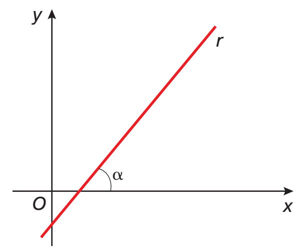
Professor

Reforce a importância da reta como uma das estruturas geométricas mais básicas e frequentemente encontradas. Introduza o "coeficiente angular da reta" como a inclinação em relação ao eixo x, enfatizando a relação entre esse coeficiente e a inclinação de diferentes retas. Depois, discuta as diferentes formas de equações de reta, como a "equação fundamental da reta", "equação geral da reta", "equação reduzida da reta" e "equação segmentária da reta", mostrando como derivar e interpretar cada uma delas. Relacione essas equações com situações práticas, como trajetórias e direções de movimento. Aborde "posições relativas de duas retas" e o "ângulo entre duas retas", introduzindo a ideia de paralelismo e perpendicularidade. Finalmente, explique como determinar a "distância de ponto a reta", ilustrando como essa medida pode ser aplicada em contextos como a Física e a Engenharia. Proporcione exemplos práticos, estimulando os alunos a aplicarem os conceitos aprendidos e a reconhecerem a importância das retas na análise geométrica e em diversas aplicações no mundo real.

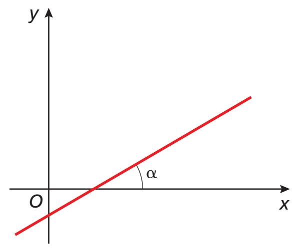
Coeficiente angular

Coeficiente angular m de uma reta não perpendicular ao eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ é o valor da tangente do ângulo de inclinação dessa reta.

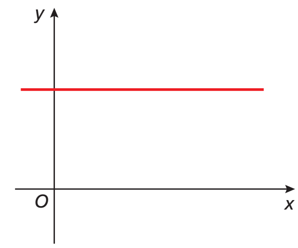
$$m = \text{tg}\ \alpha$$



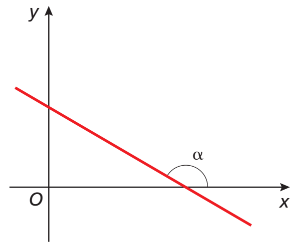
O valor do coeficiente angular m varia em função de α.



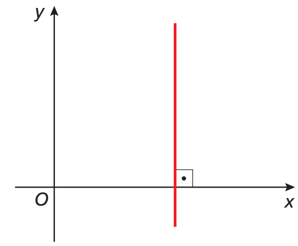
$0 < \alpha < 90° \Rightarrow m > 0$



$\alpha = 0 \Rightarrow m = 0$



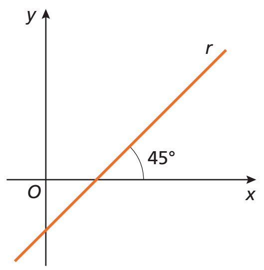
$90° < \alpha < 180° \Rightarrow m < 0$



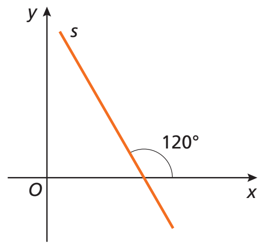
$\alpha = 90° \Rightarrow \nexists m$

Observe, por exemplo, os coeficientes angulares das retas r e s nos gráficos a seguir:

a) $m_r = \text{tg}\ 45° \Rightarrow m_r = 1$



b) $m_s = \text{tg}\ 120° = -\ \text{tg}\ 60° \Rightarrow m_s = -\sqrt{3}$

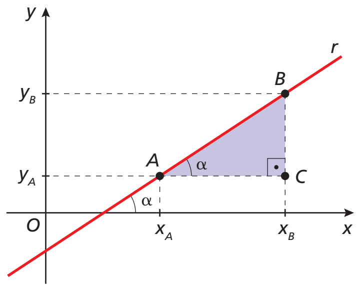


O coeficiente angular de uma reta r não vertical também pode ser obtido a partir das coordenadas de dois de seus pontos. Dados $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, dois pontos distintos pertencentes a r, temos:

$m_r = \text{tg}\ \alpha$ e $\text{tg}\ \alpha = \dfrac{BC}{AC}$

Então,

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$



Atividades resolvidas

R8. Qual o coeficiente angular da reta r determinada pelos pontos $A(3, 4)$ e $B(2, 5)$?

Resolução

$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

$$m_r = \frac{5 - 4}{2 - 3} \Rightarrow m_r = \frac{1}{-1} \Rightarrow m_r = -1$$

R9. Verifique se os pontos $A(3, 4)$, $B(1, 2)$ e $C(-2, -1)$ são colineares.

Resolução

Uma maneira de verificar se três pontos A, B e C são colineares é por meio do coeficiente angular. Se ocorrer $m_{AB} = m_{BC}$, então A, B e C são colineares.

Para os pontos $A(3, 4)$, $B(1, 2)$ e $C(-2, -1)$, temos:

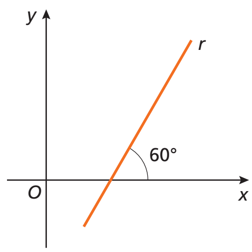
$$m_{AB} = \frac{2 - 4}{1 - 3} = \frac{-2}{-2} \Rightarrow m_{AB} = 1$$

$$m_{BC} = \frac{-1 - 2}{-2 - 1} = \frac{-3}{-3} \Rightarrow m_{BC} = 1$$

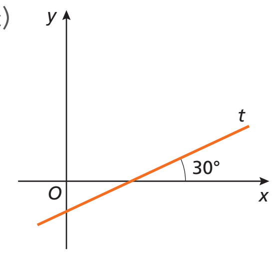
Como $m_{AB} = m_{BC}$, então A, B e C são colineares.

Atividades

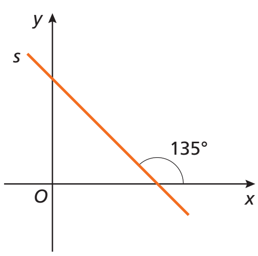
21. Determine o coeficiente angular da reta em cada caso:

a) 

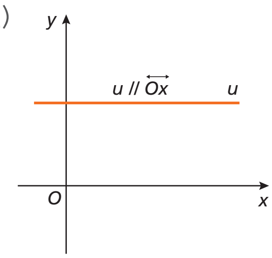
$\sqrt{3}$

c) 

$\frac{\sqrt{3}}{3}$

b) 

-1

d) 

0

22. Calcule o coeficiente angular do segmento $\overline{AB}$ em cada caso:

a) $A(2, 3)$ e $B(3, 4)$

1

d) $A(-3, -4)$ e $B(-2, -2)$

2

b) $A(4, -1)$ e $B(5, 1)$

2

e) $A(1, 0)$ e $B(0, 1)$

-1

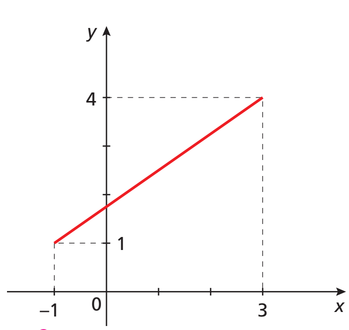
c) $A(3, 2)$ e $B(4, 2)$

0

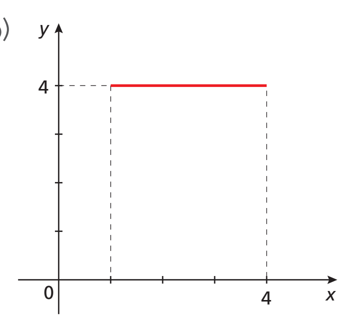
f) $A(-2, 0)$ e $B(0, 0)$

0

23. Determine o coeficiente angular do segmento indicado em cada caso:

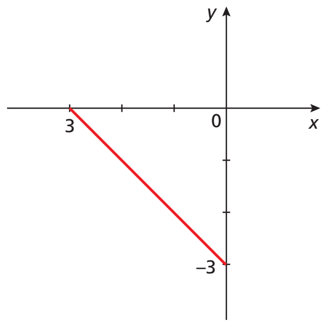
a) 

$m = \frac{3}{4}$

b) 

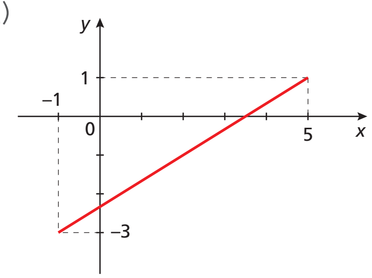
$m = 0$

c)



$m = -1$

d)



$m = \frac{2}{3}$

24. Dado o ponto $A(4, 2)$, calcule as coordenadas do ponto $B(2b + 1, 4b)$ de modo que o coeficiente angular de $\overline{AB}$ seja –2.

$B\,(3, 4)$

25.Verifique se os pontos A, B e C dados a seguir são colineares:

a) $A(0, 1)$, $B(2, 3)$ e $C(4, 1)$

Não são colineares.

b) $A(2, 3)$, $B(0, 5)$ e $C(3, -2)$

Não são colineares.

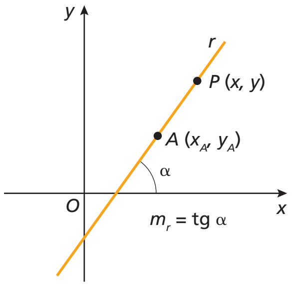
c) $A(6, 4)$, $B(3, 2)$ e $C(-9, -6)$

São colineares.

Equação fundamental da reta

Podemos representar uma reta r do plano cartesiano por meio de uma equação. Essa equação pode ser obtida a partir de um ponto $A(x_A, y_A)$ e do coeficiente angular m_r dessa reta.

Considere uma reta r não vertical, de coeficiente angular m_r, que passa pelo ponto $A(x_A, y_A)$. Vamos obter a equação dessa reta, tomando um ponto genérico $P(x, y)$ tal que $P \neq A$.



$m_r = tg\ \alpha$

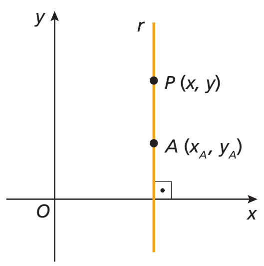
A equação fundamental de r é dada por:

$$m_r = \frac{y - y_A}{x - x_A} \Rightarrow y - y_A = m_r(x - x_A)$$

Se a reta r for paralela ao eixo $\overleftrightarrow{Oy}$, isto é, se não existir coeficiente angular, então todos os pontos pertencentes a ela terão abscissas iguais.

Nesse caso, a equação de r é dada por:

$$x = x_A$$



Professor

Para enriquecer a compreensão dos alunos, destaque aplicações reais dessa equação. Apresente cenários como trajetórias de objetos em movimento, onde a equação fundamental da reta é usada para prever a posição futura com base na velocidade. Na Engenharia, ilustre como essa equação é empregada para determinar a inclinação de rampas ou declives, otimizando a acessibilidade e a segurança. Explore ainda exemplos arquitetônicos, como a inclinação de telhados em relação à chuva ou a determinação da angulação de escadas. Ao associar a equação fundamental da reta a situações práticas e reais, você capacitará os alunos a perceberem sua relevância e a aplicação tangível desse conceito na resolução de problemas do mundo real.

Atividades resolvidas

R10. Obtenha a equação fundamental da reta r, que forma ângulo α de 45° com o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$ e que passa pelo ponto $A(1, 2)$.

Resolução

$m_r = \text{tg}\ \alpha \Rightarrow m_r = \text{tg}\ 45° \Rightarrow m_r = 1$

$y - y_A = m_r(x - x_A) \Rightarrow y - 2 = 1(x - 1)$

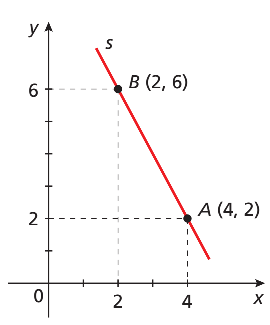
R11. Obtenha a equação fundamental e faça o gráfico da reta s que passa pelos pontos $A(4, 2)$ e $B(2, 6)$.

Resolução

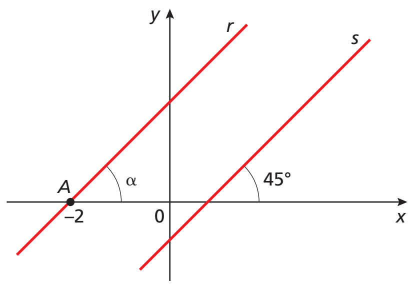
$$m_s = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{6 - 2}{2 - 4} \Rightarrow m_s = -2$$

$y - y_A = m_s(x - x_A)$

$y - 2 = -2(x - 4)$



R12. Determine a equação da reta *r* da figura a seguir, sabendo que é paralela à reta *s*.



Resolução

Como $r // s$, então $\alpha = 45°$.

$m_r = \text{tg } \alpha \Rightarrow m = \text{tg } 45° \Rightarrow m = 1$

O ponto $A(-2, 0) \in r$.

Então, a equação da reta *r* é: $y - 0 = 1(x + 2) \Rightarrow y = x + 2$.

Atividades

26. Determine a equação da reta *r* que passa pelo ponto *A* e tem inclinação α:

a) $A(2, 1)$ e $\alpha = 30°$

$y - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2)$

b) $A(-4, 1)$ e $\alpha = 45°$

$y - 1 = x + 4$

c) $A(-2, -3)$ e $\alpha = 135°$

$y + 3 = -1\,(x + 2)$

d) $A(3, -2)$ e $\alpha = 60°$

$y + 2 = \sqrt{3}\,(x - 3)$

27. Determine a equação da reta *r* que passa por *A* e tem coeficiente angular m_r:

a) $A(4, 4)$ e $m_r = -1$

$y - 4 = -1\,(x - 4)$

b) $A(2, -8)$ e $m_r = \frac{1}{2}$

$y + 8 = \frac{1}{2}(x - 2)$

28. Determine a equação da reta *r* que passa pelos pontos *A* e *B*:

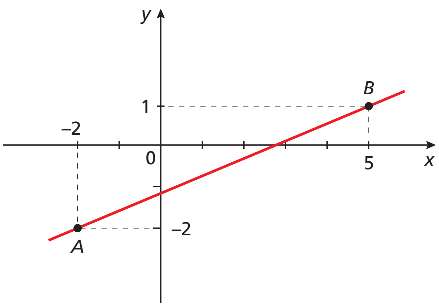
a) $A(3, 4)$ e $B(-1, 1)$

$y - 4 = \frac{3}{4}(x - 3)$

b) $A(-2, -1)$ e $B(5, -2)$

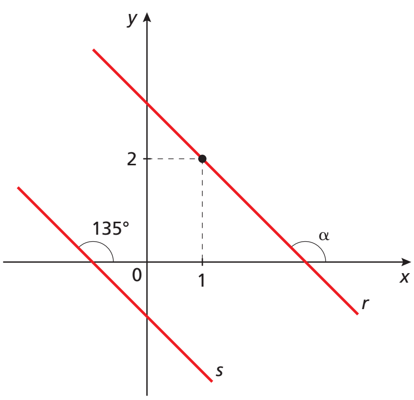
$y + 1 = -\frac{1}{7}(x + 2)$

29. Determine a equação da reta que passa pelos pontos *A* e *B*:



$y + 2 = \frac{3}{7}(x + 2)$

30. Sabendo que as retas *r* e *s* são paralelas, determine a equação de *r* na figura a seguir.



$y - 2 = -1\,(x - 1)$

Equação geral da reta

Toda reta *r* do plano cartesiano pode ser expressa por uma equação do tipo:

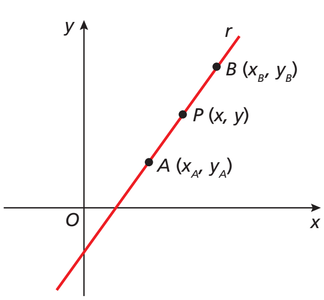
$ax + by + c = 0$

em que:

– a, b e c são números reais.

– a e b não são simultaneamente nulos.

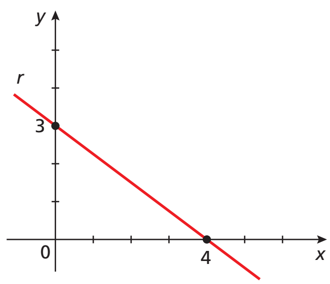
Podemos obter a equação geral de uma reta *r* conhecendo dois pontos não coincidentes de *r*, $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$. Para isso, usa-se a condição de alinhamento de *A* e *B* com um ponto genérico $P(x, y)$ de *r*:



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ax + by + c = 0$$

Atividades resolvidas

R13. Determine a equação da reta *r* no gráfico a seguir:



Resolução

Conhecendo o gráfico de uma reta *r*, podemos determinar sua equação geral a partir dos pontos em que *r* cruza os eixos $\overleftrightarrow{Ox}$ e $\overleftrightarrow{Oy}$.

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Resolvendo o determinante, vamos obter:

$(r)\ 3x + 4y - 12 = 0$

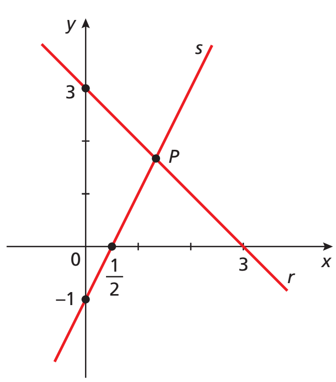
R14. Determine a equação geral da reta cuja equação fundamental é $y - 2 = 3(x - 5)$:

Resolução

$y - 2 = 3(x - 5)$

$y - 2 = 3x - 15 \Rightarrow 3x - y - 13 = 0$

R15. Determine a intersecção das retas $(r)\ x + y - 3 = 0$ e $(s)\ 2x - y - 1 = 0$ representadas na figura.



Resolução

Obtém-se a intersecção $P(x, y)$ de duas retas r e s, resolvendo o sistema formado com suas equações:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \text{ (I)} \\ 2x - y - 1 = 0 \text{ (II)} \end{cases}$$

$\text{(I)} + \text{(II)} \Rightarrow 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

Substituindo $x = \frac{4}{3}$ em (I) $\Rightarrow \frac{4}{3} + y - 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$.

Logo, a intersecção de r e s é $P\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

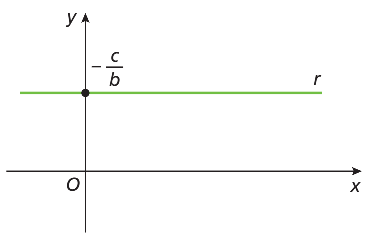
Casos particulares da equação geral da reta

Quando um dos coeficientes a, b ou c for igual a zero, temos três casos particulares da equação da reta:

– reta horizontal

$a = 0$ e $b \neq 0 \Rightarrow by + c = 0$

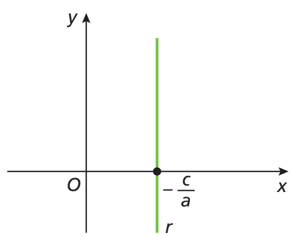
$y = -\frac{c}{b} \Rightarrow r \parallel \overleftrightarrow{Ox}$



– reta vertical

$a \neq 0$ e $b = 0 \Rightarrow ax + c = 0$

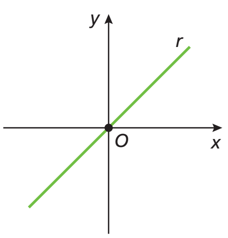
$x = -\frac{c}{a} \Rightarrow r \parallel \overleftrightarrow{Oy}$



– reta que passa pela origem

$a \neq 0$ e $b \neq 0$ e $c = 0$

$ax + by = 0 \Rightarrow (0, 0) \in r$



Atividades

31. Determine a equação da reta que passa pelos pontos:

a) $A(2, 2)$ e $B(4, 3)$

$x - 2y + 2 = 0$

b) $M(1, -1)$ e $N(-2, 0)$

$x + 3y + 2 = 0$

c) $R(-3, 2)$ e $S(-1, -1)$

$3x + 2y + 5 = 0$

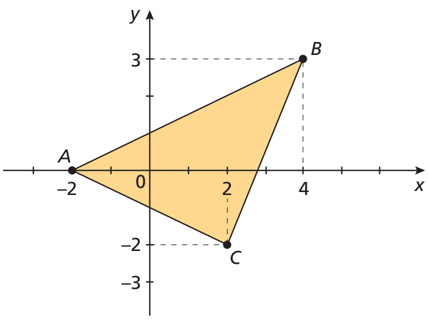
d) $A\left(\frac{4}{3}, 2\right)$ e $D\left(3, \frac{1}{5}\right)$

$27x + 25y - 86 = 0$

e) $M(0, 0)$ e $B\left(2, \frac{2}{3}\right)$

$x - 3y = 0$

32. Determine a equação geral das retas-suporte dos lados do triângulo *ABC*, de vértices *A*(−2, 0), *B*(4, 3) e *C*(2, −2).



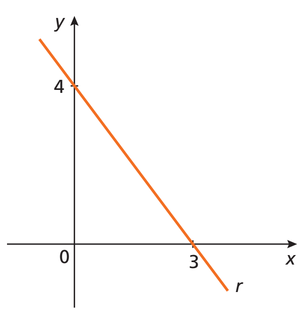
$\overleftrightarrow{AB}: -x + 2y - 2 = 0$

$\overleftrightarrow{AC}: x + 2y + 2 = 0$

$\overleftrightarrow{BC}: 5x - 2y - 14 = 0$

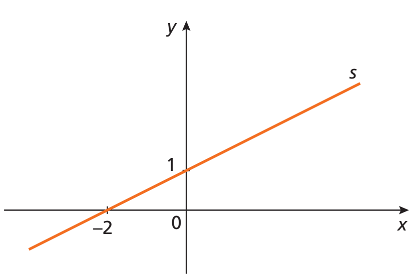
33. Determine, a partir dos gráficos, as equações gerais das retas representadas:

a)



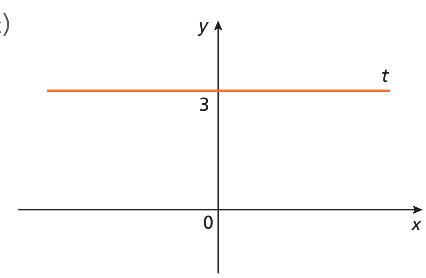
$4x + 3y - 12 = 0$

b)



$x - 2y + 2 = 0$

c)



$y = 3$

34. Verifique se os pontos *P*(2, 1) e *Q*(1, 4) pertencem à reta (*r*) $2x + y - 5 = 0$.

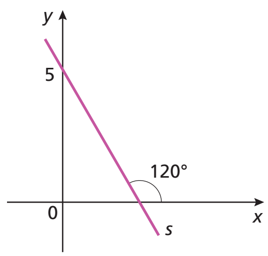
$P \in r$; $Q \notin r$

35. Dada a reta *r* de equação $2x - y + 3 = 0$ e os pontos *A*(–1, 1), *B*(0, 3), *C*(2, 2), *D*(1, –3) e *E*(–3, 4), verifique quais desses pontos pertencem à reta *r*.

$A \in r$; $B \in r$; $C \notin r$; $D \notin r$; $E \notin r$

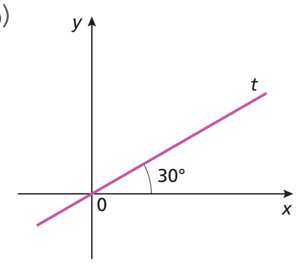
36. Dados os gráficos, determine, em cada caso, a equação geral da reta:

a)



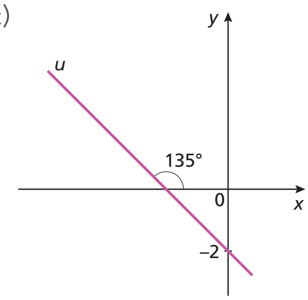
$\sqrt{3}x + y - 5 = 0$

b)



$\sqrt{3}x - 3y = 0$

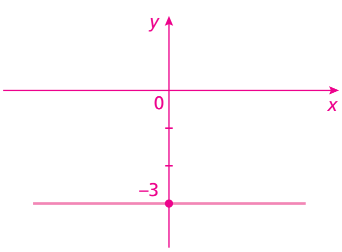
c)



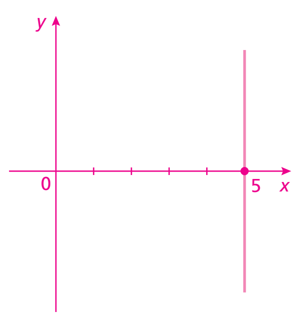
$x + y + 2 = 0$

37. Esboce o gráfico das seguintes retas:

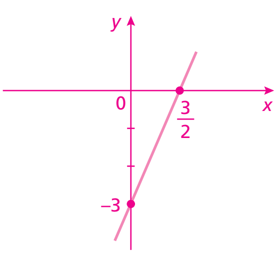
a) $y = -3$



b) $x = 5$



c) $2x - y = 3$



38. Determine a área do triângulo definido pela origem e pelas intersecções da reta (*r*) $2x + 3y - 6 = 0$ com os eixos $\overleftrightarrow{Ox}$ e $\overleftrightarrow{Oy}$.

3

39. Determine a intersecção das retas (*r*) $-4x + 2y + 2 = 0$ e (*s*) $2x - y - 1 = 0$.

As retas são coincidentes.

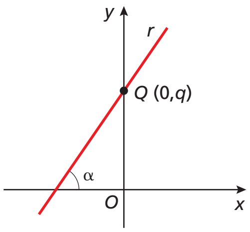
Equação reduzida da reta

Vamos determinar a equação da reta r que passa por $Q(0, q)$ e tem coeficiente angular $m = \text{tg}\ \alpha$:

$y - q = m(x - 0)$

$y - q = mx$

$y = mx + q$



Professor

Comente que a simplicidade da equação reduzida facilita a identificação das características da reta e sua relação com o sistema de coordenadas. Ela é especialmente útil para visualizar o comportamento da reta, sua inclinação e a posição onde cruza o eixo y. Através da equação reduzida, os alunos podem rapidamente interpretar e analisar as propriedades geométricas das retas, além de relacioná-las a situações do mundo real, como trajetórias, declives e variações em contextos diversos como Física, Engenharia, Arquitetura e Economia. Isso torna a equação reduzida da reta uma ferramenta poderosa para uma compreensão prática e conceitual das relações lineares no plano cartesiano.

Toda equação na forma $y = mx + q$ é chamada equação reduzida da reta, em que m é o coeficiente angular e q é a ordenada do ponto no qual a reta cruza o eixo $\overleftrightarrow{Oy}$. A equação reduzida pode ser obtida diretamente da equação geral $ax + by + c = 0$:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c$$

Para $b \neq 0$, temos:

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \\ m &= -\frac{a}{b} \\ q &= -\frac{c}{b} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = mx + q$$

Atividades resolvidas

R16. Obtenha a equação reduzida da reta r que passa por $P(0, 5)$ e é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Resolução

A equação da bissetriz dos quadrantes ímpares é $y = x$. Logo, $m = 1$. A equação da reta r que passa por $(0, 5)$ é:

$y = mx + q \Rightarrow y = x + 5$

Atividades

40. Obtenha a equação reduzida de cada uma das retas a seguir:

a) $2x - y + 3 = 0$

$y = 2x + 3$

b) $6x + 9y - 1 = 0$

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{9}$

c) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

$y = -\frac{2}{3}x + 2$

d) $y - 5 = 0$

$y = 5$

41. Obtenha a equação reduzida da reta *r* que passa por *P*(1, –5) e é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

$y = -x - 4$

42. Obtenha a equação reduzida de *r* nos seguintes casos:

a) *r* é paralela à bissetriz dos quadrantes pares e passa por *P*(0, 3);

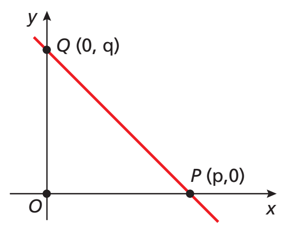
$y = -x + 3$

b) *r* é paralela à reta $2x - y - 3 = 0$ e passa por *Q*(0, –1).

$y = 2x - 1$

Equação segmentária da reta

Considere uma reta *r* que cruza os eixos cartesianos nos pontos (0, *q*) e (*p*, 0).



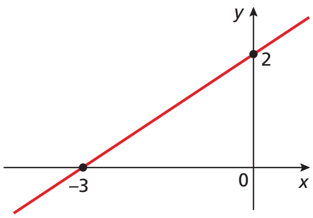
Vamos escrever a equação da reta *r*:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & q & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow qx + py - pq = 0 \Rightarrow qx + py = pq$$

Dividindo esta equação por *pq*, obtemos a equação segmentária da reta: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$

Atividades resolvidas

R17. Determine a equação segmentária da reta r representada no gráfico.



Resolução

Como r cruza os eixos em (–3, 0) e (0, 2), teremos a seguinte equação:

$$\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} = 1$$

R18. Escreva a equação segmentária da reta $x + 2y - 4 = 0$

Resolução

Vamos determinar a intersecção da reta $x + 2y - 4 = 0$ com os eixos coordenados:

$x = 0 \Rightarrow 0 + 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2$

$y = 0 \Rightarrow x + 0 - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

Assim, temos a equação segmentária $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$.

Atividades

43. Determine a equação segmentária das retas que passam pelos pontos *A* e *B*:

a) $A(3, 0)$, $B(0, 1)$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{1} = 1$

b) $A(-4, 0)$, $B(0, 2)$

$\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1$

44. Escreva a equação segmentária de cada reta a seguir:

a) $2x + y - 3 = 0$

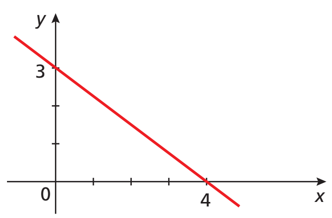
$$\frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{3} = 1$$

b) $3x - y - 12 = 0$

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-12} = 1$$

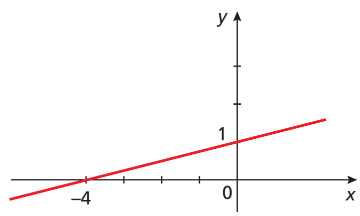
45. Obtenha a equação segmentária da reta representada em cada um dos gráficos a seguir:

a)



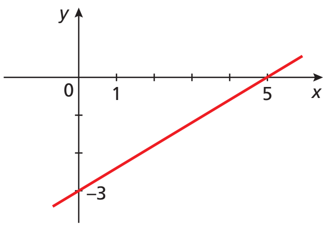
$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

b)



$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{1} = 1$$

c)



$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-3} = 1$$

Posições relativas de duas retas

Considere duas retas distintas do plano cartesiano:

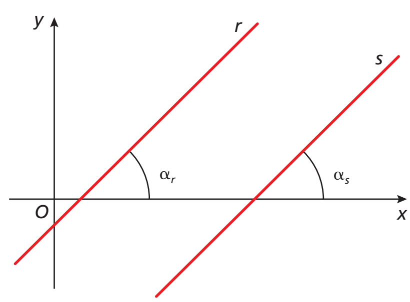
$$\begin{cases} (r)\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ (s)\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Podemos classificá-las como paralelas ou concorrentes.

Retas paralelas

As retas *r* e *s* têm o mesmo coeficiente angular.

$$\alpha_r = \alpha_s \Leftrightarrow m_r = m_s$$



Assim, para $r // s$ temos:

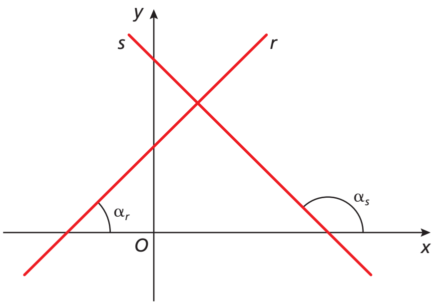
$$m_r = m_s \Leftrightarrow -\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

Retas concorrentes

As retas r e s têm coeficientes angulares diferentes.

$\alpha_r \neq \alpha_s \Leftrightarrow m_r \neq m_s$

Assim, para r e s concorrentes, temos:



$$m_r \neq m_s \Leftrightarrow -\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$$

Atividades resolvidas

R19. Determine a posição relativa das retas (r) $2x + 3y - 4 = 0$ e (s) $3x + y - 2 = 0$.

Resolução

A determinação da posição relativa é feita a partir dos coeficientes angulares:

$$m_r = -\frac{a}{b} \Rightarrow m_r = -\frac{2}{3}$$

$$m_s = -\frac{a}{b} \Rightarrow m_s = -\frac{3}{1} \Rightarrow m_s = -3$$

Como $m_r \neq m_s$, r é concorrente a s.

Atividades

46. Dados os pontos $A(1, 7)$, $B(0, 5)$, $C(3, 3)$, $D(1, -1)$ e $E(0, 7)$, determine a posição relativa das retas:

a) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CE}$

As retas são concorrentes.

b) $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{EC}$

As retas são concorrentes.

c) $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$

As retas são paralelas.

47. Discuta em função de m a posição relativa das retas r e s dadas a seguir:

a) $(r)\ 2mx + y - 3 = 0$ e $(s)\ 6x + y + 1 = 0$

se $m = 3 \Rightarrow r \mathbin{//} s$; se $m \neq 3 \Rightarrow r \times s$

b) $(r)\ 3x - 2y - 8 = 0$ e $(s)\ 2x - my + 3 = 0$

se $m = \frac{4}{3} \Rightarrow r \mathbin{//} s$; se $m \neq \pm 3 \Rightarrow r \times s$

48. Dada a reta s de equação $x - 2y + 3 = 0$, obtenha r paralela a s, tal que:

a) r passe por $P(-2, -1)$;

$2y - x = 0$

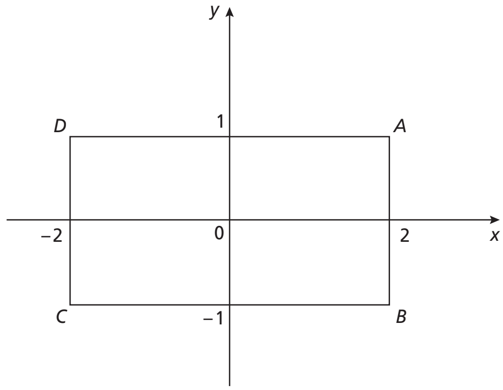
b) r passe pela origem.

$2y - x = 0$

49. Um dos lados de um paralelogramo está sobre a reta $(r) y = 2x - 1$. Sabendo que os vértices $A(0, -1)$ e $B(3, 5)$ estão sobre a reta r, determine a equação do lado $\overline{CD}$ para $C(3, 0)$.

$y = 2x - 6$

50. Um retângulo tem vértices $A(2, 1)$, $B(2, -1)$, $C(-2, -1)$ e $D(-2, 1)$.



Determine as equações:

a) das retas-suporte dos lados.

$\overleftrightarrow{AB}: x = 2$

$\overleftrightarrow{AD}: y = 1$

$\overleftrightarrow{CB}: y = -1$

$\overleftrightarrow{CD}: x = -2$

b) da reta-suporte da diagonal $\overline{AC}$.

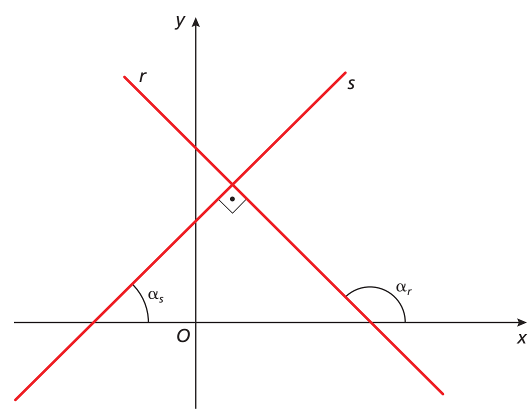
$\overleftrightarrow{AC}: x - 2y = 0$

Retas perpendiculares

Duas retas r e s não verticais são perpendiculares se e somente se os seus coeficientes angulares são tais que $m_r = -\dfrac{1}{m_s}$.

De fato: $r \perp s \Leftrightarrow \alpha_r = \alpha_s + \dfrac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen } \alpha_r = \cos \alpha_s \\ \cos \alpha_r = -\text{sen } \alpha_s \end{array}\right\} \Rightarrow \text{tg } \alpha_r = -\text{cotg } \alpha_s$$



Como $\text{cotg } \alpha_s = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha_s}$:

$\text{tg } \alpha_r = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha_s} \Rightarrow m_r = \dfrac{1}{m_s}$

Então:

$r \perp s \Rightarrow m_r = -\dfrac{1}{m_s}$

E, reciprocamente, se $m_r = -\dfrac{1}{m_s} \Rightarrow r \perp s$.

Logo, $r \perp s \Leftrightarrow m_r = -\dfrac{1}{m_s}$.

Atividades resolvidas

R20. Vamos verificar se as retas (r) $3x - 2y + 6 = 0$ e (s) $2x + 3y - 6 = 0$ são perpendiculares:

Resolução

$$\left.\begin{array}{l} m_r = -\dfrac{a}{b} = \dfrac{3}{2} \\ m_s = -\dfrac{a}{b} = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow m_r \cdot m_s = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1$$

Portanto, r e s são perpendiculares.

R21. Determine a equação da reta s que passa pelo ponto $P(4, 3)$ e é perpendicular à reta (r) $2x - 3y + 1 = 0$.

Resolução

$(r)\ 2x - 3y + 1 = 0 \Rightarrow m_r = \dfrac{2}{3}$

$s \perp r \Rightarrow m_s = -\dfrac{1}{m_r}$

$m_s = -\dfrac{1}{\frac{2}{3}} \Rightarrow m_s = -\dfrac{3}{2}$

Logo, como s passa por $P(4, 3)$:

$y - 3 = -\dfrac{3}{2}(x - 4) \Rightarrow 2y - 6 = -3x + 12$

$(s)\ 3x + 2y - 18 = 0$

Atividades

51. Em cada caso a seguir, verifique se as retas r e s são perpendiculares:

a) (r) $x + y = 1$ e (s) $x - y = -7$

São perpendiculares.

b) (r) $3x - y - 7 = 0$ e (s) $3x - y + 1 = 0$

Não são perpendiculares.

52. Determine k para que a reta (r) $kx - 3y + 9 = 0$ seja perpendicular à reta (s) $12x - 6y = 1$.

$k = -\frac{3}{2}$

53. Obtenha p para que (r) $x - 2py + 7 = 0$ seja perpendicular a (s) $-2px - y + 1 = 0$.

As retas são perpendiculares para qualquer valor real de p.

54. Determine a equação da reta s que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r nos seguintes casos:

a) $P(-2, 1)$ e (r) $x - y + 4 = 0$

$x + y + 1 = 0$

b) $P(0, 3)$ e (r) $2x + y - 3 = 0$

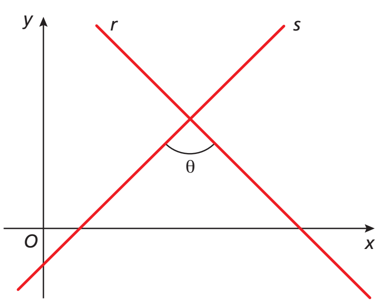
$x - 2y + 6 = 0$

55. Obtenha a reta s perpendicular a (r) $-x + y + 3 = 0$ e que passa pelo ponto $A(-2, 1)$.

$x + y + 1 = 0$

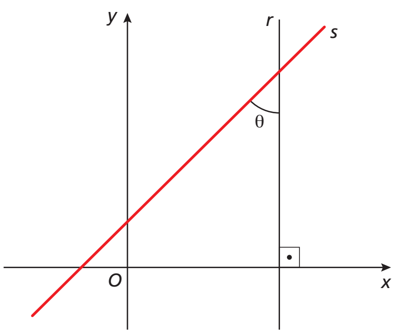
Ângulo entre duas retas

Conhecendo os coeficientes angulares m_r e m_s de duas retas r e s não paralelas aos eixos $\overleftrightarrow{Ox}$ e $\overleftrightarrow{Oy}$, podemos determinar o ângulo θ agudo formado entre elas:



$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \right|$$

Se uma das retas for vertical, teremos:



$$\operatorname{tg} \theta = \left| \frac{1}{m_s} \right|$$

Professor

Comente que o ângulo entre duas retas é aplicado em várias disciplinas, como Engenharia e Física, para entender a relação entre trajetórias de objetos em movimento, como dois veículos em uma pista, ou o ângulo entre uma força aplicada e uma superfície inclinada. Em Arquitetura, o ângulo entre paredes e tetos pode influenciar o design e a estabilidade de estruturas. Além disso, na Computação Gráfica, o cálculo do ângulo entre retas é essencial para criar efeitos visuais realistas em representações digitais de objetos tridimensionais. Ao ensinar o ângulo entre duas retas, você possibilita que os alunos explorem sua aplicação em contextos reais e compreendam como essa noção geométrica é valiosa em diversas áreas do conhecimento.

Atividades resolvidas

R22. Vamos determinar o ângulo formado entre as retas (*r*) $6x - 2y + 6 = 0$ e (*s*) $4x + 2y - 10 = 0$.

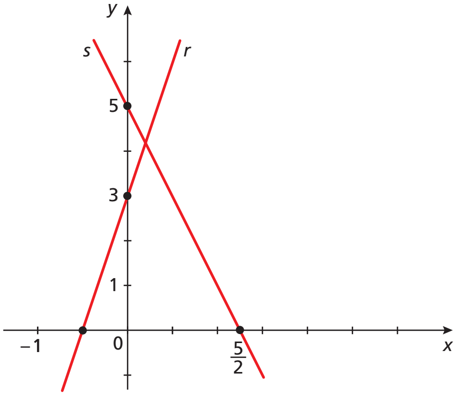
Resolução

(*r*) $6x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow m_r = 3$

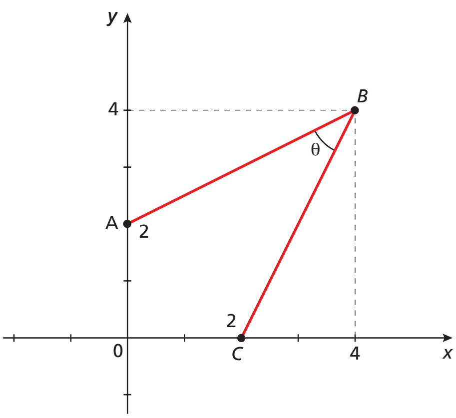
(*s*) $4x + 2y - 10 = 0 \Rightarrow m_s = -2$

$$\text{tg}\,\theta = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r}\right| \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \left|\frac{-2 - 3}{1 + (-2) \cdot 3}\right|$$

$\text{tg}\,\theta = 1 \Rightarrow \theta = 45°$



R23. Calcule a medida do ângulo $\theta = A\hat{B}C$ para $A(0, 2)$, $B(4, 4)$ e $C(2, 0)$.



Resolução

Chamando de *r* a reta que passa por *A* e *B* e de *s* a reta que passa por *B* e *C*, temos:

(*r*) $-x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow m_r = \frac{1}{2}$

(*s*) $2x - y - 4 = 0 \Rightarrow m_s = 2$

$$\text{tg}\,\theta = \left|\frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} \cdot 2}\right| \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

Da tabela trigonométrica, obtemos $\theta \approx 37°$.

Atividades

56. Determine a medida do ângulo formado pelos pares de retas a seguir:

a) (r) $2x - 4y + 1 = 0$ e (s) $3x + 9y + 7 = 0$

$\theta = 45°$

b) (u) $5x - y + 8 = 0$ e (v) $6x - 2y + 3 = 0$

$\theta \approx 7°$

57. Calcule a medida do ângulo $\theta = ABC$ para $A(1, 4)$, $B(3,3)$ e $C(-1, 0)$.

$\theta \approx 42°$

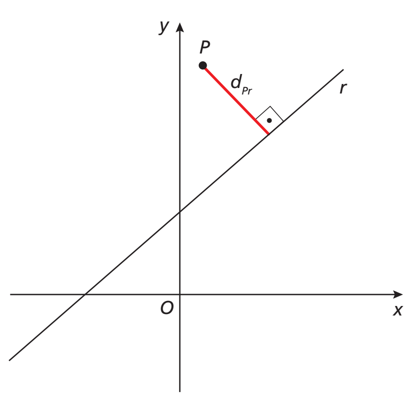
58. Determine o ângulo formado pelas retas $\overleftrightarrow{PQ}$ e $\overleftrightarrow{RS}$ para $P(1, 1)$, $Q(4, 2)$, $R(-1, -3)$ e $S(2, 0)$.

$\theta \approx 27°$

Distância de ponto a reta

Considere uma reta r, de equação $ax + by + c = 0$, e um ponto $P(x_0, y_0)$ não pertencente a r. Pode-se demonstrar que a distância entre P e r (d_{Pr}) é dada por:

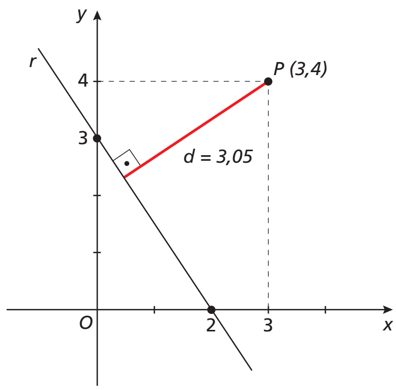
$$d_{Pr} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$



Atividades resolvidas

R24. Calcule a distância entre o ponto $P(3, 4)$ e a reta $(r)\ 3x + 2y - 6 = 0$.

Resolução



$$\begin{cases} P(3, 4) \\ (r)\ 3x + 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$d_{Pr} = \left| \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 - 6}{\sqrt{9+4}} \right| = \frac{11}{\sqrt{13}} = \frac{11\sqrt{13}}{13}$$

Portanto, $d_{Pr} \approx 3{,}05$.

R25. Calcule a distância entre as retas paralelas:

$(r)\ 5x - 3y + 15 = 0$ e $(s)\ 5x - 3y - 15 = 0$.

Resolução

A partir da fórmula da distância entre um ponto e uma reta, podemos determinar a distância entre duas retas paralelas de equações conhecidas. Para isso, basta obter um ponto em uma delas e calcular a distância desse ponto à outra reta. Atribuímos um valor arbitrário a x e obtemos o valor correspondente de y:

$x = 0 \Rightarrow 5 \cdot 0 - 3y + 15 = 0$

$y = 5 \Rightarrow P(0, 5)$

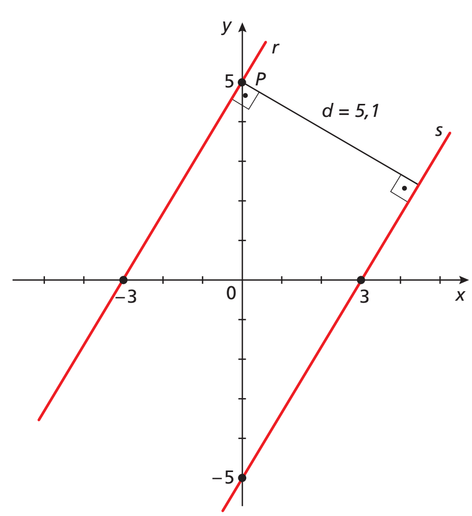
Para encontrar a distância de P a s, utilizamos a fórmula da distância de ponto a reta:

$$\begin{cases} P(0, 5) \\ (s)\ 5x - 3y - 15 = 0 \end{cases}$$

$$d_{Ps} = \left| \frac{5 \cdot 0 - 3 \cdot 5 - 15}{\sqrt{25+9}} \right| = \frac{30\sqrt{34}}{34} = \frac{15\sqrt{34}}{17}$$

Como $\sqrt{34} \approx 5{,}83$, teremos a distância entre r e s:

$d_{rs} \approx 5{,}14$



Atividades

59. Calcule a distância entre o ponto *P* e a reta *r* em cada um dos casos a seguir:

a) $P(2, 4)$ e $(r)\ 3x - 4y + 1 = 0$

$d_{Pr} = \dfrac{9}{5}$

b) $P(0, 0)$ e $(r)\ x + y = 0$

$d_{Pr} = 0$

c) $P(-2, 3)$ e $(r)\ 2x - y = 0$

$d_{Pr} = \dfrac{7\sqrt{5}}{5}$

d) $P(-2, -5)$ e $(r)\ 8x + 6y - 10 = 0$

$d_{Pr} = 5{,}6$

60. Calcule a medida da altura *h*, relativa ao lado $\overline{AC}$, do triângulo *ABC* que tem vértices *A*(3, 2), *B*(1, -5) e *C*(–2, –4).

$h = \dfrac{23\sqrt{61}}{61}$

61. Determine a distância entre cada par de retas paralelas a seguir:

a) $(r) - x - y + 2 = 0$ e $(s)\ x + y - 1 = 0$

$d_{Ps} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

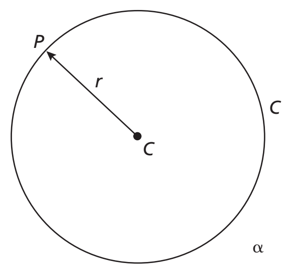
b) $(t)\ 2x + y - 7 = 0$ e $(u)\ 4x + 2y + 3 = 0$

$d_{Pu} = \dfrac{17\sqrt{5}}{10}$

Estudo da circunferência

Denominamos circunferência o conjunto de pontos de um plano α que equidistam de um ponto C de α.

$$C = \{P \in \alpha \mid \overline{PC} = r\}$$



r: raio

C: centro

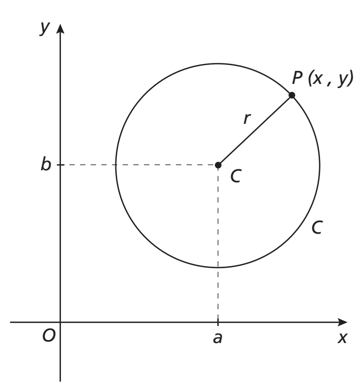

Professor

Comente que o estudo sobre a circunferência é de suma importância na Matemática e em várias áreas aplicadas, devido à sua presença frequente e à riqueza de suas aplicações. A circunferência é uma figura geométrica fundamental que não apenas intriga com sua simplicidade, mas também oferece insights valiosos em Geometria Analítica, Trigonometria, Física, Engenharia e outras disciplinas. O entendimento das equações que descrevem a circunferência permite analisar padrões de movimento circular, calcular distâncias e áreas, além de auxiliar na criação de gráficos e representações visuais. No contexto da Matemática, a circunferência é um elo crucial para compreender conceitos mais avançados, como áreas de setores e segmentos circulares, bem como aplicações em cálculos de probabilidade. Nas ciências aplicadas, a circunferência desempenha um papel vital, desde o projeto de rodas em Engenharia até o estudo de movimentos planetários e eletromagnetismo na Física. Ao ensinar sobre a circunferência, você proporciona aos alunos uma base sólida para explorar os princípios matemáticos subjacentes e aplicações práticas em uma ampla gama de campos.

Equação reduzida da circunferência

Considere um ponto $C(a, b)$ em um plano cartesiano e um número real $r \geq 0$. Qualquer ponto $P(x, y)$ que pertencer à circunferência C deverá satisfazer esta condição:

$$\overline{PC} = r$$



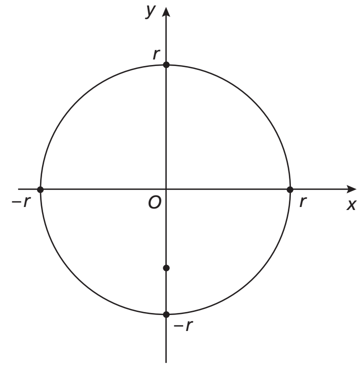
Usando a fórmula da distância entre dois pontos, temos:

$$d_{PC} = r \Rightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Essa equação é chamada equação reduzida da circunferência, de centro $C(a, b)$ e raio r.

Toda circunferência cuja equação é do tipo $x^2 + y^2 = r^2$ tem centro na origem e raio r.



Atividades resolvidas

R26. Escreva a equação reduzida de cada uma das circunferências a seguir, que obtemos conhecendo o centro C e o raio r:

a) $C(2, 3)$ e $r = 4$

b) $C(-2, -3)$ e $r = 1$

Resolução

a) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

b) $(x - (-2))^2 + (y - (-3))^2 = 1^2$

$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 1$

R27. Determine o centro e o raio da circunferência de equação $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$.

Resolução

Comparando $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 16$ com $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} a = 4 \\ b = 3 \\ r^2 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow C(4, 3) \text{ e } r = 4$$

R28. Em que pontos a circunferência de equação $(x+1)^2+(y-3)^2=1$ cruza o eixo $\overleftrightarrow{Oy}$?

Resolução

A circunferência cruza o eixo $\overleftrightarrow{Oy}$ nos pontos de abscissa $x = 0$. Assim:

$x = 0 \Rightarrow 1 + (y-3)^2 = 1 \Rightarrow (y-3)^2 = 0 \Rightarrow y = 3$

Logo, o ponto é (0, 3).

Atividades

62. Escreva a equação da circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r em cada um dos casos a seguir:

a) $C(-4, 1)$ e $r = 4$

$(x+4)^2+(y-1)^2=16$

b) $C(-2, -1)$ e $r = 3$

$(x+2)^2+(y+1)^2=9$

63. Determine o centro e o raio das circunferências de equações:

a) $(x-3)^2+(y-1)^2=9$

$C(3, 1)$; $r = 3$

b) $(x+2)^2+(y-5)^2=25$

$C(-2, 5)$; $r = 5$

c) $(x+1)^2+(y+1)^2=8$

$C(-1,-1)$; $r = 2\sqrt{2}$

64. Dados os pontos $A(2, 0)$, $B(-1, 1)$, $C(3, -4)$ e $D(4, 0)$, verifique quais estão na circunferência C de equação $(x+1)^2+(y+4)^2=25$.

$A \in C$; $B \in C$; $C \notin C$; $D \notin C$

65. Dados os pontos $A(1, 2)$, $B(4, -1)$ e $M(3, \sqrt{6})$, quais pertencem à circunferência de centro $C(0, -1)$ e raio igual a 4?

$A \notin C$; $B \in C$; $M \notin C$

66. Em que pontos a circunferência de equação $(x+1)^2+(y-3)^2=2$ cruza o eixo $\overleftrightarrow{Oy}$?

(0, 4) e (0, 2)

67. Determine os pontos em que a circunferência de equação $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 5$ cruza o eixo $\overleftrightarrow{Ox}$.

(6, 0) e (2, 0)

68. Escreva a equação da circunferência de centro $C(2, -1)$ que passa pelo ponto $P(1, 4)$.

$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 26$

Equação geral da circunferência

Dada uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio r, podemos obter sua equação geral a partir do desenvolvimento da equação reduzida:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - r^2 = 0$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

Atividades resolvidas

R29. Determine a equação geral da circunferência de centro $C(1, 2)$ e raio $r = 3$.

Resolução

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

Atividades

69. Escreva a equação geral da circunferência, dados o centro e o raio:

a) $C(2, 1)$ e $r = 1$

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$

b) $C(0, 0)$ e $r = 6$

$x^2 + y^2 - 36 = 0$

c) $C(-3, 2)$ e $r = 2$

$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$

70. Determine as coordenadas do centro e a medida do raio das circunferências de equações:

a) $x^2 + y^2 + 12y - 13 = 0$

$C(0, -6)$ e $r = 7$

b) $x^2 + y^2 + 10x + 8y + 25 = 0$

$C(-5, -4)$ e $r = 4$

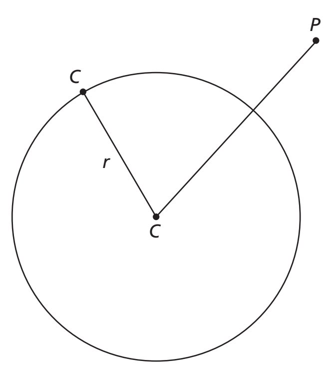
c) $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$

$C(3, -1)$ e $r = 5$

Posição de um ponto em relação a uma circunferência

Dados um ponto $P(x_o, y_o)$ e uma circunferência C de equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, existem três posições possíveis para o ponto P em relação a C:

– P é exterior a C

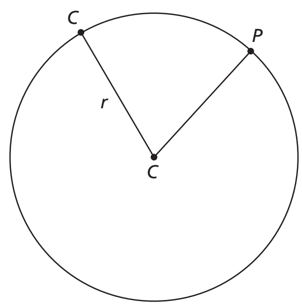


Nesse caso, $d_{CP} > r$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > r^2$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 > 0$$

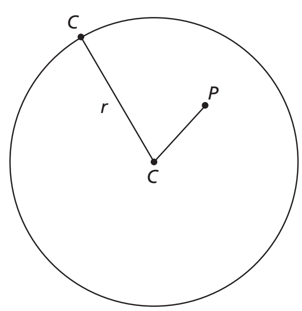
– P pertence a C



Nesse caso, $d_{CP} = r$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$$

– P é interior a C



Nesse caso $d_{CP} < r$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2$$
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 < 0$$

Atividades resolvidas

R30. Verifique a posição relativa dos pontos $P(-6,3)$, $Q(-5,4)$ e $S(0,1)$ em relação à circunferência C de equação $x^2 + y^2 + 12x - 12y + 63 = 0$.

Resolução

Basta substituir cada ponto na equação da circunferência para verificarmos sua posição relativa:

$P(-6,3) \Rightarrow (-6)^2 + 3^2 + 12 \cdot (-6) - 12 \cdot 3 + 63 = 36 + 9 - 72 - 36 = 0 \Rightarrow P$ pertence a C

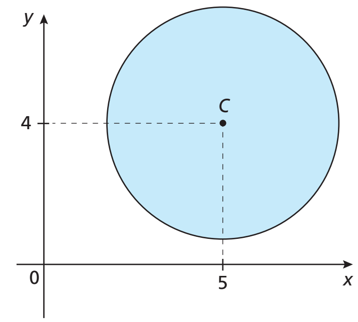
$Q(-5,4) \Rightarrow (-5)^2 + 4^2 + 12 \cdot (-5) - 12 \cdot 4 + 63 = 25 + 16 - 60 - 48 + 63 = -4 < 0 \Rightarrow Q$ é interior a C

$S(0,1) \Rightarrow (0)^2 + 1^2 + 12 \cdot (0) - 12 \cdot 1 + 63 = 1 - 12 + 63 = 52 > 0 \Rightarrow P$ é exterior a C

R31. Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos $P(x,y)$ tais que $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 \leq 9$. Discuta o significado geométrico da representação obtida.

Resolução

Os pontos que satisfazem a relação $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 \leq 9$ são interiores à circunferência de centro $C(5,4)$ e raio igual a 3:



Esse conjunto de pontos (circunferência e seu interior) define o **círculo** de centro $C(5,4)$ e raio igual a 3.

Atividades

71. Determine a posição de cada ponto a seguir em relação à circunferência C de equação $x^2 + y^2 + 2x - 20y - 20 = 0$.

a) $L(5, 0)$

Exterior a C.

b) $M(9, 5)$

Exterior a C.

c) $N(0, 0)$

Interior a C.

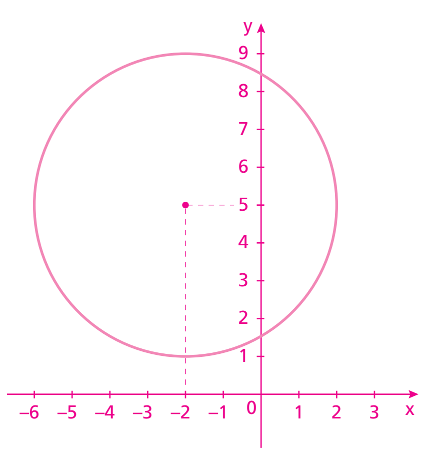
d) $P(10, 10)$

Pertence a C.

72. Obtenha o valor de k para que o ponto $P(k,2)$ pertença à circunferência $x^2 + (y - 1)^2 = 4$.

$k = \pm\sqrt{3}$

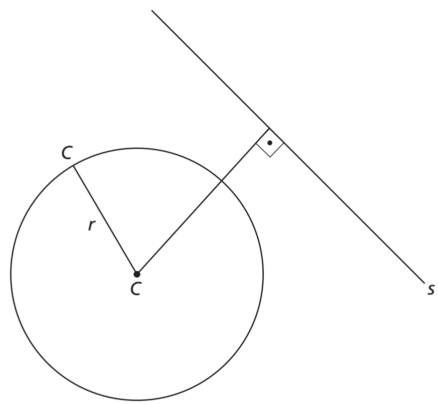
73. Represente graficamente o conjunto de pontos que satisfaz à sentença $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$.



Posição de uma reta em relação a uma circunferência

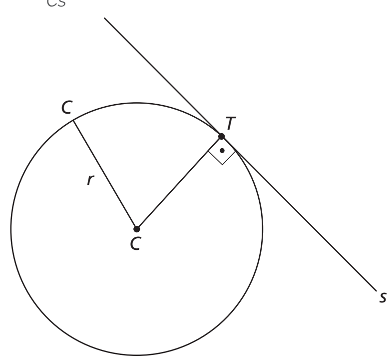
Dadas uma reta *s* e uma circunferência *C*, de centro *C* e raio *r*, há três posições possíveis para a reta *s* em relação à circunferência *C*. Essas posições são determinadas comparando-se a distância d_{Cs} do centro *C* à reta *s* com o raio *r* da circunferência.

– A reta *s* **não cruza** a circunferência *C*. Então, $d_{Cs} > r$.



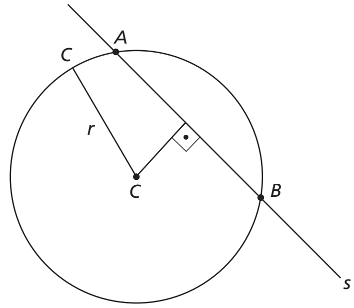
$$d_{Cs} > r \Leftrightarrow s \cap C = \varnothing$$

– A reta *s* é tangente a *C*. Então, $d_{Cs} = r$.



$$d_{Cs} = r \Leftrightarrow s \cap C = \{T\}$$

– A reta *s* é secante a ***C***. Então, $d_{Cs} < r$.



$$d_{Cs} < r \Leftrightarrow s \cap C = \{A,B\}$$

Atividades resolvidas

R32. Determine a posição da reta (s) $2x + y + 1 = 0$ em relação à circunferência (C) $x^2 + y^2 = 16$.

Resolução

Determinamos, inicialmente, o centro e o raio da circunferência:

$x^2 + y^2 = 16$ tem centro $C(0,0)$ e raio $r = 4$.

Em seguida, calculamos a distância do centro C à reta r e a comparamos com o raio:

$$d_{Cs} = \frac{|2.0 + 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

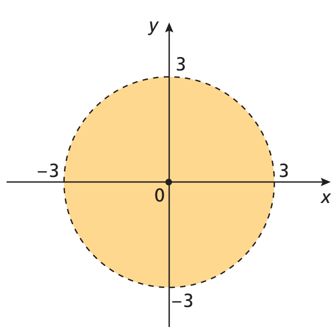
Como $\frac{\sqrt{5}}{5} < 4$, temos $d_{Cs} < r$, o que significa que a reta s é secante à circunferência C.

R33. Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos $P(x, y)$ que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ x + y \geq 3 \end{cases}$$

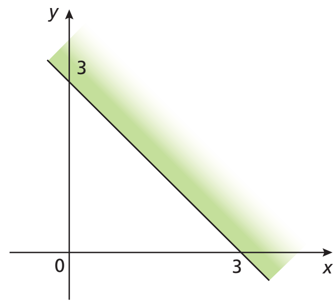
Resolução

Os pontos que satisfazem a relação $x^2 + y^2 < 9$ são interiores à circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio $r = 3$:

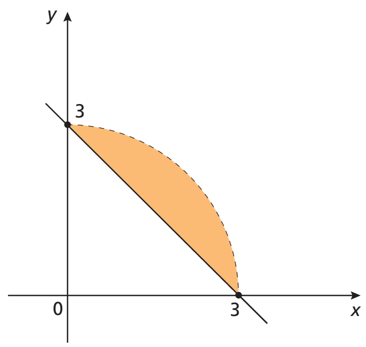


Para a relação $x + y \geq 3$, que também pode ser escrita como $y \geq -x + 3$, teremos o seguinte conjunto de pontos, obtidos atribuindo-se os valores $x = 0$ e $y = 0$ na equação da reta $y = -x + 3$:

$x = 0 \Rightarrow y = 3 \quad y = 0 \Rightarrow x = 3$



O sistema de inequações será, então, representado pela intersecção das duas regiões planas encontradas:



Atividades

74. Para cada reta dada, determine sua posição em relação à circunferência C de equação $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 64$.

a) (s) $3x + 4y + 40 = 0$

Exterior à circunferência.

b) (t) $3x + 4y + 32 = 0$

Tangente à circunferência.

75. Determine a posição da reta (s) $4x + 3y - 12 = 0$ em relação à circunferência cuja equação é dada por $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 47 = 0$.

Secante à circunferência.

76. Obtenha, caso existam, os pontos de intersecção da reta s com a circunferência C nos seguintes casos:

a) (s) $x - y - 1 = 0$ e (C) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

$s \cap C = \{(1, 0); (3, 2)\}$

b) (s) $y - 1 = 0$ e (C) $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = 16$

$s \cap C = \{(3, 1)\}$

77. Determine as equações das retas tangentes à circunferência $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 4$ que passam pelo ponto $P(5,2)$.

$y = 2$ ou $12x + 5y - 70 = 0$

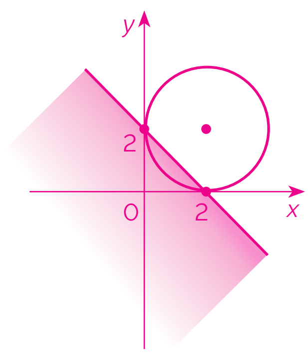
78. Obtenha as equações das retas tangentes à circunferência $x^2 + y^2 = 1$ que sejam paralelas à reta de equação $y = 2x$.

$A : 2x - y + \sqrt{5} = 0$

$B : 2x - 5y - \sqrt{5} = 0$

79. Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos $P(x, y)$ que satisfazem o sistema:

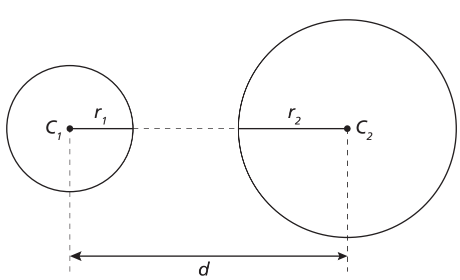
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 \geq 4 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$$



Posições relativas de duas circunferências

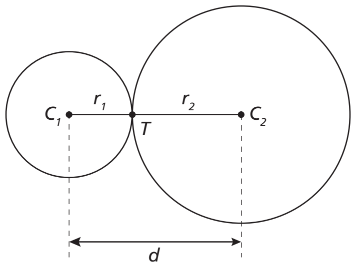
Para analisar as posições relativas das circunferências de centro C_1 e raio r_1 e de centro C_2 e raio r_2, devemos comparar a distância $d = C_1C_2$ entre seus centros com os valores de $r_1 + r_2$ ou de $|r_1 - r_2|$. Há cinco posições relativas possíveis para duas circunferências:

– circunferências externas



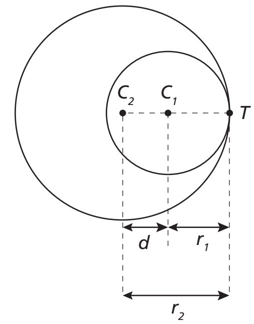
$$d > r_1 + r_2 \Rightarrow C_1 \cap C_2 = \varnothing$$

– circunferências tangentes externamente



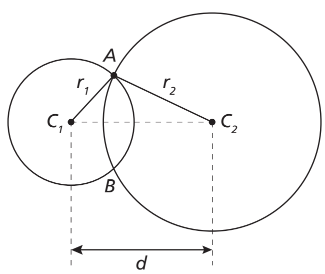
$$d = r_1 + r_2$$
$$C_1 \cap C_2 = \{T\}$$

– circunferências tangentes internamente



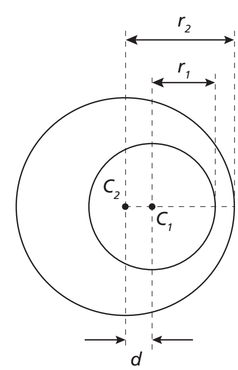
$$d = |r_1 - r_2|$$
$$C_1 \cap C_2 = \{T\}$$

– circunferências secantes



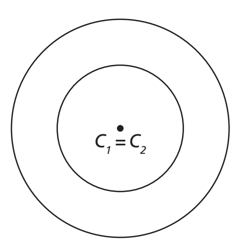
$$|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2 \Rightarrow C_1 \cap C_2 = \{A, B\}$$

– uma circunferência interior a outra



$$0 \leq d < |r_1 - r_2|$$
$$C_1 \cap C_2 = \varnothing$$

Um caso particular em que uma circunferência é interior a outra é aquele em que $C_1 = C_2$, ou seja, $d = 0$. Nesse caso, dizemos que as circunferências são concêntricas.



Atividades resolvidas

R34. Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos $P(x, y)$ que satisfazem a sentença: $9 < x^2 + y^2 < 25$. Discuta o significado geométrico da representação obtida.

Resolução

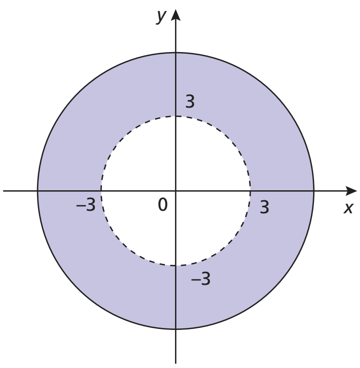
A sentença $9 < x^2 + y^2 < 25$ é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 9 < x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 < 25 \end{cases}$$

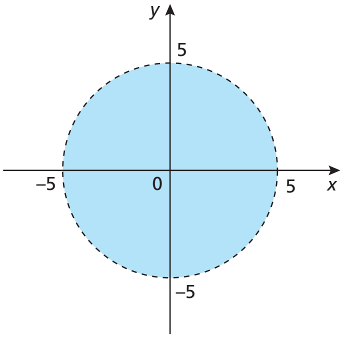
que pode ser escrito como:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 9 \\ x^2 + y^2 < 25 \end{cases}$$

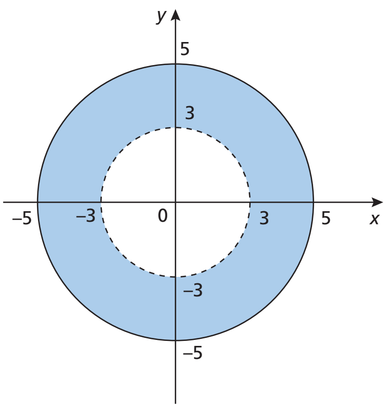
Os pontos que satisfazem à relação $x^2 + y^2 > 9$ são exteriores à circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio $r = 3$:



Os pontos que satisfazem a relação $x^2 + y^2 < 25$ são interiores à circunferência de centro $C(0, 0)$ e raio $r = 5$:



O sistema de inequações será, portanto, representado pela intersecção das duas regiões:



A região encontrada equivale a uma coroa circular resultante de dois círculos concêntricos de raios 3 e 5.

Atividades

80. Analise, em cada caso, as posições relativas das circunferências C_1 e C_2:

a) $(C_1)\ x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ e $(C_2)\ x^2 + y^2 - 4y = 0$

Como $|r_1 - r_2| < d_{C1C2} < r_1 + r_2$, as circunferências são secantes.

b) $(C_1)\ x^2 + y^2 - 10x - 24y + 168 = 0$ e $(C_2)\ x^2 + y^2 - 225 = 0$

Como $0 \leq d_{C1C2} < |r_1 - r_2|$, uma circunferência é interior à outra.

81. Caso existam, obtenha os pontos de intersecção das circunferências:

a) $(C_1)\ x^2 + y^2 - 16x - 16y + 63 = 0$ e $(C_2)\ x^2 + y^2 - 1 = 0$

Não existe ponto de interseção.

b) $(C_1)\ x^2 + y^2 - 2x + 2y - 1 = 0$ e $(C_2)\ x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$

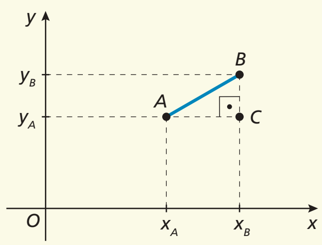
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Resumo

Professor

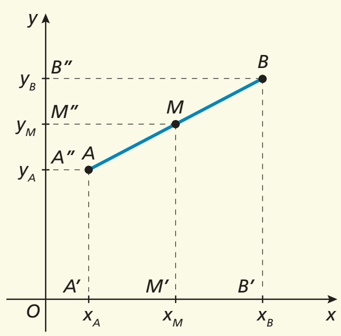
Encoraje os alunos a revisitarem o resumo sempre que precisarem, incentivando-os a anotar outros conceitos que considerem relevantes para um melhor entendimento. Além disso, sugira que utilizem o resumo como um auxílio durante a resolução da bateria final de atividades que virá a seguir. Isso permitirá que os estudantes apliquem de forma prática o conteúdo revisado e fortaleçam sua compreensão, ao mesmo tempo em que se tornam mais autônomos na gestão do próprio aprendizado. Dessa maneira, você estará proporcionando uma ferramenta valiosa que promove a retenção de conhecimento e a habilidade de aplicação em situações desafiadoras.

Distância entre dois pontos



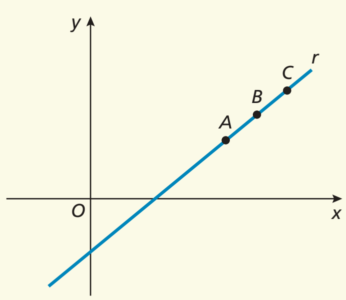
$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Ponto médio de um segmento *AB*



$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Alinhamento de três pontos

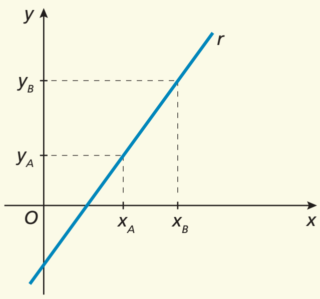


$$D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Área de um triângulo *ABC*

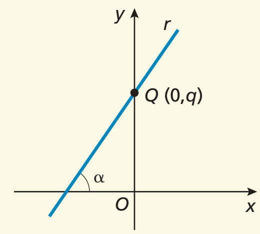
$$S = \frac{1}{2}|D| \Rightarrow S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Coeficiente angular



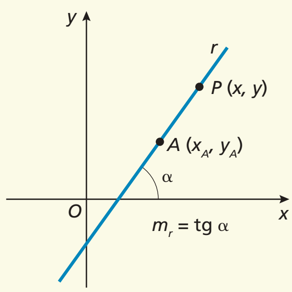
$$m_r = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Equação reduzida da reta



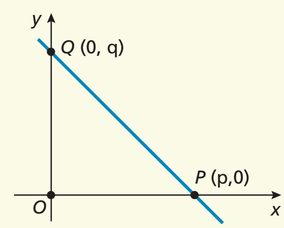
$y = mx + q$

Equação fundamental da reta



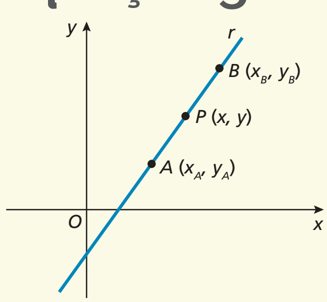
$$m_r = \frac{y - y_A}{x - x_A} \Rightarrow y - y_A = m_r(x - x_A)$$

Equação segmentária da reta



$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

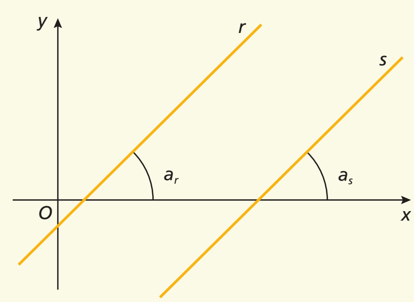
Equação geral da reta



$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow ax + by + c = 0$$

Posições relativas de duas retas

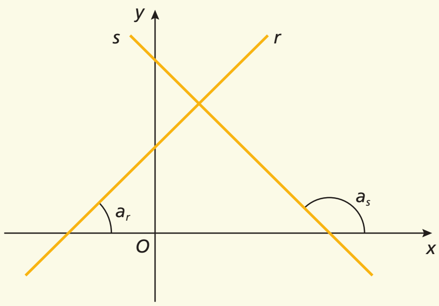
– Retas paralelas



$m_r = m_s \Leftrightarrow$

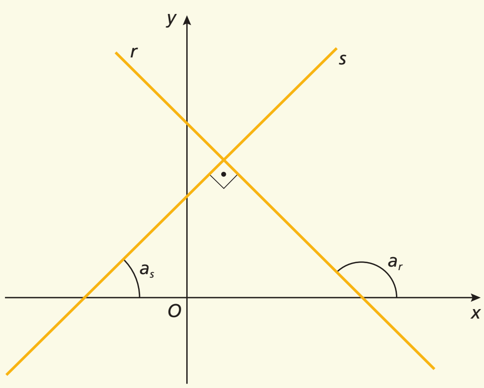
$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

– Retas concorrentes



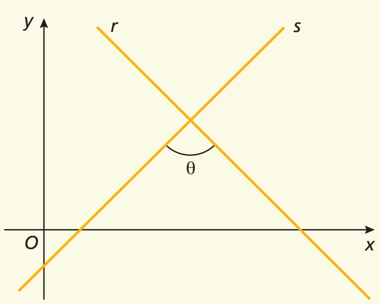
$$m_r \neq m_s \Leftrightarrow -\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$$

– Retas perpendiculares



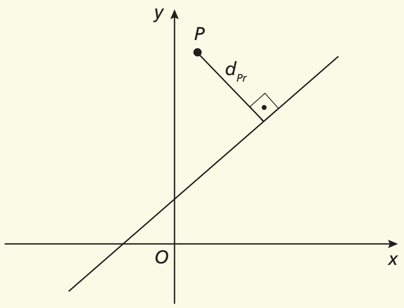
$r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$

Ângulo entre duas retas



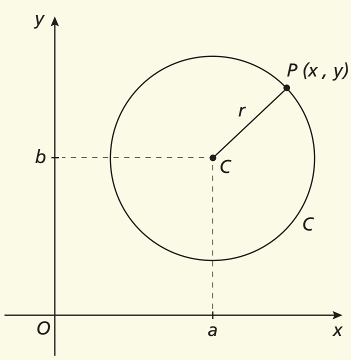
$$\text{tg}\ \theta = \left| \frac{m_s - m_r}{1 + m_s \cdot m_r} \right|$$

Distância de ponto a reta



$$d_{Pr} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Equação reduzida da circunferência



$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Equação geral da circunferência

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$

Avalie o que aprendeu

(EM13MAT401)

1. O ponto $P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ é médio de $\overline{AB}$. Dado $A(4, 2)$, calcule as coordenadas de B.

a) $B(0, 0)$

b) $B(-2, -2)$

c) $B(-1, -1)$

d) $B(2, 2)$

e) $B(1, 1)$

(EM13MAT307)

2. Calcule a área de um quadrado, sabendo que os pontos (1, 1) e (4, 5) são as coordenadas de dois vértices consecutivos.

a) S = 10 u.a.

b) S = 15 u.a.

c) S = 20 u.a.

d) S = 25 u.a.

e) S = 30 u.a.

(EM13MAT401)

3. Os pontos $A(4, 7)$ e $B(-2, 1)$ são as extremidades de uma diagonal de um quadrado. Calcule a medida do lado desse quadrado.

a) 3

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

(EM13MAT401)

4. Para que valores de k o coeficiente angular da reta de equação $-2kx + y - 12 = 0$ é igual a -8?

a) $k = -2$

b) $k = -4$

c) $k = -8$

d) $k = -10$

e) $k = -12$

(EM13MAT401)

5. Calcule o valor de k, sabendo que o ponto $(6, 3k)$ pertence à reta de equação $2y - 3x - 6 = 0$.

a) $k = 4$

b) $k = 6$

c) $k = 8$

d) $k = 10$

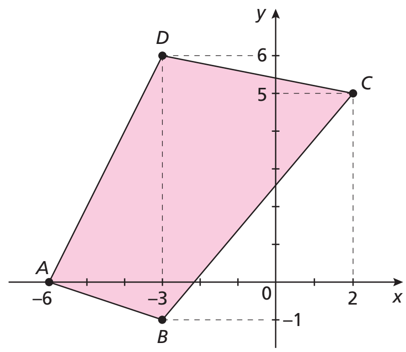
e) $k = 12$

Professor

A sugestão para a utilização desta série de atividades finais é como uma avaliação somativa. Essa avaliação pode ser adaptada conforme sua preferência, podendo ser realizada individualmente, em duplas ou em pequenos grupos, de acordo com o método que melhor se alinha aos objetivos de ensino e à dinâmica da sua turma. Isso proporcionará aos alunos uma oportunidade de demonstrar suas aprendizagens de maneira colaborativa ou individual, garantindo uma avaliação abrangente.

(EM13MAT506)

6. Calcule a área do polígono *ABCD*.



a) 12 u.a.

b) 16 u.a.

c) 20 u.a.

d) 24 u.a.

e) 28 u.a.

(EM13MAT401)

7. Determine as coordenadas do centro e o raio de uma circunferência de equação $(x - 3)^2 + y^2 = 3$.

a) $C(0, 3)$; $r = \sqrt{3}$

b) $C(3, 0)$; $r = \sqrt{3}$

c) $C(3, 3)$; $r = \sqrt{3}$

d) $C(5, 0)$; $r = \sqrt{5}$

e) $C(0, 5)$; $r = \sqrt{5}$

(EM13MAT307)

8. Determine a área de um círculo limitado por uma circunferência de centro (2, 1) e que passa pelo ponto (1, 1).

a) $S = 3$ u.a.

b) $S = 2$ u.a.

c) $S = 3\pi$ u.a.

d) $S = 2\pi$ u.a.

e) $S = \pi$ u.a.

(EM13MAT401)

9. O ponto $Q(2, k)$ pertence à circunferência de centro (1, 2) e de raio $\sqrt{5}$. Calcule o valor de k.

a) $k = 0$ ou $k = 2$

b) $k = 0$ ou $k = 4$

c) $k = 2$ ou $k = 4$

d) $k = 4$ ou $k = 6$

e) $k = 6$ ou $k = 8$

(EM13MAT401)

10. Determine a equação da reta paralela ao eixo das abscissas que tangencia a circunferência de equação $x^2 + (y - 2)^2 = 16$.

a) $y = 6$

b) $y = 7$

c) $y = 8$

d) $y = 9$

e) $y = 10$

Adobestock

Os fractais são criados graças aos estudos de teorias matemáticas e modernas tecnologias.

Professor

Neste último capítulo, mergulharemos nas fascinantes equações e funções polinomiais. Vamos começar compreendendo o que são as funções polinomiais, explorando sua estrutura e como elas se relacionam com os números e as variáveis. Investigaremos as diferentes classes de polinômios e seus graus, discutindo suas propriedades e comportamentos. Em seguida, adentraremos o mundo das equações polinomiais, explorando como resolvê-las e identificar suas raízes. Abordaremos as principais operações matemáticas aplicadas a polinômios, como adição, subtração, multiplicação e divisão, ampliando nossa capacidade de manipular essas expressões. Para consolidar esse conhecimento, apresentaremos exemplos práticos e desafios que ajudarão os alunos a aplicarem esses conceitos em situações do cotidiano e em problemas matemáticos mais complexos. O capítulo será uma oportunidade de explorar a interconexão entre funções polinomiais e equações, oferecendo uma base sólida para a compreensão de conceitos mais avançados na matemática e sua aplicação em diversas áreas.

Capítulo 6

Polinômios e equações polinomiais

A interseção entre as funções polinomiais e suas raízes abre um universo criativo e tecnológico fascinante. Através dessa compreensão matemática, é possível não apenas explorar os princípios fundamentais das equações polinomiais, mas também desencadear aplicações inovadoras. A programação de aplicativos de computador ou o desenvolvimento de inteligências artificiais pode permitir a criação de fractais complexos e visualmente intrigantes, semelhantes aos mostrados na imagem. Esses fractais são produtos diretos da manipulação e variação das raízes das funções polinomiais, oferecendo uma plataforma única para a expressão artística e a exploração matemática. Essa convergência entre matemática e tecnologia ressalta a profunda relação entre os conceitos teóricos e suas manifestações práticas, ilustrando como a compreensão das raízes polinomiais pode impulsionar a criatividade e a inovação em um mundo cada vez mais digital.

Neste capítulo, vamos explorar o que são as funções polinomiais e as equações polinomiais. Vamos descobrir como usar as principais operações matemáticas nesse contexto, além de desvendar o que está por trás dessas ideias matemáticas e como podem nos ajudar a resolver problemas do dia a dia.

Funções polinomiais

(EM13MAT301) (EM13MAT302)

Uma função p: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, em que $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ são números reais fixos com $a_n \neq 0$, é denominada função polinomial de grau n ($n \in \mathbb{N}$).

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

- x é a variável do polinômio
- $n \in \mathbb{N}$ é o grau de $p(x)$ ($a_n \neq 0$)
- $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ são os coeficientes do polinômio
- a_0 é o coeficiente independente ou termo independente

No polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, se $a_n \neq 0$, temos $gr(p) = n$.

Notação:
$gr(p) = n$ indica que o grau do polinômio p é n

Definimos valor numérico de um polinômio $p(x)$ ao número real que se obtém substituindo a variável x por um número α. Quando esse valor acarretar em $p(\alpha) = 0$, dizemos que α é um zero do polinômio ou uma raiz da equação $p(x) = 0$.

Igualdade de polinômios

Dois polinômios são iguais, ou idênticos, se e somente se todos os coeficientes dos termos de mesmo grau são iguais.

Dados: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$, temos:

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = b_n \\ a_{n-1} = b_{n-1} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_1 = b_1 \\ a_0 = b_0 \end{cases}$$

Professor

Neste tópico de funções polinomiais, é fundamental estabelecer uma base sólida ao explicar aos alunos como identificar, entender e manipular funções polinomiais. Comece abordando conceitos básicos, como grau e coeficientes, antes de explorar os diferentes tipos de polinômios, como lineares, quadráticos, cúbicos, e assim por diante. Destaque a importância das raízes e fatores de polinômios, mostrando como eles se relacionam com interceptos no gráfico. Para tornar o conteúdo mais envolvente, relacione as funções polinomiais com situações do mundo real, como modelagem de fenômenos naturais ou padrões matemáticos em finanças. Incentive os alunos a resolver problemas práticos usando polinômios, estimulando sua criatividade na criação de equações que descrevam cenários do dia a dia. Isso não apenas fortalecerá suas habilidades matemáticas, mas também os ajudará a perceber a presença desses conceitos além da sala de aula.

Atividades resolvidas

R1. Nos polinômios seguintes, indique a variável, os coeficientes e o grau de $p(x)$, se possível:

a) $p(x) = 3x^2 + 2x - 4$

b) $p(x) = 3x + 1$

Professor

Dentro da metodologia deste material, as atividades resolvidas desempenham um papel fundamental como ferramentas auxiliares no processo de ensino e aprendizagem. Sugerimos que você estimule os alunos a acompanharem atentamente o detalhado passo a passo de cada resolução, e, se possível, os encoraje a replicar as resoluções em seus próprios cadernos. Além disso, eles podem explorar a criação de pequenas variações das atividades já solucionadas, o que proporcionará um maior engajamento e compreensão dos conceitos abordados. Isso permitirá que os alunos apliquem os princípios aprendidos de forma prática e reforcem sua compreensão do conteúdo estudado.

Resolução

a) $p(x) = 3x^2 + 2x - 4$

- x é variável
- 3, 2, −4 são coeficientes
- $\text{gr}(p) = 2$

b) $p(x) = 3x + 1$

- x é variável
- 3, 1 são coeficientes
- $\text{gr}(p) = 1$

R2. Discuta o grau do polinômio $p(x) = (k + 1)x^2 + 3x + 2$ em função de $k \in$ R.

Resolução

Vamos analisar o coeficiente do termo de maior grau.

$k + 1 = 0 \Rightarrow k = -1$

Se $k \neq -1$, então $\text{gr}(p) = 2$.

Se $k = -1$, então $\text{gr}(p) = 1$.

R3. Em $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$, determine o valor numérico de $p(x)$ par a:

a) $x = 2$ b) $x = 0$

Resolução

a) $x = 2 \Rightarrow p(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 \Rightarrow p(2) = 3$

b) $x = 0 \Rightarrow p(0) = 2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 1 \Rightarrow p(0) = 1$

R4. Determine a, b e c para que o polinômio $p(x) = (a + b - 5)x^2 + (a - b - 1)x + c + 4$ seja identicamente nulo.

Resolução

Se $p(x) = 0$, então todos os coeficientes são nulos:

$$\begin{cases} a + b - 5 = 0 & \text{(I)} \\ a - b - 1 = 0 & \text{(II)} \\ c + 4 = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

De (III), temos: $c = -4$

De (I) e (II), temos: $\begin{cases} a + b = 5 \\ a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 3$ e $b = 2$

Logo, $a = 3$, $b = 2$ e $c = -4$.

Atividades

1. Determine o grau dos polinômios a seguir:

a) $p(x) = 3x^3 + 2x - 1$

gr(p) = 3

b) $p(x) = x$

gr(p) = 1

c) $p(x) = 2x^7 - 3x^2 + 1$

gr(p) = 7

d) $p(x) = 4 + x - 2x^2 + 3x^4$

gr(p) = 4

2. Discuta o grau dos polinômios em função de $k \in \mathbb{R}$:

a) $p(x) = (2k + 6)x^3 + (3 + k)x + 1$

se $k = -3 \Rightarrow gr(p) = 0$

se $k \neq -3 \Rightarrow gr(p) = 3$

b) $p(x) = (k^2 - 4)x^2 + (k - 2)x - 3$

se $k = 2 \Rightarrow gr(p) = 0$

se $k = -2 \Rightarrow gr(p) = 1$

se $k \neq \pm 2 \Rightarrow gr(p) = 2$

3. Determine o valor de k para que o polinômio $p(x) = (k - 4)x^3 + (k^2 - 16)x^2 + (k + 4)x + 4$ seja de grau 2.

Não existe k para $gr(p) = 2$.

4. Dado o polinômio $p(x) = 3x^5 - x^2 + 3$, calcule:

a) $p(0)$

3

b) $p(1)$

5

5. Dado o polinômio $p(x) = 2x^2 + kx - 2$, determine k, sabendo que $p(2) = 6$.

$k = 0$

6. No polinômio $p(x) = x^3 - kx^2 + x + 1$, determine k se:

a) $p(1) = 0$

$k = 3$

b) $p(3) = 1$

$k = \frac{10}{3}$

7. Determine k para que $x = 3$ seja raiz do polinômio $p(x) = kx^3 + x^2 + 2x + 1$.

$k = -\frac{16}{27}$

8. Mostre que 1 e 3 são raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.

Se 1 é raiz de $p(x)$, então devemos ter $p(1) = 0$.

$p(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 1 + 3 = 0$

Se 3 é raiz de $p(x)$, então devemos ter $p(3) = 0$.

$p(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 3 + 3 = 0$

Como $p(1) = p(3) = 0$, temos que 1 e 3 são raízes de $p(x)$.

9. Determine a, b e c para que os seguintes polinômios sejam nulos:

a) $p(x) = (a + 2)x^3 + (b - 2)x + (c^2 - 9)$

$a = -2$; $b = 2$ e $c = \pm 3$

b) $p(x) = (a + b)x^3 + (a + 2c)x^2 + (b + c)x$

$a = b = c = 0$

10. Determine o valor de a e b em cada caso:

a) $p(x) = ax^2 + bx$ e $p(x) = 0$

$a = 0$ e $b = 0$

b) $p(x) = ax^2 + bx + 2$, $p(2) = 4$ e $p(3) = 6$

$a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{1}{3}$

c) $p(x) = ax^3 - 4x + b$, $p(1) = -2$ e $p(-1) = 5$

$a = \frac{1}{2}$ e $b = \frac{3}{2}$

11. Determine a e b, sabendo que os números 2 e −2 são raízes do polinômio $p(x) = x^3 - 2x^2 + ax + b$.

$a = -4$ e $b = 8$

Adição e subtração de polinômios

Para somar dois polinômios, adicionamos os coeficientes dos termos de mesmo grau. Da mesma forma, para obter a diferença de dois polinômios, subtraímos os coeficientes dos termos de mesmo grau.

Atividades resolvidas

R5. Adicione os polinômios $p(x)$ e $q(x)$:

$p(x) = 4x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 1$

$q(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 7$

Resolução

$p(x) + q(x) = 4x^5 - 3x^4 - 2x^2 + 1 + x^4 - 3x^3 - x^2 + x + 7$

$p(x) + q(x) = 4x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + x + 8$

Note que, nesse caso, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \text{gr}(p) = 5 \\ \text{gr}(q) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{gr}\,(p + q) = 5$$

Nos casos de adição e subtração de polinômios, o polinômio resultante terá grau igual ou menor ao polinômio de maior grau.

R6. Obtenha a diferença $p(x) - q(x)$ dos polinômios:

$p(x) = 6x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1$

$q(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 - x - 1$

Resolução

$p(x) - q(x) = 6x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1 - 3x^4 + x^3 - 2x^2 + x + 1$

$p(x) - q(x) = 3x^4 - x^3 + 3x^2 + 2$ e o grau do polinômio obtido é 4.

Multiplicação de polinômios

Para obter o produto de dois polinômios, multiplicamos cada termo de um deles por todos os termos do outro, somando os termos de mesmo grau.

O grau do polinômio-produto $p(x) \cdot q(x)$ é a soma dos graus de $p(x)$ e $q(x)$, se nenhum deles for o polinômio nulo: $\text{gr}(p \cdot q) = \text{gr}(p) + \text{gr}(q)$.

Atividades resolvidas

R7. Vamos multiplicar os polinômios:

$p(x) = 3x^2 + 2x$

$q(x) = x^3 - x^2 + 5$

Resolução

$p(x) \cdot q(x) = (3x^2 + 2x)\,(x^3 - x^2 + 5)$

$p(x) \cdot q(x) = 3x^2\,(x^3 - x^2 + 5) + 2x(x^3 - x^2 + 5)$

$p(x) \cdot q(x) = 3x^5 - 3x^4 + 15x^2 + 2x^4 - 2x^3 + 10x$

$p(x) \cdot q(x) = 3x^5 - x^4 - 2x^3 + 15x^2 + 10x$

Observe o grau do polinômio-produto:

$$\left.\begin{array}{l} gr(p) = 2 \\ gr(q) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow gr\,(p \cdot q) = 5$$

R8. Dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ têm graus n e m, respectivamente. Sabendo que o grau de $p(x) \cdot q(x)$ é 7 e que $m - n = -1$, determine o grau de $p(x)$ e $q(x)$.

Resolução

$gr(p \cdot q) = 7 \Rightarrow m + n = 7$

$$\left\{\begin{array}{l} m + n = 7 \\ m - n = -1 \end{array}\right. \Rightarrow m = 3 \text{ e } n = 4$$

Logo:

$$\left.\begin{array}{l} gr(p) = 4 \\ gr(q) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow gr\,(p \cdot q) = 7$$

Atividades

12. Dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ têm o mesmo grau n. Analise o grau da soma $p(x) + q(x)$, sabendo que o grau de $p(x) \cdot q(x) = 8$.

$gr(p + q) \leq 4$

13. Dados os polinômios $p(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 1$, $q(x) = 3x^5 + 1$ e $t(x) = 4x^2 - 1$, obtenha:

a) $p(x) + q(x)$

$3x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2$

b) $q(x) \cdot t(x)$

$12x^7 - 3x^5 + 4x^2 - 1$

c) $q(x) - t(x)$

$3x^5 - 4x^2 + 2$

d) $t(x) \cdot p(x) - q(x)$

$4x^6 - 7x^5 + 7x^4 + x^3 - 6x^2$

Observação: $(t(x))^2 = t(x) \cdot t(x)$ e $(q(x))^2 = q(x) \cdot q(x)$

14. Verifique se cada afirmação é verdadeira ou falsa:

a) Se o grau do polinômio p é 5, então o grau do polinômio $2p$ é 10.

falsa

b) Se o grau do polinômio p é m e do polinômio q é n, com $m > n$, então o grau do polinômio $p + q$ é m.

verdadeira

Divisão de polinômios

Considere os polinômios $p(x)$ e $d(x)$, não nulos, tais que o grau de $p(x)$ seja maior ou igual ao grau de $d(x)$. Nessas condições, podemos efetuar a divisão de $p(x)$ por $d(x)$, encontrando dois polinômios, $q(x)$ e $r(x)$, que satisfazem as seguintes condições:

- $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$
- $r(x) = 0$ ou $\text{gr}(r) < \text{gr}(d)$

$p(x)$: dividendo

$d(x)$: divisor

$q(x)$: quociente

$r(x)$: resto

Se $r(x)$ for o polinômio nulo, dizemos que $p(x)$ é divisível por $d(x)$.

A divisão de dois polinômios pode ser feita por dois métodos: o método da chave e o método de Descartes.

Método da chave

– Ordenamos $p(x)$ e $d(x)$ segundo as potências decrescentes de x e montamos a chave:

$$\begin{array}{r|l} p(x) & d(x) \\ \hline r(x) & q(x) \end{array}$$

– Dividimos o primeiro termo de $p(x)$ pelo primeiro de $d(x)$, obtendo o primeiro termo de $q(x)$.

– Multiplicamos o termo obtido pelo divisor $d(x)$ e subtraímos de $p(x)$.

– Continuamos o processo até obter um resto de grau menor que o de $d(x)$ ou resto nulo.

Método de Descartes

Consiste basicamente na determinação dos coeficientes do quociente e do resto a partir da identidade:

$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$

Atividades resolvidas

R9. Divida $p(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 3$ por $d(x) = x^2 - 3x + 2$ pelo método de Descartes.

Resolução

Devemos encontrar $q(x)$ e $r(x)$ tais que:

$x^3 - 4x^2 + 7x - 3 = (x^2 - 3x + 2) \cdot q(x) + r(x)$

Vamos analisar o grau de $q(x)$ e de $r(x)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{gr}(p) = 3 \\ \text{gr}(d) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{gr}(q) = \text{gr}\left(\frac{p}{d}\right) = 1$$

Como $\text{gr}(r) < \text{gr}(d)$, devemos impor $\text{gr}(r) = \text{gr}(d) - 1 \Rightarrow \text{gr}(r) = 2 - 1 \Rightarrow \text{gr}(r) = 1$.

Assim, temos: $q(x) = ax + b$ e $r(x) = cx + d$

$$\underbrace{x^3 - 4x^2 + 7x - 3}_{p(x)} = \underbrace{\left(x^2 - 3x + 2\right)}_{d(x)}\underbrace{\left(ax + b\right)}_{q(x)} + \underbrace{\left(cx + d\right)}_{r(x)}$$

Efetuando as operações e agrupando os termos semelhantes, obtemos:

$x^3 - 4x^2 + 7x - 3 = ax^3 + (-3a + b)x^2 + (2a - 3b + c)x + 2b + d$

Para que haja igualdade, devemos ter:

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ -3a + b = -4 \\ 2a - 3b + c = 7 \\ 2b + d = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1 \quad b = -1 \quad c = 2 \quad d = -1$$

Assim, $q(x) = x - 1$ e $r(x) = 2x - 1$.

R10. Determine o valor de k para que a divisão de $p(x) = 4x^3 - 3x^2 + kx + 3$ por $d(x) = x^2 - 1$ seja exata.

Resolução

A divisão $\frac{p(x)}{d(x)}$ é exata se $r(x) = 0$.

Como o grau de $q(x)$ é 1, pois $\text{gr}(q) = \text{gr}\left(\frac{p}{d}\right)$, temos:

$4x^3 - 3x^2 + kx + 3 = (x^2 - 1)\,(ax + b)$

$4x^3 - 3x^2 + kx + 3 = ax^3 + bx^2 - ax - b$

Comparando, obtemos:

$$\left.\begin{array}{l} 4 = a \\ -3 = b \\ k = -a \\ 3 = -b \end{array}\right\} \Rightarrow a = 4,\ b = -3 \text{ e } k = -4$$

Atividades

15. Efetue a divisão de $p(x)$ por $d(x)$ em cada item:

a) $p(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 5$ e $d(x) = x^2 - 2x + 1$

$q(x) = x$ e $r(x) = 5x - 5$

b) $p(x) = x^3 + 5x^2 - 7x + 4$ e $d(x) = x + 1$

$q(x) = x^2 + 4x - 11$ e $r(x) = 15$

c) $p(x) = 5x^5 - 2x^4 - 4x^3 - 4x$ e $d(x) = x^2 + x$

$q(x) = 5x^3 - 7x^2 + 3x - 3$ e $r(x) = -x$

d) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ e $d(x) = x^2 + 2x - 1$

$q(x) = x - 5$ e $r(x) = 14x - 6$

16. Calcule o valor de m e n para que a divisão de $p(x) = 8x^4 + mx^3 + 2x^2 - nx + 1$ por $d(x) = 4x^2 + 3x - 1$ seja exata.

$m = \frac{50}{3}$ e $n = \frac{17}{3}$

17. Determine os valores de p e q para que o polinômio $x^3 + px + q$ seja divisível por $x^2 + 2x + 5$.

$p = 1$ e $q = -10$

18. Dividindo um polinômio $p(x)$ por $d(x) = x^2 - 4x + 1$, obtém-se quociente $q(x) = x + 4$ e resto $r(x) = 15x + 1$. Determine $p(x)$.

$p(x) = x^3 + 5$

19. Determine um polinômio $p(x)$ cuja divisão por $d(x) = 2x - 6$ resulta um quociente $q(x) = -x^3 - 2x^2 + 1$ e resto 6.

$p(x) = -2x^4 + 2x^3 + 12x^2 + 2x$

Teorema do resto

O resto $r(x)$ da divisão de um polinômio $p(x)$ por um binômio do primeiro grau $d(x) = ax + b$ é igual ao valor numérico de $p(x)$ para $x = -\dfrac{b}{a}$ $(a \neq 0)$.

$$p(x) = \underbrace{(ax + b)}_{d(x)} \cdot q(x) + r(x)$$

Como o grau de $d(x)$ é 1, então o grau de $r(x)$ é zero. Logo, $r(x)$ é um polinômio constante, ou seja, $r(x) = k$.

Para $x = -\dfrac{b}{a}$, temos:

$$p\left(-\frac{b}{a}\right) = \underbrace{\left(-a \cdot \frac{b}{a} + b\right)}_{0} \cdot q\left(-\frac{b}{a}\right) + k \; .$$

Logo, $r(x) = p\left(-\dfrac{b}{a}\right)$.

Em particular, quando a divisão de $p(x)$ por $d(x) = ax + b$ é exata, o resto será $r(x) = p\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$, ou seja, $-\dfrac{b}{a}$ é o zero do polinômio $p(x) = 0$.

Teorema de D'Alembert

Um polinômio $p(x)$ é divisível por $d(x) = ax + b$ se e somente se $p\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$.

Se $p(x) = d(x) \cdot q(x) = (ax + b) \cdot q(x)$, então:

$$p\left(-\frac{b}{a}\right) = \left[a \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) + b\right] \cdot q\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \cdot q\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$$

E reciprocamente, se $p(x) = (ax + b) \cdot q(x) + k$, então:

$$0 = p\left(-\frac{b}{a}\right) = \left[a \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) + b\right] \cdot q\left(-\frac{b}{a}\right) + k = 0 \cdot q\left(-\frac{b}{a}\right) + k \Rightarrow k = 0$$

Professor

Ao ensinar sobre o teorema do resto, destaque sua utilidade para verificar raízes de polinômios e simplificar avaliações. Relacione-o com a divisão de polinômios, enfatizando que o resto da divisão por (x - a) é zero quando x = a. Além disso, ao abordar o teorema d'Alembert, explique como ele ajuda a identificar possíveis raízes racionais, facilitando a fatoração e a resolução de equações. Conecte ambos os teoremas a exemplos práticos para demonstrar sua aplicação no mundo real, tornando o aprendizado mais envolvente e tangível para os alunos.

Atividades resolvidas

R11. Sem efetuar a divisão, determine o resto da divisão de $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + x + 1$ por $d(x) = x - 2$.

Resolução

Pelo teorema do resto, temos:

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= 3x^3 - 4x^2 + x + 1 \\ d(x) &= x - 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow r(x) = p(2)$$

$r(x) = 3 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 1 \Rightarrow r(x) = 11$

R12. Dividindo um polinômio $p(x)$ por $x - 2$, obtém-se resto 5 e, dividindo por $x + 1$, obtém-se resto -2. Determine o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - 2) \cdot (x + 1)$.

Resolução

O grau do divisor $d(x) = (x - 2) \cdot (x + 1)$ é 2, então o grau de $r(x)$ é 1 e, portanto, $r(x) = ax + b$.

$p(x) = (x - 2)\ (x + 1)\ q(x) + ax + b$

Como $p(2) = 5$ e $p(-1) = -2$, temos:

$p(2) = 5 \Rightarrow 2a + b = 5$

$p(-1) = -2 \Rightarrow -a + b = -2$

Resolvendo o sistema, encontramos: $a = \dfrac{7}{3}$ e $b = \dfrac{1}{3}$.

Logo, o resto é $r(x) = \dfrac{7}{3}x + \dfrac{1}{3}$.

Atividades

20. Calcule o valor de t, sabendo que o resto da divisão de $p(x) = 4x^3 + 2x^2 - tx + 5$ por $x + 2$ é 1.

$t = 10$

21. Determine o resto $r(x)$ das divisões de $p(x)$ por $d(x)$ em cada caso a seguir:

a) $p(x) = 2x^4 - 3x^3 + 1$ e $d(x) = 2x - 1$

$r(x) = \frac{3}{4}$

b) $p(x) = x^5 - x^4 + 2x^3 - x^2$ e $d(x) = x - 1$

$r(x) = 1$

c) $p(x) = x^2 - 5x + 6$ e $d(x) = x - 3$

$r(x) = 0$

22. Calcule o valor de m para que o resto da divisão de $p(x) = x^3 - 2x^2 + mx + m - 1$ por $d(x) = x - 2$ seja 5.

$m = 2$

23. Determine o valor de a para que o resto da divisão de $p(x) = 4x^2 - ax + 1$ por $d(x) = 2x - 6$ seja igual a -5.

$a = 14$

24. Calcule k para que o polinômio $p(x) = 2x^3 - kx^2 + 5x - 1$ seja divisível por $x - 1$.

$k = 6$

25. Determine os valores de a e b, sabendo que os polinômios $p(x) = -x^2 + (a - b)x$ e $t(x) = 2x^3 - ax^2 - ax + 2b$ são ambos divisíveis por $x + 1$.

$a = 0$ e $b = 1$

26. Obtenha o resto $r(x)$ da divisão de um polinômio $p(x)$ por $(x + 2)(x - 2)$, sabendo que os restos das divisões de $p(x)$ por $(x + 2)$ e por $(x - 2)$ são, respectivamente, -1 e 3.

$r(x) = x + 1$

27. Obtenha o resto $r(x)$ da divisão de um polinômio $p(x)$ por $(x^2 - 9)$, sabendo que os restos da divisão de $p(x)$ por $(x + 3)$ e por $(x - 3)$ são, respectivamente, 2 e -1.

$r(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Algoritmo de Briot-Ruffini

O algoritmo de Briot-Ruffini consiste em um dispositivo prático para efetuar a divisão de um polinômio $p(x)$ por um binômio $d(x) = x - a$.

Considere $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$.

Podemos descrever esse dispositivo pelos seguintes passos:

• Dispõem-se todos os coeficientes de $p(x)$ na chave:

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ \hline & & & & & \end{array}$$

• Coloca-se à esquerda a raiz de $d(x) = x - a = 0$:

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ \hline & & & & & \end{array}$$

• Abaixa-se o primeiro coeficiente (a_n), que corresponde ao primeiro coeficiente de $q(x)$. Em seguida, multiplica-se a_n pela raiz a e soma-se o resultado ao segundo coeficiente de $p(x)$, obtendo-se o segundo coeficiente de $q(x)$:

$$\begin{array}{c|ccccc} a & a_n & a_{n-1} & \dots & a_1 & a_0 \\ \hline & a_n & a_n \cdot a + a_{n-1} & & & \end{array}$$

• Multiplica-se por a o resultado obtido para o segundo coeficiente de $q(x)$ e soma-se esse resultado ao terceiro coeficiente de $p(x)$, e assim sucessivamente.

Divisão de $p(x)$ por $x - a$:

$$\begin{array}{c|c|c} a & \text{coeficiente de } p(x) & \\ \hline & \text{coeficiente de } q(x) & \text{resto } r(x) \end{array}$$

Para $d(x) = ax + b$, devemos tomar o seguinte cuidado para obter o quociente:

$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$

$p(x) = (ax + b) \cdot q(x) + r(x)$

$$p(x) = a\left(x + \frac{b}{a}\right) \cdot q(x) + r(x)$$

$$p(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) \cdot aq(x) + r(x)$$

$$p(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right) \cdot q_1(x) + r(x)$$

$$q_1(x) = aq(x) \Rightarrow q(x) = \frac{q_1(x)}{a}$$

$$\begin{array}{c|c|c} -\frac{b}{a} & \text{coeficiente de } p(x) & \\ \hline & \underbrace{\text{coeficiente de } q(x)}_{q_1(x)} & q_1(x) \end{array}$$

Atividades resolvidas

R13. Divida $p(x)$ por $d(x)$ usando o algoritmo de Briot-Ruffini:

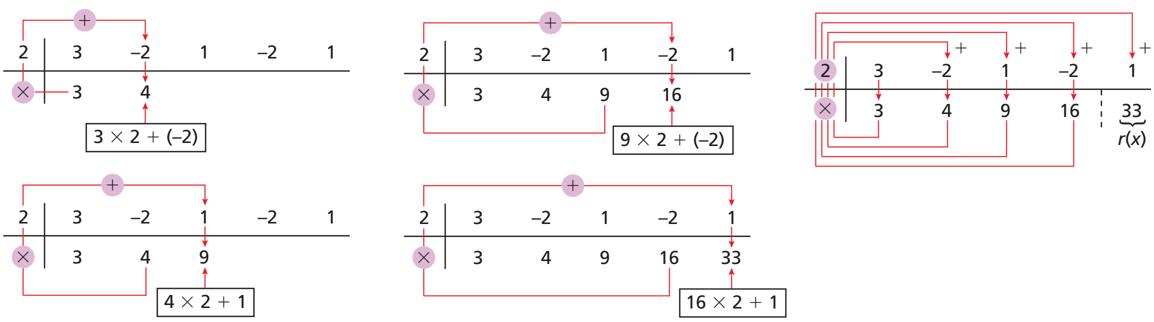
a) $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$ por $d(x) = x - 2$

b) $p(x) = x^3 - 2x + 1$ por $d(x) = x + 3$

c) $p(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 2$ por $d(x) = 2x - 1$

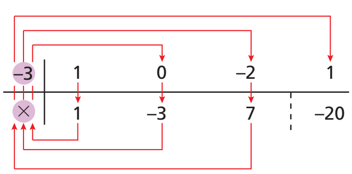
Resolução

a)



Como $gr(p) = 4$ e $gr(d) = 1$, teremos $gr(q) = 3$, $q(x) = 3x^3 + 4x^2 + 9x + 16$ e $r(x) = 33$.

b) Para dividir $p(x) = x^3 - 2x + 1$ por $d(x) = x + 3$, inicialmente escrevemos $p(x)$ na forma completa: $p(x) = x^3 - 0x^2 - 2x + 1$. Depois, indicamos os coeficientes no algoritmo.



$q(x) = x^2 - 3x + 7$ e $r(x) = -20$

c) Para dividir $p(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 2$ por $d(x) = 2x - 1$, devemos utilizar o algoritmo de Briot-Ruffini com $d_1(x) = x - \frac{1}{2}$. Para obtermos o quociente, dividimos o quociente q_1 obtido por 2:

–2	a	b	c	d
	1	–2	3	2

$$q(x) = \frac{q_1(x)}{2} \Rightarrow q(x) = 2x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \text{ e } r(x) = \frac{9}{4}$$

Atividades

28. Determine o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$ das divisões de $p(x)$ por $d(x)$:

a) $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 1$ e $d(x) = x - 1$

$q(x) = 3x^2 + x + 2$

$r(x) = 3$

b) $p(x) = x^5 - 4x^4 + 3$ e $d(x) = x + 2$

$q(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 24x + 48$

$r(x) = -93$

c) $p(x) = 5x^2 - 3x - 1$ e $d(x) = x + 1$

$q(x) = 5x - 8$

$r(x) = 7$

d) $p(x) = x^5 - 1$ e $d(x) = x - 1$

$q(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

$r(x) = 0$

29. Determine o resto da divisão:

$$\left(3x^4 - 2x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1\right) : (x + 2).$$

$r(x) = 62$

30. No algoritmo abaixo, foi aplicado o algoritmo de Briot–Ruffini. Determine o dividendo $p(x)$, o quociente $q(x)$ e o resto $r(x)$.

−2	0	b	c	d
	1	−2	−3	2

$p(x) = x^3 - x + 8$

$q(x) = x^2 - 2x + 3$

$r(x) = 2$

Equações polinomiais

(EM13MAT301) (EM13MAT302)

Equação polinomial ou equação algébrica é toda equação do tipo $p(x) = 0$, em que:

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$

• $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ são números reais;

• n é número natural;

• x é variável complexa;

• o grau da equação polinomial é o grau do polinômio $p(x)$.

A raiz da equação polinomial $p(x) = 0$ é todo número $\alpha \in$ C, tal que $p(\alpha) = 0$.

Teorema fundamental da Álgebra

O teorema fundamental da álgebra é uma proposição que pode ser enunciada da seguinte forma: Toda equação polinomial de grau n, com $n \geq 1$, possui pelo menos uma raiz complexa.

Com base nesse teorema, podemos mostrar que toda equação polinomial de grau n, com $n \geq 1$, possui exatamente n raízes complexas.

Além disso, podemos mostrar que todo polinômio de grau n, com $n \geq 1$, pode ser decomposto em fatores do 1º grau da seguinte maneira:

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

$p(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) ... (x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_n)$

em que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ são as raízes de $p(x)$.

Professor

Ao abordar as equações polinomiais, se necessário, retomem uma revisão dos conceitos básicos de polinômios, grau e coeficientes. Em seguida, introduza as diferentes formas de equações polinomiais, incluindo equações lineares, quadráticas, cúbicas, e assim por diante. Reforce a importância das raízes de uma equação polinomial e como elas se relacionam com os pontos em que o gráfico cruza o eixo x. Introduza o conceito de raiz múltipla e suas implicações nas soluções das equações. Ao ensinar sobre equações polinomiais, forneça uma variedade de exemplos práticos e problemas desafiadores que explorem situações do mundo real, como trajetórias, populações e movimentos físicos modelados por equações polinomiais. Isso ajudará os alunos a visualizar e aplicar os conceitos de forma mais concreta. Finalmente, encoraje os alunos a explorar recursos computacionais, como software de álgebra computacional, para resolver equações polinomiais de graus mais elevados, proporcionando uma abordagem completa e diversificada ao aprendizado desse tópico.

Atenção

Até agora, o conjunto universo utilizado na resolução de problemas e equações foi o conjunto R dos números reais. Vimos também que algumas equações não tinham solução no conjunto dos reais. É o caso, por exemplo, da equação $x^2 + 1 = 0$:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

Logo, $S = \varnothing$, visto que não existe número real cujo quadrado é igual a –1.

Chamamos de unidade imaginária o número i, tal que:

$$i^2 = -1, \text{ ou seja, } i = \sqrt{-1}$$

Assim, no conjunto dos números complexos, as equações do 2º grau com $\Delta < 0$ possuem solução não vazia.

Assim, a solução da equação será:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow x = \pm i$$

Logo, $S = \{-i, i\}$.

O conjunto C dos números complexos é aquele formado pelos números que podem ser expressos na forma $z = a + bi$, em que $a \in$ R, $b \in$ R e $i = \sqrt{-1}$, ou seja:

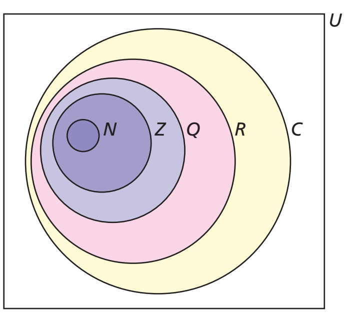
$$C = \{ z = a + bi \mid a \in R, b \in R, i = \sqrt{-1} \}$$

A forma $z = a + bi$ é denominada forma algébrica de um número complexo, em que a é a parte real e b, a parte imaginária.

Tomando um número complexo $z = a + bi$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} a = 0 \\ b \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow z = bi \text{ (imaginário puro)}$$

$b = 0 \Rightarrow z = a$ (real)



Professor

Para ampliar, desenvolva o assunto do box a seguir. Comece esclarecendo que "i" é a unidade imaginária, definida como a raiz quadrada de -1. Destaque como os números imaginários foram introduzidos para lidar com situações em que a raiz quadrada de um número negativo é necessária. Se julgar pertinente, mostre também como operar com números imaginários, incluindo adição, subtração, multiplicação e divisão, e como representá-los no plano complexo.

Multiplicidade de uma raiz

Dada a equação polinomial $p(x) = 0$ de grau n, dizemos que α é raiz de multiplicidade k se, das n raízes da equação, somente k forem iguais a α.

Atividades resolvidas

R14. Verifique se os valores 2 e 5 são raízes da equação polinomial $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Resolução

$2^2 - 7 \cdot 2 + 10 = 0$ e $5^2 - 7 \cdot 5 + 10 = 0$

Logo, 2 e 5 são raízes de $x^2 - 7x + 10 = 0$.

R15. Verifique se i, $-i$ e -2 são raízes da equação $p(x) = 0$, em que $p(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$.

Resolução

$p(i) = i^3 + 2i^2 + i + 2 = -i - 2 + i + 2 = 0$

$p(-i) = (-i)^3 + 2(-i)^2 + (-i) + 2 = i - 2 - i + 2 = 0$

$p(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 + (-2) + 2 = -8 + 8 - 2 + 2 = 0$

Como $p(i) = 0$, $p(-i) = 0$ e $p(-2) = 0$, temos que i, $-i$ e -2 são raízes da equação $p(x)$.

R16. Sabendo que -2 e 3 são os zeros do polinômio $p(x) = 2x^2 - 2x - 12$, escreva-o como produto de fatores de 1º grau:

Resolução

$p(x) = 2[x - (-2)]\,(x - 3) \Rightarrow p(x) = 2(x + 2)\,(x - 3)$

R17. Qual é a multiplicidade das raízes da equação $(x - 2)\,(x + 3)\,(x + 3) = 0$?

Resolução

-3 é raiz de multiplicidade 2 ou raiz dupla, e o número 2 é raiz de multiplicidade 1.

R18. Uma das raízes da equação $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ é o número 2. Determine as outras duas raízes.

Resolução

Se 2 é raiz, então $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ é divisível por $(x - 2)$.

Efetuando a divisão, temos:

−2	0	*b*	*c*	*d*
	1	−2	−3	2

$p(x) = (x - 2)(x^2 - 2x - 3)$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$ ou $x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

Atividades

31. Determine quantas e quais são as soluções das seguintes equações:

a) $(x + 1)(x - 1)(x + 2) = 0$

3 soluções; {-2, -1, 1}

b) $(x + 2)(x - 2i)(x - 2i) = 0$

2 soluções; {-2, 2i}, sendo que 2i é raiz dupla

32. Mostre que o número 2 é raiz da equação $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$.

$x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$

Se 2 é raiz, então $p(2) = 0$.

$2^3 + 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - 8 = 8 + 12 - 12 - 8 = 0$

De fato, 2 é raiz da equação.

33. Determine as raízes das equações:

a) $(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 0$

S = {2, 3, 4}

b) $3(x + 2i)(x - 2i)(x + 1) = 0$

S = {-2i , 2i , -1}

c) $4(x - 3)(x + 2)(x + i) = 0$

S = {-2, 3, -i }

34. Sabendo que -3 é uma das raízes da equação $x^3 + 4x^2 + 3x = 0$, determine as outras raízes.

0 e -1

35. Determine as outras raízes do polinômio $p(x) = x^3 - x^2 - 9x + 9$, sabendo que $p(1) = 0$.

-3 e 3

36. Resolva a equação $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = 0$, sabendo que o número 2 é raiz dupla.

$S = \{2, 1, -1\}$

37. Mostre que –2 é raiz de multiplicidade 3 da equação $x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 20x + 8 = 0$.

Se -2 é raiz tripla, então $p(x) = x^4 + 7x^3 + 18x^2 + 20x + 8$ é divisível por $(x + 2)^3$.

−2	1	7	18	20	8
−1	1	5	8	4	0
−2	1	3	2	0	
−2	1	1	0		
	1	−1 (≠ 0)			

Portanto, -2 é raiz de multiplicidade 3.

38. Determine a multiplicidade da raiz 1 na equação $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$.

1 é raiz tripla.

Resumo

Polinômios

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, em que:

- x é a variável do polinômio
- $n \in \mathbb{N}$
- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ são coeficientes do polinômio
- a_0 coeficiente independente
- grau do polinômio p é n: $gr(p) = n$

Professor

Encoraje os alunos a revisitarem o resumo sempre que precisarem, incentivando-os a anotar outros conceitos que considerem relevantes para um melhor entendimento. Além disso, sugira que utilizem o resumo como um auxílio durante a resolução da bateria final de atividades que virá a seguir. Isso permitirá que os estudantes apliquem de forma prática o conteúdo revisado e fortaleçam sua compreensão, ao mesmo tempo em que se tornam mais autônomos na gestão do próprio aprendizado. Dessa maneira, você estará proporcionando uma ferramenta valiosa que promove a retenção de conhecimento e a habilidade de aplicação em situações desafiadoras.

Valor numérico

É o valor que se obtém substituindo a variável x por um número α.

Zero de um polinômio

É o número α tal que $p(\alpha) = 0$

Igualdade de polinômios

Dados:

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ e $q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$, temos:

$$p(x) = q(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = b_n \\ a_{n-1} = b_{n-1} \\ \vdots \qquad \vdots \\ a_1 = b_1 \\ a_0 = b_0 \end{cases}$$

Adição e subtração de polinômios

Para somar dois polinômios, adicionamos os coeficientes dos termos de mesmo grau. Da mesma forma, para obter a diferença de dois polinômios, subtraímos os coeficientes dos termos de mesmo grau.

Multiplicação de polinômios

Para obter o produto de dois polinômios, multiplicamos cada termo de um deles por todos os termos do outro, somando os termos de mesmo grau.

O grau do polinômio-produto $p(x) \cdot q(x)$ é a soma dos graus de $p(x)$ e $q(x)$ se nenhum destes for o polinômio nulo: $gr(p \cdot q) = gr(p) + gr(q)$.

Divisão de polinômios

Considerando os polinômios $p(x)$ e $d(x)$, não nulos, tais que o grau de $p(x)$ seja maior ou igual ao grau de $d(x)$, pode-se efetuar a divisão de $p(x)$ por $d(x)$, encontrando dois polinômios, $q(x)$ e $r(x)$, que satisfazem as seguintes condições:

- $p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$
- $r(x) = 0$ ou $gr(r) < gr(d)$

Se $r(x)$ for um polinômio nulo, dizemos que $p(x)$ é divisível por $d(x)$.

Método da chave

Ordena-se $p(x)$ e $d(x)$ segundo as potências decrescentes de x e monta-se a chave:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & \underline{d(x)} \\ r(x) & q(x) \end{array}$$

Método de Descartes

Consiste basicamente na determinação dos coeficientes do quociente e do resto a partir da identidade:

$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$

Teorema do resto

$$p(x) = \underbrace{(ax + b)}_{d(x)} \cdot q(x) + r(x)$$

$$r(x) = p\left(-\frac{b}{a}\right)$$

Teorema de d'Alembert

Um polinômio $p(x)$ é divisível por

$d(x) = ax + b$ se e somente se $p\left(-\dfrac{b}{a}\right) = 0$.

Algoritmo de Briot-Ruffini

Divisão de $p(x)$ por $x - a$:

a	coeficiente de $p(x)$	
	coeficiente de $q(x)$	resto $r(x)$

Professor

A sugestão para a utilização desta série de atividades finais é como uma avaliação somativa. Essa avaliação pode ser adaptada conforme sua preferência, podendo ser realizada individualmente, em duplas ou em pequenos grupos, de acordo com o método que melhor se alinha aos objetivos de ensino e à dinâmica da sua turma. Isso proporcionará aos alunos uma oportunidade de demonstrar suas aprendizagens de maneira colaborativa ou individual, garantindo uma avaliação abrangente.

Equações polinomiais

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$,

em que:

- $a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0$ são números reais;
- n é número natural;
- x é variável complexa;
- o grau da equação polinomial é o grau do polinômio $p(x)$.

Avalie o que aprendeu

(EM13MAT302)

1. Determine os valores de k para que o polinômio $p(x) = (3k + 5)x^3 - (2 + k)x^2 - x + 3$ tenha grau 3.

a) $gr(p) = 3 \Rightarrow k \neq -\frac{5}{3}$

b) $gr(p) = 3 \Rightarrow k \neq -\frac{3}{5}$

c) $gr(p) = 4 \Rightarrow k \neq -\frac{5}{4}$

d) $gr(p) = 7 \Rightarrow k \neq -\frac{5}{7}$

e) $gr(p) = 9 \Rightarrow k \neq -\frac{5}{9}$

(EM13MAT302)

2. Dado $p(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 3$, calcule $p(0) + p(-1) - 3p(1)$.

a) –7 b) 7 c) –9 d) 9 e) 13

(EM13MAT302)

3. Sabe-se que $p(x) = 2x^3 - 3ax + b$, $p(1) = -8$ e $p(-1) = 6$. Obtenha os coeficientes a e b.

a) $a = 0$ e $b = 0$

b) $a = 1$ e $b = -1$

c) $a = 2$ e $b = 0$

d) $a = 3$ e $b = -1$

e) $a = 4$ e $b = 0$

(EM13MAT302)

4. Calcule os coeficientes a, b, c e d para que o polinômio $p(x) = (a - 3)x^4 + (2b + 6)x^2 + (c - 2)x - d$ seja identicamente nulo.

a) $a = 2$; $b = -3$; $c = 5$; $d = 2$

b) $a = 3$; $b = -4$; $c = 2$; $d = 0$

c) $a = 3$; $b = -3$; $c = 2$; $d = 0$

d) $a = 3$; $b = -3$; $c = 5$; $d = 1$

e) $a = 5$; $b = -3$; $c = 7$; $d = 6$

(EM13MAT302)

5. Dados $A = x^2 - x + 2$, $B = x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ e $C = x - 2$, calcule A + B – 3C:

a) $x^3 - 6x^2 - x + 3$

b) $x^3 - 5x^2 - x + 5$

c) $x^3 - 4x^2 - 2x + 6$

d) $x^3 - 3x^2 - 2x + 7$

e) $x^3 - 2x^2 - 3x + 9$

(EM13MAT302)

6. Determine o valor de k, sabendo que os restos das divisões de $p(x) = 3x^4 - 2x^3 + kx + 1$ por $(x - 1)$ e $(x + 1)$ são iguais.

a) $k = 0$ b) $k = 2$ c) $k = 4$ d) $k = 6$ e) $k = 8$

(EM13MAT301)

7. Um polinômio $p(x)$ dividido por $(x + 3)$ dá resto 2, e dividido por $(x - 2)$ dá resto 5. Determine o resto da divisão de $p(x)$ por $(x - 2)(x + 3)$.

a) $r(x) = \frac{x}{3} + \frac{17}{5}$

b) $r(x) = \frac{3x}{5} + \frac{19}{3}$

c) $r(x) = \frac{x}{3} + \frac{19}{3}$

d) $r(x) = \frac{7x}{5} + \frac{17}{5}$

e) $r(x) = \frac{3x}{5} + \frac{19}{5}$

(EM13MAT301)

8. Na divisão de um polinômio $p(x)$ pelo binômio $(x - 3)$, usou-se o dispositivo prático de Briot-Ruffini, como mostra o esquema abaixo. Determine os valores de a, b, c, d e e.

3	1	b	c	7	e
	a	2	4	d	59

a) $a = 2$; $b = -2$; $c = -2$; $d = 11$; $e = 21$

b) $a = 1$; $b = -1$; $c = -2$; $d = 19$; $e = 2$

c) $a = 1$; $b = -4$; $c = -2$; $d = 19$; $e = 2$

d) $a = 2$; $b = -3$; $c = -5$; $d = 11$; $e = 2$

e) $a = 3$; $b = -1$; $c = -2$; $d = 8$; $e = 2$

(EM13MAT302)

9. Sabendo que o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + 3x + b$ é divisível por $(x - 3)^2$, determine $a + b$.

a) 0

b) 2

c) 4

d) 8

e) 16

(EM13MAT302)

10. Uma das raízes da equação $x^3 - x^2 - 2x + 6k = 0$ é 3. Determine as outras.

a) $-1 + \sqrt{10}\,i$ e $-1 - \sqrt{10}\,i$

b) $-1 + \sqrt{7}\,i$ e $-1 - \sqrt{7}\,i$

c) $-1 + \sqrt{5}\,i$ e $-1 - \sqrt{5}\,i$

d) $-1 + \sqrt{3}\,i$ e $-1 - \sqrt{3}\,i$

e) $-1 + \sqrt{2}\,i$ e $-1 - \sqrt{2}\,i$

(EM13MAT302)

11. Dada a equação $x^3 + (k + 1)x^2 + (k + 9)x + 9 = 0$ e sabendo que uma das raízes dessa equação é -1, determine k para que as outras raízes sejam iguais.

a) $k = \pm 6$

b) $k = \pm 5$

c) $k = \pm 4$

d) $k = \pm 3$

e) $k = \pm 2$

(EM13MAT302)

12. Determine o conjunto-solução da equação $x^4 - 7x^3 + 13x^2 + 3x - 18 = 0$, sabendo que 3 é raiz dupla.

a) $S = \{-1, 0, 1\}$

b) $S = \{-1, 2, 3\}$

c) $S = \{1, -2, 3\}$

d) $S = \{1, 0, -1\}$

e) $S = \{-1, -2, -3\}$

(EM13MAT302)

13. Determine as raízes da equação $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$, sabendo que uma delas é o quíntuplo da outra.

a) $S = \{1, 5, 7\}$

b) $S = \{2, 7, 9\}$

c) $S = \{3, 3, 3\}$

d) $S = \{2, 5, 9\}$

e) $S = \{1, 3, 5\}$

(EM13MAT302)

14. Encontre o conjunto-solução da equação $2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0$, sabendo que o produto de duas raízes é igual a 1.

a) $S = \left\{0, \frac{5}{2}, 3\right\}$

b) $S = \left\{1, -\frac{1}{2}, -2\right\}$

c) $S = \left\{2, -\frac{3}{2}, -4\right\}$

d) $S = \left\{-1, \frac{1}{2}, 2\right\}$

e) $S = \left\{-2, \frac{3}{2}, 4\right\}$

(EM13MAT302)

15. Calcule o comprimento da diagonal *d* de um paralelepípedo reto-retangular, sabendo que suas dimensões, em centímetro, são dadas pelas raízes da equação $24x^3 - 26x^2 + 9x - 1$.

a) $d = \frac{61}{12}$

b) $d = \frac{\sqrt{61}}{12}$

c) $d = \frac{97}{13}$

d) $d = \frac{\sqrt{97}}{13}$

e) $d = \frac{\sqrt{91}}{15}$

(EM13MAT302)

16. Sendo $p(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 6x + a$ e $q(x) = x + b$, com $b > 1$. Ao efetuar a divisão de p(x) por $q(x)$, aplicando o dispositivo de Briot-Ruffini, obteve-se:

	1	2	–8	–6	*a*
–*b*	1	2	*c*	–6	–10

Complete o dispositivo e determine o valor de $a + b + c$.

a) –30

b) –25

c) –20

d) –15

e) –10

(EM13MAT302)

17. (UM-SP) Se $p(x) = 2x^2 + kx + 2$ é divisível por $x + 2$, então 2^k vale:

a) 32

b) 16

c) 8

d) 64

e) 4

(EM13MAT302)

18. (FGV-SP) A equação $x^3 - 3x^2 + 4x + 28 = 0$ admite –2 como raiz. As outras raízes satisfazem a equação:

a) $x^2 - 4x + 14 = 0$

b) $x^2 - 5x + 14 = 0$

c) $x^2 - 6x + 14 = 0$

d) $x^2 - 7x + 14 = 0$

e) $x^2 - 8x + 14 = 0$

(EM13MAT302)

19. (Fuvest-SP) Dividindo-se o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por $(x - 1)$, obtém-se resto igual a 2. Dividindo-se $P(x)$ por $(x + 1)$, obtém-se resto igual a 3. Sabendo que $P(x)$ é divisível por $(x - 2)$, tem-se que o valor de $\frac{ab}{c}$ é igual a:

a) –6

b) –4

c) 4

d) 7

e) 9

(EM13MAT302)

20. (EPCAR-MG) O resto da divisão do polinômio $p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x + 1$ por $x + 1$ é um número:

a) ímpar menor que 5.

b) par menor que 6.

c) primo maior que 5.

d) primo menor que 7.

Referências

AABOE, Asger. Episódios da história antiga da Matemática. Brasília: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

ARAGÃO, Maria José. História da Matemática. Rio de Janeiro: Editora Interferência, 2009.

BARBETTA, Pedro Alberto. Estatística aplicada às ciências sociais. 5. ed. Florianópolis: Editora da UFSC, 2003

BONOLA, Roberto. Geometrias no Euclidianas. Buenos Aires: Espasa-Calpe Argentina, 1951.

BOYER, Carl B. História da matemática. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher/Edusp,

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Base nacional comum curricular: educação é a base (BNCC). Brasília: MEC/SEB, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>. Acesso em: 11 set. 2023.

COSTA, S. F. Introdução ilustrada à Estatística. São Paulo: Harbra, 1994.

CRESPO, A. A. Estatística fácil. 19. ed. São Paulo: Saraiva, 2009.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. A experiência Matemática. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1985.

DINIZ, Maria Ignez de Souza Vieira; SOUZA, Eliane Reame de. Álgebra: das variáveis às equações. 2. ed. São Paulo: CAEM/IME – USP, 1996.

ENZENSBERGER, Hans Magnus. O diabo dos números. São Paulo: Cia das Letras, 2009.

MORGADO, A. C. de O.; CARVALHO, P. C. P. Matemática discreta. Rio

de Janeiro: SBM, 2015.

POZO, J. I. (org.). A solução de problemas. Porto Alegre: Artmed, 1998.

VILLELLA, J. Uno, dos, tres...Geometria outra vez. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2008.

SECRETARIA DE
EDUCAÇÃO

GOVERNO DO
PARÁ

ISBN: 978-65-6038-022-6

9 786560 380226

editora
órbita